Quelques équations aux dérivées partielles classiques

ZOUBIR . H

Définition 1:

Une équation aux dérivées partielles ou EDP est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, les variables $x, y, \ldots$, ses dérivées partielles $u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots$. Elle s'écrit de façon générale :

$$F\left(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots., u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots.\right) = 0 \qquad (1)$$

$$où \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots.$$

L'équation (1) est considérée dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$.

Les solutions de l'équation (1) sont des fonctions qui vérifient cette équation dans Ω .

Définition 2 :

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé intervenant dans l'équation .

Définition 3 :

Une équation aux dérivées partielles est dite linéaire si F est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles. Autrement dit, si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et à la puissance 1 dans une EDP, celle -ci est dite linéaire.

Définition 4 :

Une équation aux dérivées partielles homogène est vérifiée pour $u = 0$ (si elle est écrite de façon usuelle, le second membre, ne contenant ni u ni ses dérivées partielles, est identiquement nul.

EDP linéaire du premier ordre

La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du premier ordre est :

$$A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) = D(x, y)$$

Où $A, B, C, et\ D$ sont des fonctions.

Exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Classification des EDP linéaires du second ordre, à coefficients constants

Une EDP linéaire du second ordre, à coefficients constants s'écrit sous la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0$$

Les trois premiers termes correspondent à la partie principale. $A, B, C, D, E, F et\ G$ sont des constantes.

<u>Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$.</u>

- Si $B^2 - 4AC > 0$, l'EDP est dite **hyperbolique.**
  Exemple:
  - ✓ Equation des ondes (ou équation de D'Alembert) : $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$
- Si $B^2 - 4AC = 0$, l'EDP est dite **parabolique**.
  Exemple:
  - ✓ Equation de la diffusion (ou équation de la chaleur) : $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$
- Si $B^2 - 4AC < 0$, l'EDP est dite **elliptique**.
  Exemple :
  - ✓ Equation de Laplace : $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$
  - ✓ Equation de Poisson : $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \rho$

Equation des ondes (ou équation de D'Alembert)

C'est l'une des équations les plus connues de la physique mathématique, que nous devons à Jean le Rond D'Alembert en 1747. Elle décrit la propagation d'une onde dans le vide ou un milieu matériel quelconque.

Considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

- **Solution de d'Alembert (changement de variables**)

De manière symbolique, cette équation peut s'écrire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

On pose :

$$p = x - ct \qquad et \qquad q = x + ct$$

Et, en considérant x et t comme fonctions de p et q :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q} = -c\frac{\partial}{\partial p} + c\frac{\partial}{\partial q}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} = 2c\frac{\partial}{\partial p} \qquad et\ \frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x} = -2c\frac{\partial}{\partial q}$$

L’équation de d’Alembert prend alors la forme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right) = 0$$

Par conséquent, $\frac{\partial u}{\partial p} = \varphi(p)$ et si $F(p)$ désigne une primitive de $\varphi(p)$ alors :

$$u(x,y) = F(p) + g(q) = f(x - ct) + g(x + ct\ )$$

- **Méthode de séparation des variables:**

Considérons pour commencer une corde vibrante à extrémités fixes. Cela se modélise comme suit :

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in [0,L]\ \ et\ \ \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Conditions initiale :

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad , \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x)$$

Conditions frontières (ou de bord)

$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

On pose : $u(t,x) = f(t).g(x)$

En substituant dans l’équation de d’Alembert :

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0 = 0$$

Il vient:

$$f''(t)g(x) - c^2 f(t)g''(x) = 0$$

D’où :

$$\frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(t)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu’ils sont constants, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

On obtient ainsi deux équations différentielles :

$$\frac{f''(t)}{f(t)} = c^2\lambda \qquad et \qquad \frac{g''(x)}{g(x)} = \lambda$$

Ou encore :

$$f''(t) - c^2\lambda f(t) = 0 \qquad et \qquad g''(x) - \lambda g(x) = 0$$

- Si $\lambda > 0$, la solution de la deuxième équation différentielle est de la forme

$$g(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Or $u(t,x) = f(t).g(x)$ et $u(t,0) = u(t,L) = 0$ donc $A + B = 0 \quad et \quad Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 2A\sinh\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0 \Rightarrow A = B = 0$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

- Si $\lambda = 0$, $g(x) = Ax + B$ et $u(t,0) = u(t,L) = 0$ donne $A = B = 0.$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

- Si $\lambda < 0$, $g(x) = A\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)$ et la condition $u(t,0) = u(t,L) = 0$ donne

$$\begin{cases} B = 0 \\ A\sin\left(\sqrt{-\lambda}L\right) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad ou \quad \sqrt{-\lambda}L = n\pi,\ n\ entier \end{cases}$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas correspondants à $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$g(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Et l'équation $f''(t) - c^2\lambda f(t) = 0$ donne $f(t) = C_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$

A ce stade de résolution, nous avons la solution suivante

$$u_n(t,x) = \left[C_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Où u_n est l'une des solutions de l'équation des ondes. Or d'après le principe de superposition des solutions, toute combinaison linéaire de la solution u_n est elle aussi solution de l'équation. Il advient donc de les prendre toute en compte sous forme d'une série, i.e

$$\boldsymbol{u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Sous réserve que cette série converge et que l'on puisse dériver sous le signe somme.

Les coefficients C_n et D_n sont déterminés à l'aide des conditions initiales:

$$u(0,x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi c}{L} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Il suffit donc de connaitre les développements en séries de sinus de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pour déterminer les coefficients C_n et D_n .

Equation de diffusion (la chaleur) sur un domaine spatial borné :

Une première chose : la dénomination "équation de la chaleur" pour désigner le phénomène et l'équation que nous allons aborder dans cette page n'est pas très appropriée, bien que consacrée. Nous allons voir que l'équation porte sur la variation de température dans le temps et l'espace et non sur une quantité un peu floue nommée "chaleur". Il est bien plus précis de parler d'équation de diffusion thermique. De même, on ne parle plus de chaleur, mais d'énergie thermique. L'équation de diffusion thermique est historiquement liée à Joseph Fourier.

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0 \qquad (*)$$

$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t > 0$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < L$$

On utilise la méthode de séparations des variables en posant $u(t,x) = f(t).g(x)$

En remplaçant dans l’équation $(*)$, on obtient :

$$f'(t)g(x) - cf(t)g''(x) = 0$$

Ou encore

$$\frac{1}{c}\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(t)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu’ils sont constants, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$f'(t) = c\lambda f(t) \qquad et \qquad g''(x) = \lambda\, g(x)$$

On cherche les solutions non nulles de l’équation en $g(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} g''(x) = \lambda\, g(x) \\ g(0) = g(L) = 0 \end{cases}$$

La solution dépend de la constante λ

- Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l’équation différentielle sont :

$$g(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

si on cherche à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$g(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$g(L) = 0 \Rightarrow Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 2A\sinh\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0 \Rightarrow A = B = 0$$

On trouve donc la solution triviale (nulle)

- Si $\lambda = 0$, $g(x) = Ax + B$ et $g(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ et $\mathrm{g(L)} = 0 \Rightarrow AL = 0 \Rightarrow A = 0$
  Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.
- Si $\lambda < 0$, $g(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x)$

Comme le cas de l'équation des ondes on trouve avec $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}$

$$g(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

L'équation $f'(t) = c\lambda f(t)$ a pour solution :

$$f(t) = ke^{-c\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

A ce stade la fonction

$$u_n(t,x) = k_n e^{-c\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On peut donc écrire la solution $u(t,x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires :

$$\boldsymbol{u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n e^{-c\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients k_n pour que $u(t,x)$ vérifie la condition initiale . Cette condition initiale s'écrit

$$u(0,x) = \varphi(x)$$

Ce qui donne

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Ici, les k_n peuvent s'interpreter directement comme étant les coefficients de Fourier associée à la fonction $\varphi(x)$

$$k_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Equation de Laplace

La méthode de séparation des variables permet de résoudre l'équation de Laplace dans une région rectangulaire lorsque l'on impose une condition sur la solution sur chaque coté du rectangle.

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad pour \quad 0 < x < L, 0 < y < K$$
$$u(0,y) = u(L,y) = 0 \qquad pour \quad 0 < y < K$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad et \quad u(x,K) = \psi(x) \quad pour \quad 0 < x < L$$

Où $\varphi\ et\ \psi : [0,L] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Dans ce cas les conditions de compatibilités sont : $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(L) = \psi(L) = 0$

Séparons les variables : cherchons des solutions de l'équation de Laplace de la forme $u(x,y) = f(x).\, g(y)$, l'équation devient

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0$$

Et donc il y a une constante λ telle que

$$f''(x) - \lambda f(x) = g''(y) + \lambda g(y) = 0$$

La condition $u(0,y) = u(L,y) = 0$ donne $f(0) = f(L) = 0$

En résolvant l'équation

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \quad pour \qquad 0 < x < L$$

On obtient (cas $\lambda < 0$)

$$f(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x$$

pour le cas $\lambda \geq 0$, il n'existe pas de somutions non triviales

Pour $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, la solution de $g''(y) + \lambda g(y) = 0$ et

$$g(y) = Ae^{\frac{n\pi}{L}y} + Be^{-\frac{n\pi}{L}y}$$

Les solutions de l'équation de Laplace sont de la forme

$$u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi}{L}x\left[A_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\right]$$

Le principe de superposition des solutions permet d'écrire:

$$\boldsymbol{u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\left[A_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\right]}$$

On essaie de déterminer les constantes A_n et B_n afin de satisfaire la condition :
$u(x,0) = \varphi(x) \quad et \qquad u(x,K) = \psi(x)$ qui devient

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\,[A_n + B_n]$$

$$u(x,K) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\left[A_n e^{\frac{n\pi}{L}K} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}\right]$$

En utilisant les séries de Fourier, il suffit de choisir les coefficients A_n et B_n telles que

$$A_n + B_n = \alpha_n \ \text{ où } \alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$A_n e^{\frac{n\pi}{L}K} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L}K} = \beta_n \quad \text{où} \quad \beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

La solution de ce système est

$$A_n = \frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}} \quad et \quad B_n = \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L}K} - \beta_n}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}}$$

Résolution d'EDP en utilisant la transformée de Fourier

Etude de l'équation de diffusion (la chaleur)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad pour\ t > 0\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, on consirère la transformée de Fourier par rapport à la variable x seulement, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)(\alpha) = c\,\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)(\alpha)$$

En appliquant les propriétés de la transformée de Fourier de la dérivée, on obtient

$$\frac{d\hat{u}(\alpha,t)}{dt} = -c\alpha^2\hat{u}(\alpha,t)$$

On obtient donc une équation différentielle ordinaire dont la solution est

$$\hat{u}(\alpha,t) = ke^{-c\alpha^2 t}$$

Or

$$\hat{u}(\alpha,0) = k = \mathcal{F}\big(u(x,0)\big)(\alpha) = \mathcal{F}\big(\varphi(x)\big)(\alpha) = \hat{\varphi}(\alpha)$$

Donc

$$\hat{u}(\alpha,t) = \hat{\varphi}(\alpha)e^{-c\alpha^2 t}$$

Comme $\mathcal{F}\big((f * g)(x)\ \big)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f(x)\ )(\alpha).\mathcal{F}(g(x)\ )(\alpha)$, on peut poser

$$u(x,t) = f * g$$

Avec $f = \varphi(x)$ donnée et $\mathcal{F}(g(x)\ )(\alpha) = \hat{g}(\alpha) = e^{-c\alpha^2 t}$. On montre que

$\mathcal{F}\left(\frac{e^{-x^2/4a}}{\sqrt{2a}}\right)(\alpha) = e^{-a\alpha^2}$(exercice à faire) et donc avec $a = ct$

$$\hat{u}(\alpha,t) = \mathcal{F}\big(\varphi(x)\big)(\alpha).\mathcal{F}\left(\frac{e^{-x^2/4ct}}{\sqrt{2ct}}\right)(\alpha)$$

Le théorème de convolution permet d'écrire

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \varphi(x) * \frac{e^{-x^2/_{4ct}}}{\sqrt{2ct}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, \frac{e^{-(x-u)^2/_{4ct}}}{\sqrt{2ct}}\, du$$

Exercice: En ulilisant la méthode de la transformée de Fourier, trouver les solutions de l'équations des ondes et celle de Laplace.