**Corrigé des exercices (séries entières)**



1. **Transformée de Fourier de la dérivée**

Supposons que intégrable, dérivable et à dérivée intégrable. Sa dérivée possède alors une transformée de Fourier, donnée par

Une intégration par parties donne (sachant que )

A la dérivation de par rapport correspond donc la multiplication de par .

Plus généralement, pour la dérivée d’ordre m, on a :

1. **Dérivée de la transformée de Fourier**

soit en dérivant sous le signe somme :

Plus généralemnt, on a :



1. **Quelques propriétée de la transformée de Fourier**
2. **Propriété de linéarité**

L’intégration étant une opération linéaire, la transformée de Fourier l’est aussi, c'est-à-dire, et étant des scalaires, on a

En d’autre termes , la transformée dr Fourier commute avec l’addition et la multiplication par un scalaire.

1. **Translation**

Cherchons la transformée de Fourier de avec réel. En posant



Soit :



A la translation de correspond un déphasage de proportionnel à c'est-à-dire la transformée de Fourier de s’obtient en multipliant par le facteur de phase .

1. **Changement d’échelle (ou transformée de Fourier de l’homothétie)**

Changer l’unité pour la variable revient à multiplier celle-ci par une constante . En posant  , on obtient

Une compression del’échelle des entraine une dilatation de l’échelle des .

En terme plus physique, Une compression del’échelle des longueurs entraine une dilatation de l’échelle des nombres d’ondes. De même, une compression del’échelle des temps entraine une dilatation de l’échelle des pulsations.

1. **Modulation**

Inversemant, la transformée de Fourier de ( avec réel) est donnée par :

Soit :

A la modulation de correspond une translation de .

1. **Sinus et Cosinus-tranformée de Fourier**

Soit absolument intégrable sur l’ensemble des réels:

* On appelle **Sinus-transformée de Fourier de la fonction**  , la fonction définie par :



**Sa transformée inverse** ( dite inverse de sinus-transformée de Fourier ) est donnée par

* On appelle **Cosinus-transformée de Fourier de la fonction**  , la fonction définie par :

**Sa transformée inverse** ( dite inverse de cosinus-transformée de Fourier) est donnée par:



**Remarque**

* Si est une fonction paire alors
* Si est une fonction impaire alors
1. **Produit de Convolution**

**Définition :**

Soient f et g : deux fonctions intégrables sur . On appelle produit de convolution de par g, la fonction notée : définie par

* **Interpretation graphique de la convolution**

Considérons la convolution entre deux fonctions et

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface située sous la courbe pour un fixé. Le signal est simplement le signal de retourné par rapport à l’origine des pour donner puis translaté de .

* **Signification physique de la convolution**



Il s’agit de l’intégrale de recouvrement de deux fonctions de : d’une part , et

 qui représente la fonction dont on a inversé le sens de l’abscisse et décalé l’origine au point .

* **Transformée de Fourier et produit de convolution**

Le produit de convolution est commutatif ; et on a :

.

1. **Egalité de Parseval**

Soit admettant une transformée de Fourier . Alors on a :

**Application :**



Calculer la transformée de Fourier sinus de  ; en déduire les valeurs des intégrales : et .

**Solution:**

 , en utilisant double intégration par parties, on obtient

D’où

En posant dans cette dernière integrale on obtient:



En appliquant la formule de Parseval:

D’où :









