MODULE: PHYSIQUE 04
ONDES

Présenté par

Pr Fouad BOUKLI HACENE

Professeur

Email: Fouad.boukli-hacene@enp-oran.dz/

bhfouad@yahoo.fr

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE MAURICE AUDIN D'ORAN

Département: Formation préparatoire
Module: Ondes
Niveau : Deuxième année

CHAPITRE 2

PROPAGATION DES ONDES MÉCANIQUES DANS LES SOLIDES

Présenté par

Pr. Fouad BOUKLI HACENE

bhfouad@yahoo.fr

1. Introduction

2. Notions fondamentales

3. Modélisation

4. Applications

OBJECTIFS

- 1. La corde.
- 2. Le barreau solide.
- 3. Quelques applications.

Onde mécanique		
Tremblement de terre	Son d'un haut-parleur	Vague
		
Milieu : terre	Milieu : air	Milieu : eau

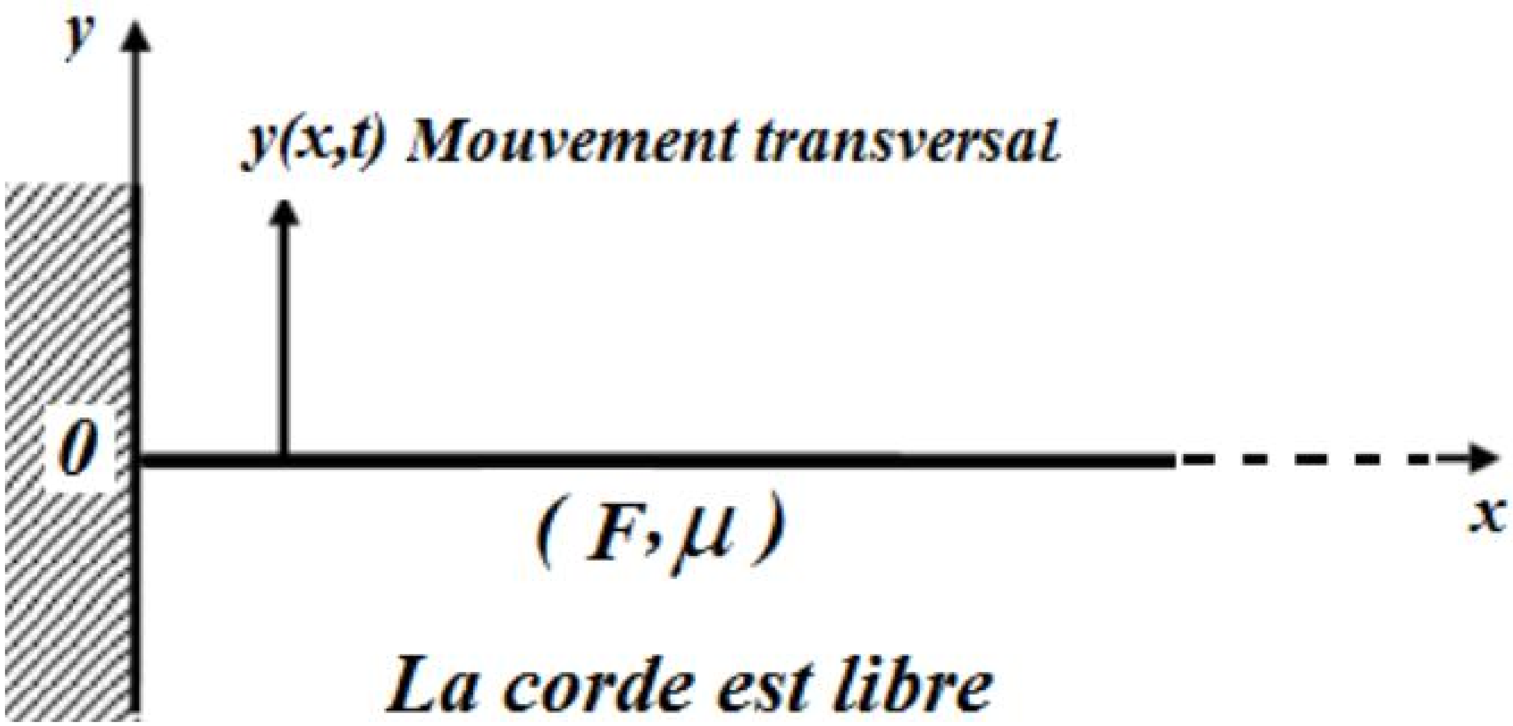
PARTIE A: CORDE

ONDE TRANSVERSALE

DÉFINITIONS

Mouvement ondulatoire transversal dans une corde:

Soit une onde progressive qui se propage dans la direction X >0 représentée comme suit:



MODÉLISATION MATHÉMATIQUES

- On considère une corde sans raideur, homogène, de masse linéique $\boldsymbol{\mu}$ constante, tendue horizontalement sous une tension $\boldsymbol{F}$.
- On définit la masse linéique

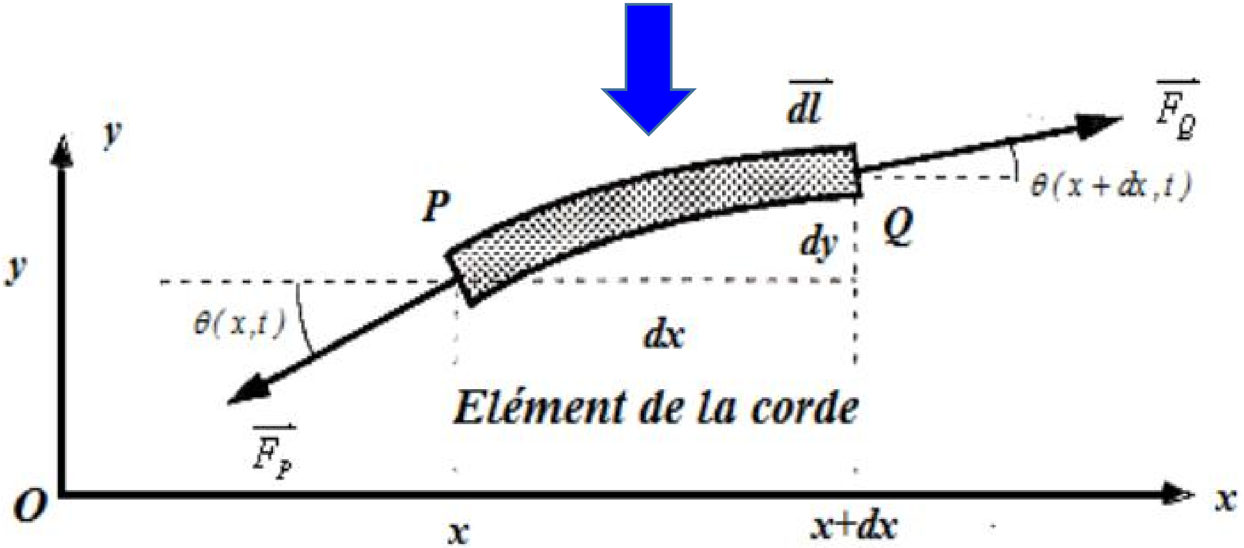
$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

- Les effets de la pesanteur sont négligés devant la tension de la corde.

On considère les approximations suivantes:

- **Chaque élément de la corde peut être découpé de façon infinitésimale de façon à être presque parallèle à l'axe x.**
- **Les angles sont donc considérés comme petits.**
- **La corde est considérée comme déformable mais non allongeable.**
- **La norme des forces dans la corde est constante en tout point quelque soit la déformation.**

- Isolons, dans la zone perturbée, un élément de fil, de longueur dl



Le bilan des forces s’écrit:

$$\sum \vec{F} = dm\vec{a}$$

Avec:

$$[F_{x+dx}\cos\theta_{x+dx} - F_x\cos\theta_x] \cong dm\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$[F_{x+dx}\sin\theta_{x+dx} - F_x\sin\theta_x] \cong dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ce qui signifie qu'il n'y pas de déplacements selon x, et représente l’accélération $\vec{a}$ selon y. $dm = \mu dl$

- Les angles sont vraiment petits, nous avons le premier terme du développement qui donne :

$$\sin x \cong \tan x \cong \frac{\partial y}{\partial x}$$

Avec $dl \cong dx$ **et** $\cos \cong 1$

On déduit:

$$[F_{x+dx} - F_x] \cong 0 \Rightarrow F_{x+dx} \cong F_x \cong F$$

Avec: $dm = \mu dl$

$$F[\sin\theta_{x+dx} - \sin\theta_x] \cong dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow F[\sin\theta_{x+dx} - \sin\theta_x] \cong \mu dl\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Les tangentes sont données par les dérivées partielles de la fonction y(x):

$$F\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right] \cong \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}\right]dx \cong \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

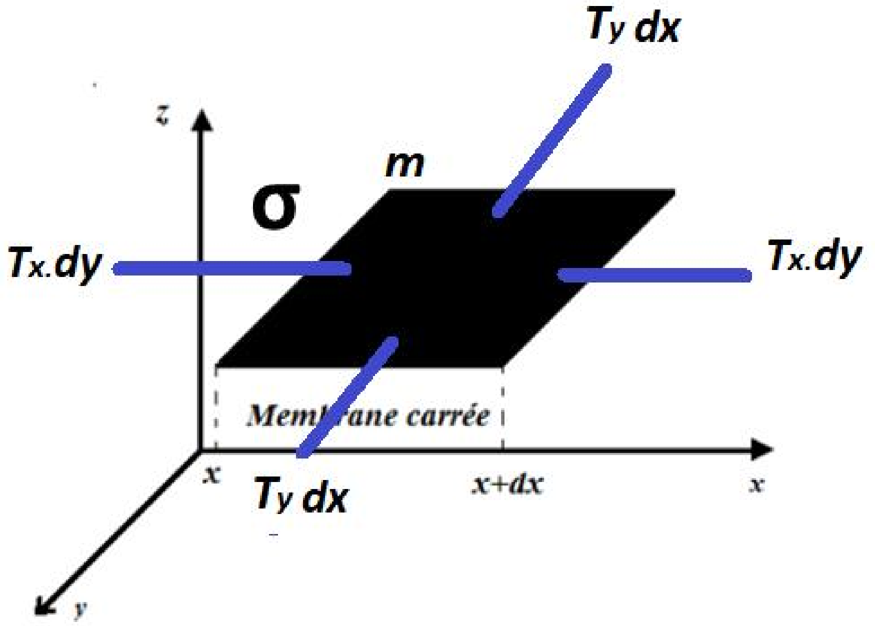
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

EQUATION D'ONDE DES CORDES VIBRANTES

- **V: est la vitesse de propagation de l'onde dans la corde qui dépend des caractéristiques du milieu μ, et de la tension de la corde.**
- **Elle ne dépend ni de la forme, ni de l'amplitude, ni de la fréquence de l'onde.**

CAS PARTICULIER : MEMBRANE
ONDE À DEUX DIMENSIONS

- On se propose d'étudier la propagation d'une onde transversale à la surface *S* d'une membrane tendue.
- On considère une membrane rectangulaire dans l'espace plan Oxyz et dont les axes sont Oz,Oy,Ox .
- Soit un élément *ds* dont les cotes sont soumises à des tensions linéaires



- En appliquant la loi dynamique de Newton

$$\sum \vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \sigma dxdy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \tau\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy$$

- L'équation de propagation de l'onde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{\tau}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \Leftrightarrow \Delta z = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

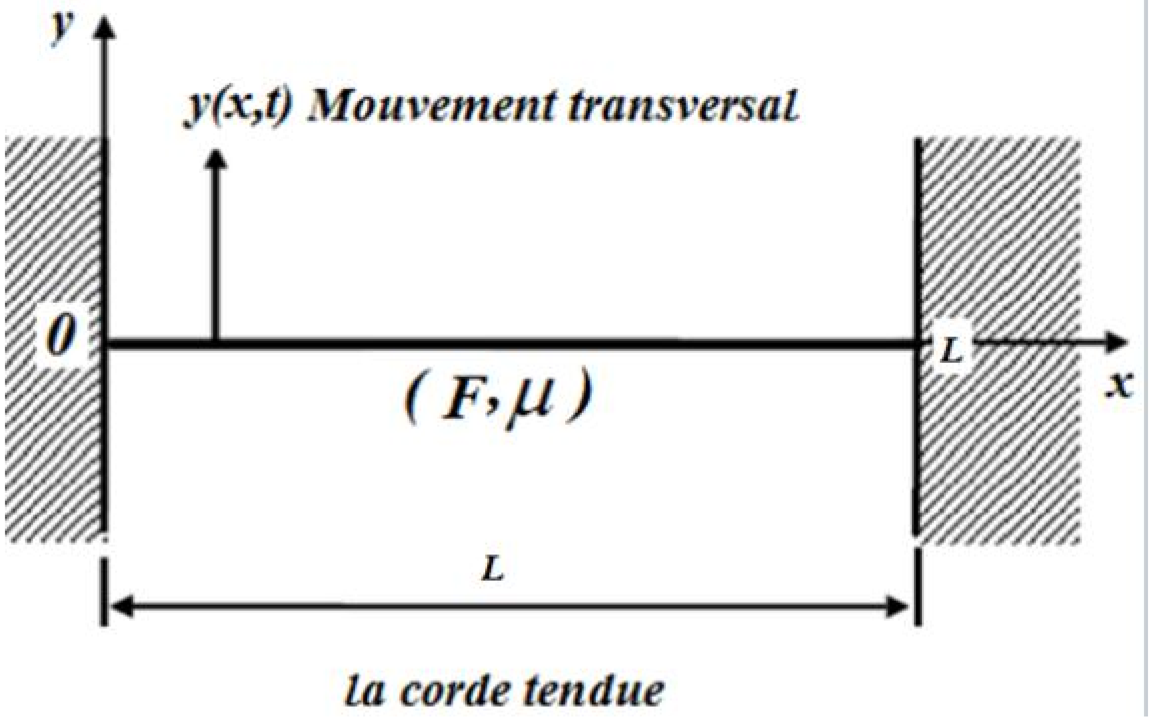
- La célérité de l'onde est égale → $V = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$

CORDE TENDUE : ONDES STATIONNAIRES :

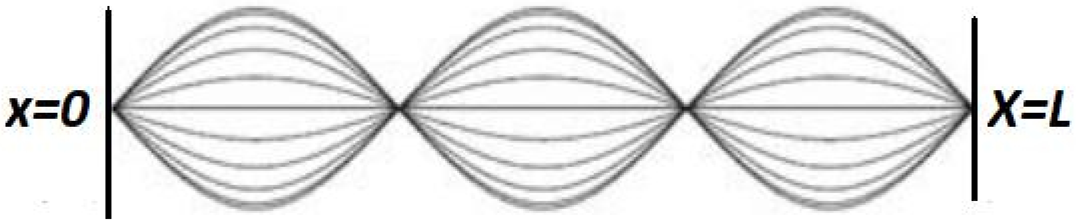
- **La corde est tendue par les deux extrémités fixes**

- **Dans ce cas la, on applique les conditions aux bords, comme suit**

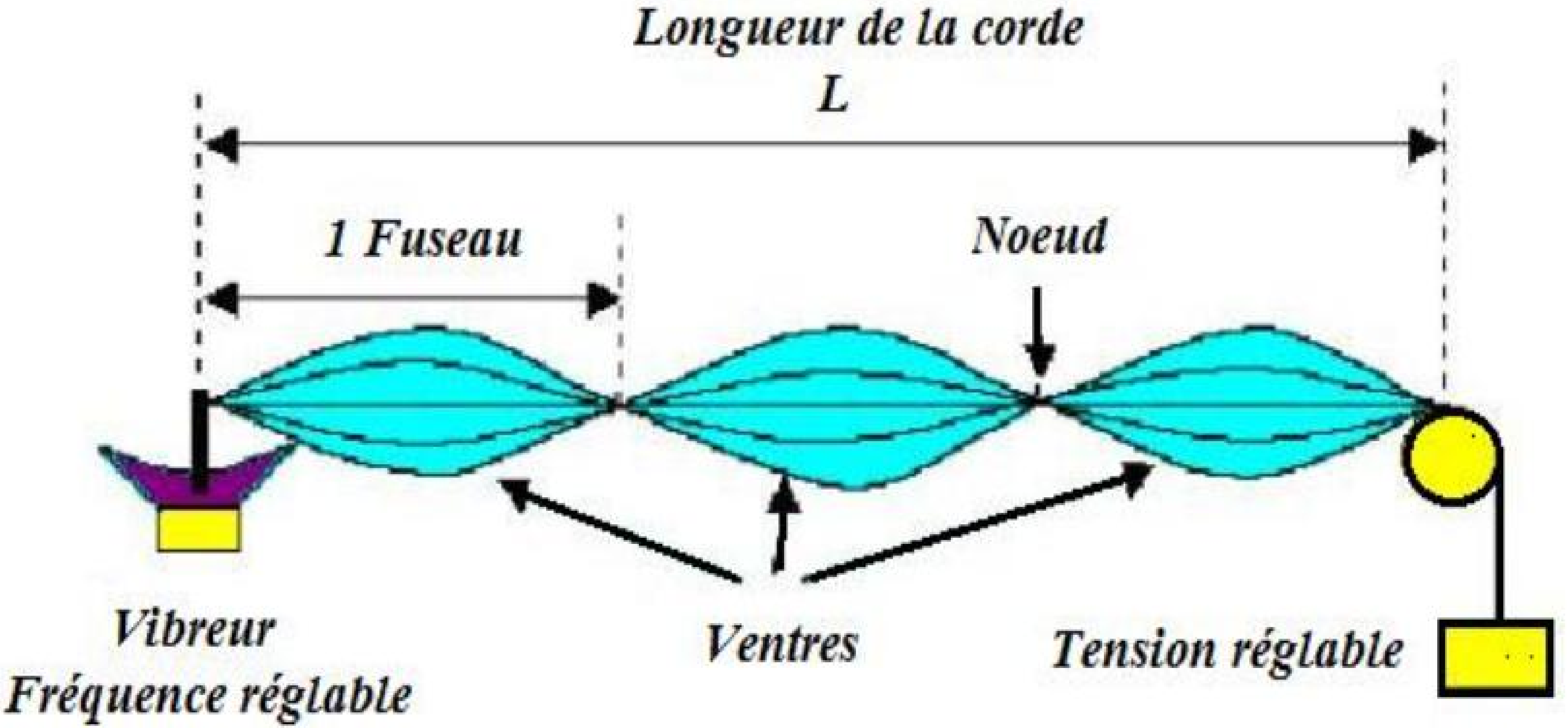
$$y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0$$



- **On aura l'interférence des ondes incidentes et les ondes réfléchies, d'où l'apparition des ondes stationnaires**



EXPÉRIENCE DE MELDE DE LA CORDE TENDUE



- On utilise les conditions initiales : $\dot{T}(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad T_2=0 \quad donc \quad T(t)=T_1 \cos \omega_n t$

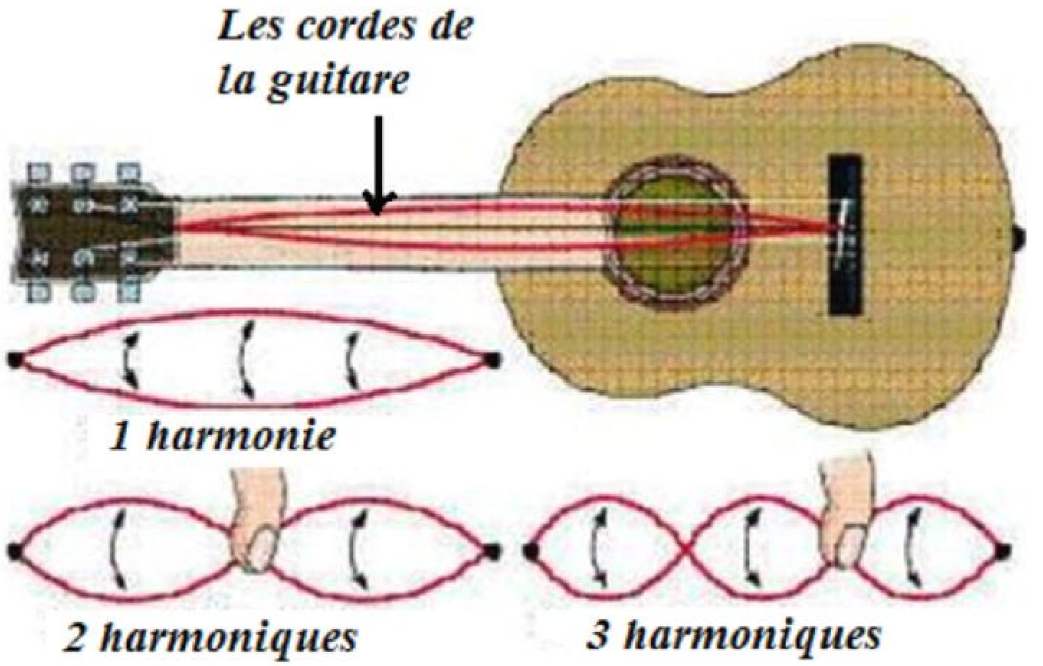
- Ces solutions quantifiées obtenues en définissent les modes propres de la corde, $(k_x^{(n)};\omega_n)$ vérifiant la solution:

$$y_n(x,t)=\Lambda \sin k_x^{(n)} x \cos \omega_n t \qquad \Lambda = A_2 B_1$$

- **D'où, la solution finale s'écrit sous la forme**

$$y_T(x,t)=\sum_{n\geq 1} \Lambda \sin k_x^{(n)} x \cos \omega_n t \qquad \Lambda = A_2 B_1$$

Exemple:



- Les **cordes vibrantes sont des résonateurs à fréquences multiples.**
- La mise en vibration peut s'effectuer par :

Pincement (harpe) - Percussion (piano) - Frottements (violon)

IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE:

- On définit l'impédance caractéristique Z de la corde par le rapport de la force transversale (dirigée suivant l'axe Oy) de rappel en abscisse x et la vitesse verticale de la corde en abscisse x, qui est s'écrit comme suit: $Z = -\frac{F_y}{v_y}$

- Pour une onde plane progressive se propageant vers les x croissants, ***F(x,t):*** $y(x,t) = F(t - \frac{x}{V})$

- **En posant la variable:** $u = t - \frac{x}{V} \Rightarrow y(x,t) = F(u)$ ➡ $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}$ **et** $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{V}\frac{\partial y}{\partial u}$

- **Finalement, l'impédance mécanique s'écrit comme suit:**

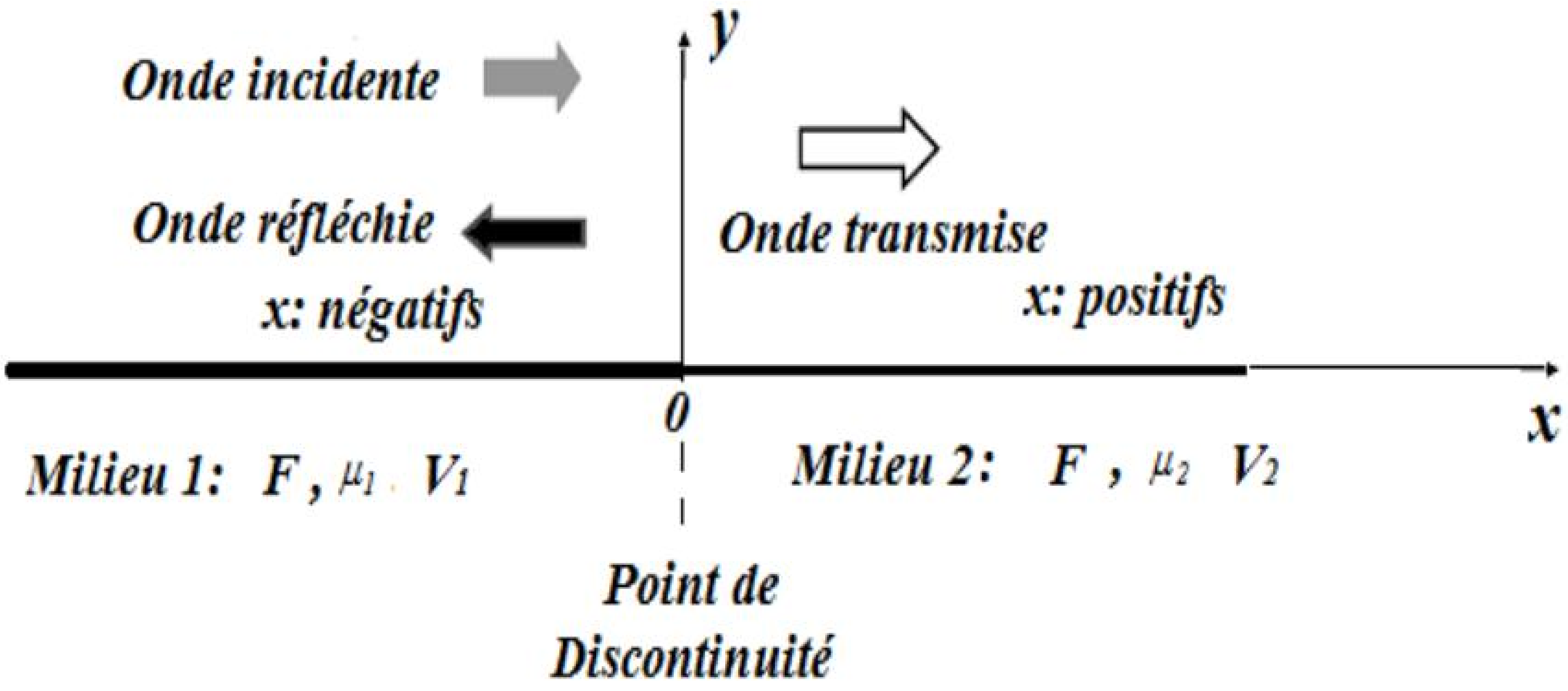
$$Z = -\frac{F_y}{v_y} = -\frac{F\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}} = -\frac{-\frac{F}{V}\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{F}{V}$$

➡

$$Z = -\frac{F_y}{V} = \sqrt{F\mu}$$

RÉFLEXION ET TRANSMISSION

- La figure ci dessous montre deux cordes ayant la même tension F et de masse linéaires différentes μ_1 et μ_2 raccordées au point x=0, appelé point de discontinuité.



- Lors du passage de l'onde mécanique incidente du milieu 1 vers le milieu 2, il existe une onde transmise vers le milieu 2 et une onde réfléchie vers le milieu 1

- **Au point de discontinuité,**
on applique les conditions de continuité:

$$\begin{cases} y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \\ \left[\dfrac{\partial y_i(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} + \left[\dfrac{\partial y_r(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\dfrac{\partial y_t(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} \end{cases}$$

- **Pour une onde incidente sinusoïdale transversale de faible amplitude ai et venant de la gauche (région x<0) de la forme :**

$$y_i(x,t) = a_i \cos(\omega t - k_1 x)$$

Avec K1 est le vecteur d 'onde dans le milieu 1 et ***K2*** est le vecteur d'onde dans le milieu 2 ,

- **On obtient alors:**

$$\begin{cases} a_i + a_r = a_t \\ a_i - a_r = \dfrac{k_2}{k_1} a_t \end{cases}$$

Le coefficient de réflexion *r*

$$r = \frac{a_r}{a_i} \Rightarrow r = \frac{k_{01} - k_{02}}{k_{01} + k_{02}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

Le coefficient de transmission *t*

$$t = \frac{a_t}{a_i} \Rightarrow t = \frac{2k_{01}}{k_{01} + k_{02}} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

Commentaires :

$$\begin{matrix} \mu_1 \succ \mu_2 & \Rightarrow & R \succ 0 & & \mu_1 \succ \mu_2 & & \\ & & & et & & \Rightarrow & T \succ 0 \\ \mu_1 \prec \mu_2 & \Rightarrow & R \prec 0 & & \mu_1 \prec \mu_2 & & \end{matrix}$$

ASPECT ÉNERGÉTIQUE

L'énergie totale d'un élément dx de la corde est la somme de deux contributions :

1. mouvement transversal d'un élément dx de masse μdx (énergie cinétique dE_c)
2. déformation de l'élément $dx \longrightarrow ds$ (énergie potentielle dE_p)

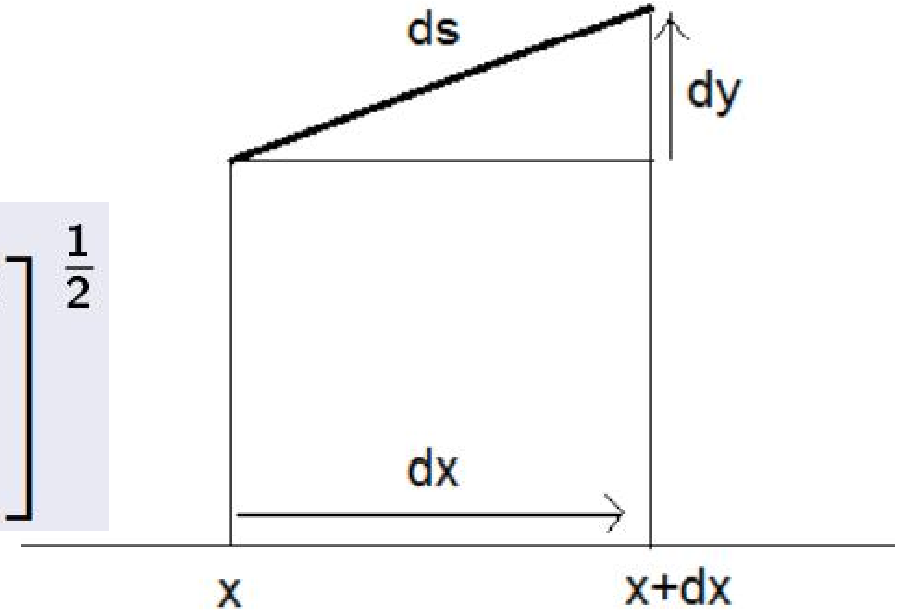
L'énergie cinétique d'un élément dx de masse μdx la corde est :

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

L'énergie potentielle est égale au travail appliqué au segment dx pour l'étirer afin que sa longueur devienne ds :

$$dE_p = T_0(ds - dx)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



$$Si \quad \frac{\partial y}{\partial x} \ll 1 \Rightarrow ds = dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \Rightarrow ds - dx \approx \frac{1}{2}dx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

L'énergie potentielle de l'élément dx s'écrit :

$$dE_p = \frac{1}{2}\,T_0\,dx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

L'énergie cinétique d'un élément dx de masse μdx la corde est :

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

L'énergie potentielle de l'élément dx s'écrit :

$$dE_p = \frac{1}{2} T_0 \, dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

L'énergie totale d'un élément dx de la corde est donnée par :

$$dE_T = dE_c + dE_p = \frac{1}{2}\mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \, dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

La puissance instantanée transportée par une onde en un point x est donnée par :

$$P(x,t) = \frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{dx}{dt}$$

ou encore

$$P(x,t) = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]v_\varphi$$

où v_φ est la vitesse de propagation de l'onde sur la corde.

Une onde progressive sinusoïdale à la forme

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - k\,x)$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - k\,x), \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = Ak\sin(\omega t - k\,x)$$

Puissance sinusoïdale

ce qui permet d'écrire

$$P(x,t) = \frac{1}{2}A^2 v_\varphi \left[\mu\omega^2 + T_0 k^2\right]\sin^2(\omega t - k\,x)$$

La puissance moyenne est donnée par $P_{\mathrm{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(x,t)dt$

$$P_{\mathrm{moy}} = \frac{1}{2}A^2 v_\varphi \left[\mu\omega^2 + T_0 k^2\right] \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - k\,x)dt$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période d'oscillation des particules de la corde.

On peut montrer que:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - k\,x)dt = \frac{1}{2}$$

Enfin, la puissance moyenne sur la corde est donnée par

$$P_{\mathrm{moy}} = \frac{1}{4}A^2 v_\varphi \left[\mu\omega^2 + T_0 k^2\right]$$

D'autre part, on sait d'après la relation de dispersion que

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu}k^2 \Longrightarrow T_0 k^2 = \mu\omega^2$$

En remplaçant dans l'expression de la puissance moyenne ci-dessus on trouve :

$$P_{\mathrm{moy}} = \frac{1}{4}A^2 v_\varphi \left[2\mu\omega^2\right] = \frac{1}{2}A^2 \mu\omega^2 v_\varphi$$

PARTIE B: BARREAU SOLIDE

ONDE LONGITUDINALE

Ondes élastiques dans les solides continus:

- Soit un barreau solide homogène, rectiligne et continu de faible section S dont une extrémité est fixé sur un support rigide fixe.
- On applique à l'autre extrémité une force de traction

Deux aspects fondamentaux:

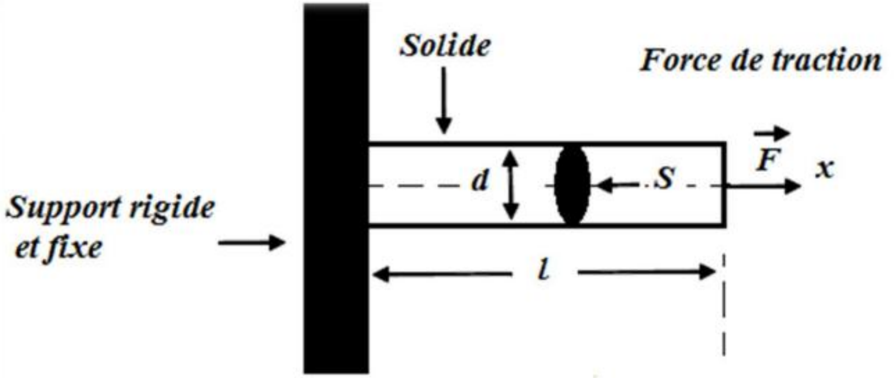
1. **Le premier est appelé <u>le phénomène élastique</u>, dans ce cas la, le barreau reprend sa longueur originale lorsque la force est supprimée, l'intervalle OA. *le phénomène est régi par la loi de Hooke***
2. **Le deuxième aspect est représenté dans l'intervalle AB, appelé <u>la zone non linéaire</u>, à cet effet, même après la suppression de la contrainte, il existe un allongement résiduel.**

La loi de Hooke

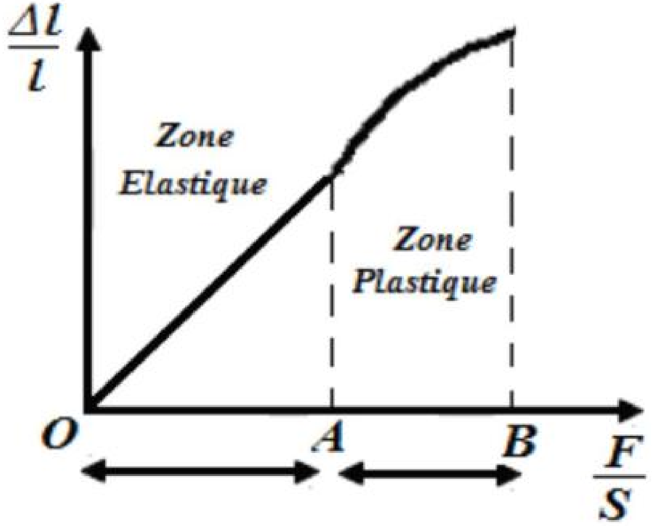
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

- ***E*** **est une constante; appelée le *module de Young* qui s'exprime en Newton par mètre carré,**
- ***S*****: est *la section du barreau solide***

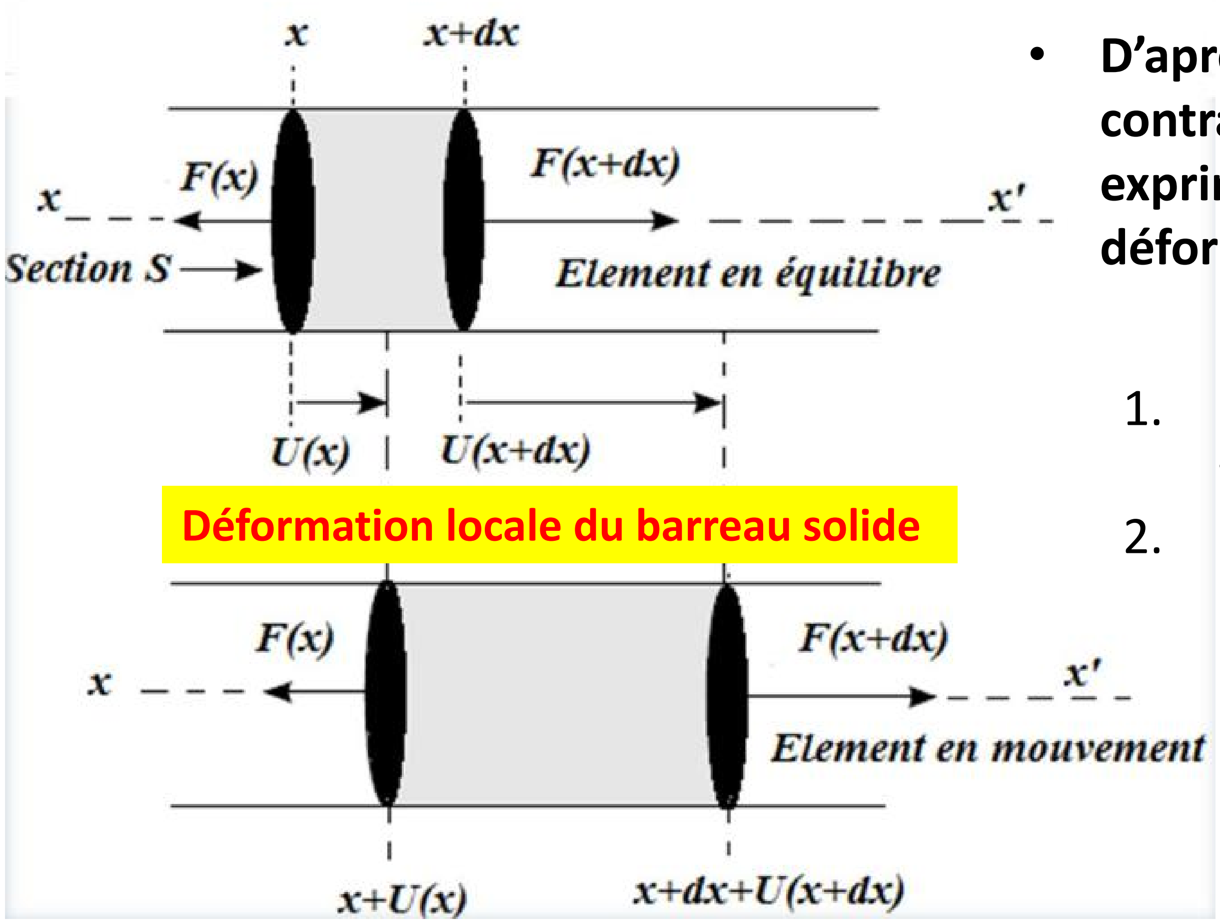
A la longueur du barreau,
on constate **un allongement *Δl***



La variation relative: $\frac{\Delta l}{l} = f(\frac{F}{S})$



- On étudie des ondes longitudinales se propageant le long de l'axe xx' dans un barreau solide indéformable, homogène et continue.
- A cet effet, On considère un élément du barreau, de section S, de masse volumique ρ, de constante de Young E.
- Les deux sections réparties sur les abscisses et sont soumises respectivement aux forces de traction F(x) et F(x+ dx).



- **D'après la loi de HOOKE, la contrainte normale est exprimée en fonction de la déformation comme suit:**

$$F(x) = SE\frac{\partial U}{\partial x}$$

1. U(x) est le déplacement subit au plan d'abscisse x par la force F(x)
2. U(x+dx) est le déplacement subit au plan d'abscisse x +dx par la force F(x + dx)

- L’équation du mouvement de l’élément dx s’écrit comme suit:

$$\rho S dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F(x+dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

- **L’ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES = L’ÉQUATION DES ONDES ÉLASTIQUES DANS LES SOLIDES,**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$$

$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ **est La vitesse de propagation qui dépend des caractéristiques macroscopiques des matériaux**

- Pour une onde progressive plane **la solution de l’équation aux dérivées partielles** est de la forme:

$$U(x) = U_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

IMPÉDANCE MÉCANIQUE

- On définit l'impédance mécanique en tout point x du barreau comme étant le rapport entre la composante normale de la force de traction et la vitesse du déplacement de l'onde

$$Z(x) = \frac{F(x)}{\dot{U}(x)} = \frac{-SE\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U(x)}{\partial t}} = \frac{SEjkU(x)}{j\omega U(x)}$$

- Ainsi l'impédance en tout point x est calculée comme suit: $Z(x) = S\sqrt{\rho V} = SZ_c$

Où Z_c est appelée l'impédance caractéristique du barreau.
Elle ne dépend pas de la position du milieu,

Aspect énergétique

En régime sinusoïdal : $U(x) = U_0 \cos\omega(t - \frac{x}{V})$

- Lors du passage de l'onde; l'énergie cinétique d'une tranche élémentaire; de volume s'écrit: $dE_c = \frac{1}{2}\rho S dx(\frac{\partial s}{\partial t})^2$

La densité d'énergie cinétique $W_c = \frac{dE_c}{dv} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 U_0^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{V})$

- L'énergie potentielle est calculée à partir des forces qui interviennent au moment du passage de l'onde: $dE_p = \frac{1}{2} E S dx(\frac{\partial s}{\partial x})^2$

La densité d'énergie potentielle s'écrit: $W_p = \frac{dE_p}{dv} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{V^2} U_0^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{V})$

- **La densité d'énergie totale W_T de l'onde s'écrit**

$$W_T = W_c + W_p = \frac{dE_T}{dv} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 U_0^2[1 - \cos 2\omega(t - \frac{x}{V})]$$

- La densité d'énergie totale moyenne de l'onde:

$$\overline{W}_T = \overline{W}_c + \overline{W}_p = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\omega^2 U_0^2[1-\cos 2\omega(t-\frac{x}{V})]dt = \frac{1}{2}\rho\omega^2 U_0^2$$

- On calcule la puissance reçue au plan x $\Rightarrow$ $p = F.V$ Avec $F(x) = -SE\frac{\partial U}{\partial x}$

D'ou

$$p = -SE\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial t} = SE\frac{\omega^2}{V}U_0^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{V}) = SE\frac{\omega^2}{V}U_0^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{V})$$

- La puissance moyenne de l'onde s'écrit: $\Rightarrow$ $\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{2}\rho V_e\omega^2 U_0^2 S$

CE QU'IL FAUT RETENIR !

- On définit une propagation d'onde dans un milieu matériel comme étant une perturbation évolutive du milieu sous l'action d'une excitation.
- Cette propagation dépend des propriétés physiques du milieu ou l'onde se propage
- La corde vibrante est le modèle physique qui permet de représenter les mouvements d'oscillation d'un fil tendu.
- Étant tenue par ses deux extrémités, les vibrations se réfléchissent à chaque extrémité, il y a donc un phénomène d'ondes stationnaires. On utilise dans ce cas **les conditions aux bords**.
- Ce modèle permet de comprendre les sons émis par les instruments à cordes,
- Lors du passage de l'onde mécanique incidente du milieu 1 vers le milieu 2, il existe une onde transmise vers le milieu 2 et une onde réfléchie vers le milieu 1. On utilise dans ce cas-là **les conditions de continuités** au point de séparation

MERCI POUR VOTRE ATTENTION