

Ch 5

Réduction des matrices

* Introduction: Soit E un e.v sur un K de dimension n .
et soit f un endomorphisme sur E et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la
matrice associée à f dans une base B .

les calculs sur A devient simple si A contient un maximum
d'éléments a_{ij} nuls (beaucoup de zéros).

Ainsi la recherche d'une matrice équivalente à A contenant
beaucoup de zéros (d'éléments nuls) est un problème
de réduction de matrices.

Dans les meilleurs des cas, il existe une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$
dans laquelle la matrice A associée à f est diagonale,
on dira alors que A est diagonalisable.

Si non A sera réduite à une matrice triangulaire
(inférieure ou supérieure), on dira que A est trigonalisable.

1/ Valeurs propres et vecteurs propres:

Définition Dans toute la suite E un K -e.v, $\dim E = n$.
soit f un endomorphisme de E , A la matrice associée
à f dans une base B_E .

1) Soit $\lambda \in K$, le scalaire λ est une valeur propre de f
s'il existe un vecteur non nul u de E tel que $f(u) = \lambda u$.

- L'ensemble des valeurs propres de f est noté $Sp(f)$ ou σ_f
(spectre de f), il peut être vide.

2) un vecteur u de E est un vecteur propre de f , s'il existe
une valeur propre $\lambda \in K$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Dans ce cas on dira que u est un vecteur propre
associé à la valeur propre λ .

(1)

3) L'ensemble des vecteurs propres associés à une seule valeur propre λ est un s.e.v de E appelé s.v propre associé à λ , on le note E_λ .

$$E_\lambda = \{ u \in E : f(u) = \lambda u \}.$$

Remarques:

- 1) $E_\lambda \neq \{0_E\}$ et $\dim E_\lambda \geq 1$
- 2) $0_E \in E_\lambda$ est un vecteur propre associé à toutes les valeurs propres
- 3) Tout vecteur propre non nul est associé à une seule valeur propre.
- 4) 0_K est une valeur propre de f ssi f n'est pas injectif

Proposition:

λ est une valeur propre de f ssi $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$P(\lambda)$ est appelé le polynôme caractéristique de la matrice A ou bien l'endomorphisme f .

Ex. Soit A la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Écrire le polynôme caractéristique de A .
- 2) Déterminer les valeurs propres et les s.e.v propres associés

Sol 1) soit $\lambda \in K$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda)$$

2

$$2) \quad P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) ((1-\lambda)^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee 1-\lambda = 2 \vee 1-\lambda = -2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 3$$

il y a 3 valeurs propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$

$$*) \quad E_{\lambda_1} = E_1 = \{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overset{(1)}{f(u)} = u \}$$

$$(1) \Leftrightarrow Au = u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x \\ 2x+y+2z = y \\ y+z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$$E_1 = \{ (x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, 0, -1) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$E_1 = S(u_1) \quad u_1 = (1, 0, -1) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \dim E_1 = 1$$

$$*) \quad E_{\lambda_2} = E_{-1} = \{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overset{(2)}{f(u)} = -u \}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -x \\ 2x+y+2z = -y \\ y+z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

$$E_{-1} = \{ (x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, -2, 1) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$= S(u_2) \quad u_2 = (1, -2, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \dim E_{-1} = 1$$

$$*) \quad E_{\lambda_3} = E_3 = \{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \overset{(3)}{f(u)} = 3u \}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3x \\ 2x+y+2z = 3y \\ y+z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$$

$$E_3 = \{ x(1, 2, 1) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$E_3 = S(u_3) \quad u_3 = (1, 2, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \dim E_3 = 1$$

3

Théorème de Cayley - Hamilton.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

et soit: $f^0 = \text{Id}_E$, $f^1 = f$, ..., $f^{(k)} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$

Si $Q(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_k X^k$

on définit $Q(f) = a_0 \text{Id}_E + \dots + a_k f^k$.

Théorème C. H

On suppose $K = \mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E = n$ sur $\mathbb{C}$.

Soit P_f le polynôme caractéristique de f , alors $P_f(f) = 0$.

ou bien $P_f(A) = 0$ où A est la matrice associée à f .

i.e., le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A .

2/ Diagonalisation des matrices:

Déf:

- 1) L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à f est diagonale.
- 2) On dit qu'une matrice carrée A ^{d'ordre n} est diagonalisable si elle est équivalente (semblable) à une matrice diagonale D i.e., il existe une matrice carrée P inversible d'ordre n et tel que
$$D = P^{-1} A P \quad (\Leftrightarrow \quad A = P D P^{-1}).$$

Proposition

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de f distinctes deux à deux et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs propres non nuls associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors les vecteurs propres $u_1, \dots, u_p$ sont linéairement indépendants.

Ainsi, un endomorphisme f sur un e.v. E de dimension n est diagonalisable s'il admet n valeurs propres distinctes.

*) la proposition reste vraie pour une matrice carrée.

Proposition Soit E un e.v. de dimension n et f un endomorphisme sur E et A la matrice associée à f .

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) des valeurs propres de f distinctes et k_i l'ordre de multiplicité de λ_i qui est racine du polynôme caractéristique $P(\lambda)$. alors:

1) On a $\sum_{i=1}^p k_i = n$, $\forall i=1, \dots, p$

2) $\left(\begin{array}{l} f \text{ est diagonalisable} \\ \text{ou} \\ A \text{ est diagonalisable} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{k_p} \\ \text{ou} \\ \sum_{i=1}^p k_i = n \end{array} \right)$

⑤

Exp 1 Dans l'exemple précédent A admet trois valeurs propres différentes $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$
Donc A est diagonalisable.

Exp 2: soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que M est diagonalisable.

2) Soit B_1 l'ensemble de vecteurs propres de M .

Montrer que B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice D

$$D = M(B_1)$$

3) Écrire P la matrice de passage de la base canonique B_0 à B_1 .

4) Déduire la matrice de passage de B_1 à B_0 (P^{-1}).

5) En déduire que $D = P^{-1} \cdot M \cdot P$.

Sol: 1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$ est une valeur propre simple et $\lambda_2 = 1$ est double.

$$E_{\lambda_1} = E_0 = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0\} = \{u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x \text{ et } z = -2x\}$$

$$E_0 = S(u_1) \quad u_1 = (1, 1, -2) \neq 0 \in \mathbb{R}^3. \quad \dim E_0 = 1$$

$$E_{\lambda_2} = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = u_3\} = \{u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$E_1 = E_{\lambda_2} = S(u_2, u_3) \quad u_2 = (1, 0, -1), u_3 = (0, 1, 0).$$

u_2, u_3 sont libres, donc forment une base de E_1

$$\dim E_1 = 2.$$

$$\text{Ainsi } P(\lambda) = (0 - \lambda)^1 (1 - \lambda)^2$$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 0 & \lambda_2 = 1 \\ k_1 = 1 & k_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\text{et } \dim E_{\lambda_1} = 1 = k_1 \quad \dim E_{\lambda_2} = 2 = k_2$$

Donc M est diagonalisable.

2) $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ Car $B_1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

il suffit alors de montrer que B_1 est libre.

(6)

$$D = ?$$

$$Mu_1 = 0 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$$

$$Mu_2 = u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3$$

$$Mu_3 = u_3 = 0u_1 + 0u_2 + 1u_3$$

$$D = M(B_1) = \begin{pmatrix} Mu_1 & Mu_2 & Mu_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}M \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

3 / Trigonalisation:

Déf Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$. E un K -e.v.

- 1) On dit que f est trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle $M_f(B)$ est une matrice triangulaire.
- 2) Soit $A \in M_n(K)$. On dit que A est trigonalisable s'il existe une matrice triangulaire $T \in M_n(K)$ équivalente à A i.e., $\exists P \in M_n(K)$ inversible tel que : $T = P^{-1} A P$ ($\Leftrightarrow A = P T P^{-1}$)

Remarques: $f \in \mathcal{L}(E)$...

- 1) f est trigonalisable $\Leftrightarrow M_f$ est inversible.
- 2) Toute matrice triangulaire est trigonalisable.
- 3) Toute matrice triangulaire supérieure est équivalente à une matrice triangulaire inférieure i.e.,
 $\forall T_1 \in T_{n,i}(K), \exists P \in GL_n(K), \exists T_2 \in T_{n,s}(K)$ tel que:
 $T_2 = P^{-1} T_1 P \Leftrightarrow T_1 = P T_2 P^{-1}$.
- 4) Si f est trigonalisable, alors les éléments de la diagonale principale de la matrice triangulaire associée à f sont composés des valeurs propres de f , en prenant en considération l'ordre de la multiplicité de ces valeurs propres.

Proposition:

Soit $A \in M_n(K)$

A est trigonalisable $\Leftrightarrow P_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}$

Corollaire:

Toute matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable

Exp Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

- Montrer que A est trigonalisable et triangulariser A .
(Trigonaliser)

sol:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \\ = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

$\lambda_1 = 1$ est une valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$ est double.

$$E_{\lambda_1} = E_1 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Au = u\} \\ = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = \frac{2}{3}z \text{ et } x = \frac{11}{3}z\} \\ = \left\{ \frac{z}{3} (11, 2, 3) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_1 = S(\{v_1\}) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$E_{\lambda_2} = E_2 = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Au = 2u\} \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3z \text{ et } y = 2z\}$$

$$E_2 = S(\{v_2\}) \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{car } E_2 = 1 \neq 2$$

cherchons un vecteur v_3 de sorte que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $M_f(B)$ soit triangulaire supérieure

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on prend : $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre $\Rightarrow$ base

$$P = P_{\text{pass}}(B_0 \rightarrow B) = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \det(v_1, v_2, v_3) = 1 \neq 0 \\ B_0 \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -8 & 15 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9

Exp 2:

Triagonalisez la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$$

$\lambda_1 = -1$ est une valeur propre triple de A .

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Au = -u \}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow z = -x + 2y$$

$$E_{-1} = \{ (x, y, -x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$E_{-1} = S(\{u_1, u_2\}) \text{ où } u_1 = (1, 0, -1) \text{ et } u_2 = (0, 1, 2)$$

u_1 et u_2 sont lin. indép. $\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ est une base de E_{-1} .

cherchons u_3 de sorte que $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On prend par exemple } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } M_B(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Applications de la réduction

- Calcul de la puissance d'une matrice carrée.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, donc il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice diagonale D telle que :

$$D = P^{-1} A P \Leftrightarrow A = P D P^{-1}$$

Alors on a : $\forall k \in \mathbb{N} : A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1} \dots P(k)$

En effet : (par récurrence).

- pour $k=0$: $A^k = A^0 = I_n$ et $P D^0 P^{-1} = I_n \Rightarrow P(0)$ est vraie.

- Supposons que $P(k)$ est vraie jusqu'à l'ordre k et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = (P D^k P^{-1}) (P D P^{-1}) \\ &= P D^k D P^{-1} \\ &= P \cdot D^{k+1} \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Exemple 1

Soit A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est diagonalisable.

2) Calculer A^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Sol

1) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$

A admet 3 valeurs propres différentes 2, -2, 3
donc A est diagonalisable.

2) Calculons les s.e.v propres.

$$E_1 = S(V_1) \text{ où } V_1 = (1, 1, 1)$$

$$E_2 = S(V_2) \text{ où } V_2 = (1, 2, 3)$$

$$E_3 = S(V_3) \text{ où } V_3 = (2, 3, 5)$$

la matrice de passage P et son inverse P^{-1} .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: A^k = P D^k P^{-1}.$$

$$D^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

donc

$$A^k = \begin{pmatrix} (-2)^k - 2^{k+1} + 2 \cdot 3^k & (-2)^k + 3 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k & -(-2)^k - 2^k + 2 \cdot 3^k \\ (-2)^k - 2^{k+2} + 3^{k+1} & (-2)^k + 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} & -(-2)^k - 2^{k+1} + 3^{k+1} \\ (-2)^k - 3 \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 3^k & (-2)^k + 9 \cdot 2^k - 10 \cdot 3^k & -(-2)^k - 3 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k \end{pmatrix}$$