TD sur les séries de Fourier

Exercice 1

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f telle que, sur $[-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$

En déduire les sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 2

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f impaire telle que, sur $[0, \pi]$,

$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

En déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 3

Calculer la série de Fourier de la fonction $2\,\pi -$ périodique définie sur $[0,2\pi]$ par:

$f(x) = x^2$

- Etudier la convergence de la série de Fourier associée à f
- Déduire la somme suivante: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$,

Exercice 4

Trouver les coefficients de Fourier de la fonction $2\,\pi -$ périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par: $f(x) = |\sin x|$

En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

Exercice 5

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\,\pi -$ périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$

1) Montrer que f est développable en série de Fourier
2) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f
3) Etudier la convergence de la série de Fourier de f
4) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$