Transformée de Fourier (Suite)

Dr ZOUBIR . H

1) Transformée de Fourier de la dérivée

Supposons que $f(x)$ intégrable, dérivable et à dérivée intégrable. Sa dérivée f' possède alors une transformée de Fourier, donnée par

$$\mathcal{F}\big(f'(x)\big)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\alpha x} dx$$

Une intégration par parties donne (sachant que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$)

$$\mathcal{F}\big(f'(x)\big)(\alpha) = i\alpha\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\alpha) = i\alpha\hat{f}(\alpha)$$

A la dérivation de $f(x)$ par rapport x correspond donc la multiplication de $\hat{f}(\alpha)$ par α .

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre m, on a :

$$\mathcal{F}\left(f^{(m)}(x)\right)(\alpha) = (i\alpha)^m\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\alpha) = (i\alpha)^m\hat{f}(\alpha)$$

2) Dérivée de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}'\big(f(x)\big)(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\hat{f}(\alpha) = \widehat{f'(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x} dx$$

soit en dérivant sous le signe somme :

$$\mathcal{F}'\big(f(x)\big)(\alpha) = -i\mathcal{F}\big(xf(x)\big)(\alpha)$$

Plus généralemnt, on a :

$$\mathcal{F}^{(m)}\big(f(x)\big)(\alpha) = (-i)^m\mathcal{F}\big(xf(x)\big)(\alpha)$$

3) Quelques propriétée de la transformée de Fourier

1. Propriété de linéarité

L'intégration étant une opération linéaire, la transformée de Fourier l'est aussi, c'est-à-dire, λ et μ étant des scalaires, on a

$$\mathcal{F}\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)(\alpha) = \lambda\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\alpha) + \lambda\mathcal{F}\big(g(x)\big)(\alpha)$$

En d'autre termes , la transformée dr Fourier commute avec l'addition et la multiplication par un scalaire.

2. Translation

Cherchons la transformée de Fourier de $f(x-a)$ avec a réel. En posant $u = x - a$

$$\mathcal{F}\big(f(x-a)\big)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\, e^{-i\alpha x} dx = e^{-i\alpha a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} fu)\, e^{-i\alpha u} du$$

Soit :

$$\mathcal{F}\big(f(x-a)\big)(\alpha) = e^{-i\alpha a}\mathcal{F}(f(x))(\alpha) = e^{-i\alpha a}\hat{f}(\alpha)$$

A la translation de $f(x)$ correspond un déphasage de $\hat{f}(\alpha)$ proportionnel à α c'est-à-dire la transformée de Fourier de $f(x-a)$ s'obtient en multipliant $\hat{f}(\alpha)$ par le facteur de phase $e^{-i\alpha a}$.

3. **Changement d'échelle (ou transformée de Fourier de l'homothétie)**
   Changer l'unité pour la variable x revient à multiplier celle-ci par une constante $k \neq 0$. En posant $u = kx$, on obtient

$$\mathcal{F}(f(kx))(\alpha) = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\frac{i\alpha u}{k}} dx = \frac{1}{k}\mathcal{F}(f(x))\left(\frac{\alpha}{k}\right)$$

   Une compression del'échelle des x entraine une dilatation de l'échelle des α .
   <u>En terme plus physique</u>, Une compression del'échelle des longueurs entraine une dilatation de l'échelle des nombres d'ondes. De même, une compression del'échelle des temps entraine une dilatation de l'échelle des pulsations.
4. **Modulation**
   Inversemant, la transformée de Fourier de $e^{i\alpha_0 x}f(x)$ (avec $\alpha_0$réel) est donnée par :

$$\mathcal{F}\big(e^{i\alpha_0 x}f(x)\ \big)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i(\alpha-\alpha_0)x} dx$$

   Soit :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}(e^{i\alpha_0 x}f(x)\ )(\alpha) = \mathcal{F}(f(x)\ )(\alpha-\alpha_0)}$$

A la modulation de $f(x)$ correspond une translation de $\hat{f}(\alpha)$.

4) Sinus et Cosinus-tranformée de Fourier

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur l'ensemble des réels:

- On appelle <u>**Sinus-transformée de Fourier de la fonction f**</u> , la fonction définie par :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_S(f(x)\ )(\alpha) = \hat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\, dx}$$

<u>**Sa transformée inverse**</u> (dite inverse de sinus-transformée de Fourier) est donnée par

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\alpha)\sin(\alpha x)\, d\alpha}$$

- On appelle <u>**Cosinus-transformée de Fourier de la fonction f**</u> , la fonction définie par :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_S(f(x)\ )(\alpha) = \hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\, dx}$$

Sa transformée inverse (dite inverse de cosinus-transformée de Fourier) est donnée par:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\alpha) \cos(\alpha x)\, d\alpha}$$

Remarque

- Si f est une fonction paire alors $\boldsymbol{\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f(x))(\alpha) = \hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x)\, dx}$
- Si f est une fonction impaire alors $\boldsymbol{\hat{f}(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x)\, dx = -i\, \hat{f}_s(\alpha)}$

$$\boldsymbol{\hat{f}_s(\alpha) = i\hat{f}(\alpha)}$$

5) Produit de Convolution

Définition :

Soient f et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution de par g, la fonction notée $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u) du}$

- ✓ **Interpretation graphique de la convolution**

Considérons la convolution entre deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u) du$$

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface située sous la courbe $f(u)g(x-u)$ pour un x fixé. Le signal $g(x-u)$ est simplement le signal de $g(u)$ retourné par rapport à l'origine des x pour donner $g(-u)$ puis translaté de x.

- ✓ **Signification physique de la convolution**

Il s'agit de l'intégrale de recouvrement de deux fonctions de u : f d'une part , et $g(x-u) = g(-(u-x))$ qui représente la fonction g dont on a inversé le sens de l'abscisse et décalé l'origine au point x.

➢ Transformée de Fourier et produit de convolution

Le produit de convolution est commutatif ; et on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}\big((f * g)(x)\big)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f(x))(\alpha).\mathcal{F}(g(x))(\alpha)}.$$

6) Egalité de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admettant une transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$. Alors on a :

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f(x))(\alpha)|^2\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx}$$

Application :

Calculer la transformée de Fourier sinus de $f(t) = e^{-t},\ t \geq 0$; en déduire les valeurs des intégrales : $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin xt}{1+t^2} dt$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 dt.$

Solution:

$\hat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(\alpha t)\, dt$, en utilisant double intégration par parties, on obtient

$$\hat{f}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}$$

D'où

$$f(t) = e^{-t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\alpha) \sin(\alpha t)\, d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha t}{1+\alpha^2} d\alpha$$

En posant $t = x\ \ et\ \ \alpha = t$ dans cette dernière integrale on obtient:

$$I_1 = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

En appliquant la formule de Parseval:

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^2\, dt = \int_0^{+\infty} (e^{-t})^2\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\hat{f}_s(\alpha)\right)^2 d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 d\alpha$$

D'où :

$$I_2 = \frac{\pi}{4}$$