Objectifs de l'enseignement :

L'objectif final de ce cours est de doter les élèves ingénieurs de connaissances de base relatives aux techniques de mesure dans le cadre de toute expérimentation possible dans le domaine de l'ingénierie des systèmes énergétique. D'abord par l'exploration du domaine des incertitudes de mesures, leur traitement et la présentation du rapport des résultats, puis par la connaissance des capteurs et leur mise en œuvre dans le but de l'acquisition d'un signal et son traitement relatif à la mesure d'une grandeur donnée. Pour chaque type de capteur, il sera traité les différentes solutions existantes, leurs caractéristiques spécifiques et leur mise en œuvre pratique. Des exemples d'étude de cas peuvent être abordés en séance de démonstration.

Contenu de la matière:

Partie A : Les Incertitudes de mesure

1-Introduction :

1.1. Vocabulaire technique et définitions (mesurande, mesure, imperfections et incertitudes).

1.2. Caractéristiques métrologiques générales (justesse, fidélité, précision)

1.3. Type de mesure, causes d'erreurs (systématiques, aléatoires) , effets et corrections

1.4. Conditions d'acceptation d'un produit (plage d'incertitude, tolérance et conformité)

1.5. Considérations pratiques et problématique

2-Evaluation de l'incertitude-type :

2.1. Modélisation du mesurage et procédure de détermination

2.2. Evaluation de l'incertitude-type de type A

2.3. Evaluation de l'incertitude-type de type B

2.4. Lois d'usage courant et incertitudes-types

3-Détermination de l'incertitude-type composée :

3.1. Propagation des incertitudes et incertitude-type composée

3.2. Cas des grandeurs non corrélées

3.3. Cas des grandeurs corrélées

3.4. Exemples d'application

4-Détermination de l'incertitude élargie :

4.1. Notion d'élargissement et incertitude élargie

4.2. Choix du facteur d'élargissement.

5-Expression de l'incertitude et présentation du rapport des résultats :

5.1. Procédure générale

5.2. Exemples d'application

Partie B : Les capteurs

1-Généralités :

1.1. Définition et caractéristiques

1.2. Capteurs passifs et capteurs actifs

1.3. Corps d'épreuve

1.4. Grandeurs d'influence

1.5. Chaine de mesure

2-Caractéristiques métrologiques :

2.1. Etalonnage du capteur

2.2. Sensibilité, finesse et rapidité (temps de réponse)

2.3. Limites d'utilisation d'un capteur

3-Conditionneurs de capteurs passifs :

3.1. Caractéristiques générales

3.2. Les montages potentiométriques

3.3. Les ponts. 3.4. Les oscillateurs

3.5. Spectre de fréquence du signal de sortie

4-Conditionneurs du signal :

4.1. Adaptation de la source du signal

4.2. Linéarisation. 4.3. Amplification

4.4. Détection de l'information

5-Etude des différents types de capteurs

5.1. Les capteurs de température

5.2. Les capteurs de position et de déplacement

5.3. Les capteurs de déformation

5.4. Les capteurs tachymétriques

5.5. Les capteurs de force, pesage et couple

5.6. Les capteurs d'accélération, vibrations et chocs

5.7 Les capteurs de vitesse, débit et niveau des fluides

5.8 Les capteurs de pression des fluides

5.9 Les capteurs acoustiques

Partie A : Les incertitudes de mesure

1-Introduction :

Mesurer une grandeur, revient à rechercher une valeur de cette grandeur et lui associer une incertitude afin d'évaluer la qualité de la mesure (mesurage).

Lors d'une série de mesure d'une grandeur, les résultats varient lors de chaque mesure. Une telle variabilité des résultats obtenus peut s'expliquer de plusieurs raisons :

- ✓ La grandeur à mesurer n'est pas parfaitement définie,
- ✓ les conditions expérimentales (température, pression, …) évoluent,
- ✓ l'instrument de mesure est source d'erreur (temps de réponse, justesse, fidélité, sensibilité, …),
- ✓ l'opérateur ne refait jamais le même mesure dans les mêmes conditions (fatigue, erreur de parallaxe, …)
- ✓ le protocole de mesure n'est pas adapté, …

1.1.Vocabulaire

Mesurande (masculin)

(Métrologie) Grandeur que l'on cherche à mesurer.

Mesure (mesurage)

Le **mesurage** est l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement l'intervalle de valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur mesurée appelée **mesurande**. Le terme mesurage est préféré à celui de mesure, car le mot « mesure » a de nombreux sens dans la langue française.

La **valeur mesurée** est la valeur attribuée à la grandeur suite à un mesurage.

La **valeur vraie** est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue.

L'**erreur de mesure** est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie (INCONNUE) ou une valeur de référence.

Imperfections & incertitudes (deux concepts) : le concept d'erreur (écart par rapport à un étalon) et le concept d'incertitude (doute sur la mesure d'une grandeur à priori inconnue). Ces notions sont clairement définies par un vocabulaire précis mis au point par des commissions internationales… Ce Vocabulaire International de Métrologie ou VIM est la référence pour développer le sujet.

- **Erreurs**

Selon le sens générale du mot, une erreur est toujours en relation avec quelque chose de juste ou de vrai, ou qui est considéré comme tel. Il en est de même en physique.

<u>L'erreur absolue</u>

Par définition l'erreur absolue d'une grandeur mesurée est l'écart qui sépare la valeur expérimentale de la valeur que l'on a de bonne raison de considérer comme vraie. Prenons par exemple la vitesse de la lumière dans le vide. La valeur considérée actuellement comme vraie est : C_0 = 299 792 km/s

Si un expérimentateur trouve, lors d'une mesure, C= 305 000 km/s

on dit que l'erreur absolue de son résultat est :

$$\Delta c = \left| c - c_0 \right| = 5208 \left[\frac{km}{s} \right]$$

<u>L'erreur relative</u>

Par définition l'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue à la valeur vraie :

$$\textbf{Erreur relative :} \quad \frac{\Delta c}{c_0} = \frac{5208 \ [km/s]}{299\,792 \ [km/s]} = 0{,}0174 \simeq 1{,}7 \ \%$$

L'erreur relative n'a pas d'unité ; elle nous indique la qualité (l'exactitude) du résultat obtenu. Elle s'exprime généralement en % (pour cent).

On voit clairement qu'il n'est possible de parler d'erreur que si l'on a à disposition une valeur de référence que l'on peut considérer comme vraie.

- **Incertitudes**

Lors de la plupart des mesures physiques, on ne possède pas de valeur de référence, comme celle dont nous venons de parler. Lorsqu'on mesure la distance de deux points, ou l'intervalle de temps qui sépare deux événements, ou la masse d'un objet, on ne sait pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée. On ne dispose que de la valeur expérimentale. Néanmoins, par une critique objective des moyens utilisés pour faire la mesure, on peut se faire une idée de l'« erreur » maximale qu'on peut avoir commise, « erreur » que l'on appelle de façon plus appropriée incertitude.

L'incertitude absolue

L'indication complète du résultat d'une mesure physique comporte la valeur qu'on estime la plus probable et l'intervalle à l'intérieur duquel on est à peu près certain que se situe la vraie valeur. La valeur la plus probable est en général le centre de cet intervalle. La demi-longueur de celui-ci est appelée incertitude absolue de la mesure.

Ainsi, si l'on désigne par x la valeur la plus probable de la grandeur mesurée G, par x_0 la vraie valeur (qui nous est inconnue) et par Δx l'incertitude absolue, on a :

$$x - \Delta x \leq x_0 \leq x + \Delta x$$

Sous une forme condensée, le résultat de la mesure s'écrit :

$$G = x \pm \Delta x$$

Exemple1: La longueur d'un objet est de 153 $\pm$ 1 [mm]. Cela signifie qu'avec une incertitude absolue $\Delta L = 1$ [mm] , la valeur exacte est comprise entre 152 [mm] et 154 [mm].

Exemple2: La température d'un local est de 22 $\pm$ 1 [^{0}C]. Ici l'incertitude absolue $\Delta\theta = 1$ [^{0}C] , c'est-à-dire que l'on garantit que la température n'est pas inférieure à 21 [°C] ni supérieure à 23 [°C].

L'incertitude relative

L'incertitude absolue, lorsqu'elle est considérée seule, n'indique rien sur la qualité de la mesure. Pour juger de cette qualité, il faut comparer l'incertitude absolue à la grandeur mesurée. Le rapport de ces grandeurs est appelé **incertitude relative.**

$$\textbf{Incertitude relative :} \ \frac{\Delta x}{x}$$

Comme pour l'erreur relative, l'incertitude relative est un nombre pur (sans unité), pratiquement toujours beaucoup plus petit que 1, que l'on exprime généralement en % .

1.2. Caractéristiques métrologiques générales

Les principales caractéristiques des instruments de mesure (ou propriétés métrologiques des dispositifs de mesure) sont définies dans le cadre du Vocabulaire International de Métrologie (VIM) et comprennent, entre autres :

- ✓ l'étendue de mesure ;
- ✓ la résolution ;
- ✓ la sensibilité ;
- ✓ la justesse ;
- ✓ la fidélité.
- ✓ l'exactitude (Précision).

- **Étendue de mesure**

C'est le domaine de variation possible de la grandeur à mesurer. Elle est définie par une valeur minimale et une valeur maximale. Ces deux valeurs extrêmes s'appellent la portée minimale et la portée maximale.
Par exemple, un voltmètre peut avoir une étendue de mesure comprise entre 1 volt et 10 volts.

- **Résolution**

La résolution d'un appareil est la plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication délivrée par l'instrument. Elle peut être exprimée en points, qui sont alors le nombre de valeurs différentes que l'instrument peut afficher. Par exemple un multimètre de 2000 points pour une étendue de 2 V peut afficher toutes les valeurs comprises entre 0,000 V et 1,999 V, sa résolution est donc de 1 mV.
La résolution de l'instrument de mesure dépend de la taille des graduations, du type du vernier ou du nombre de digits de l'affichage. A l'incertitude due à la discrétisation des mesures peuvent s'ajouter d'autres facteurs. Il faudra se référer à la notice ou contacter le fabricant pour connaître au mieux la précision de votre appareil. On peut aussi effectuer un étalonnage avec un instrument de haute précision qui sert de référence.

- **Sensibilité**

La sensibilité est un paramètre exprimant la variation du signal de sortie d'un appareil de mesure en fonction de la variation du signal d'entrée.
Un appareil est d'autant plus sensible qu'une petite variation de la grandeur G à mesurer provoquera un changement plus grand de l'indication donnée par l'appareil de mesure.

Nota : si la valeur d'entrée est de même nature que la valeur de sortie, la sensibilité est appelée gain.

La sensibilité au voisinage d'une valeur donnée de la grandeur G à mesurer s'exprime de la manière suivante :

S= dI/dG ,

I: Indication donnée par l'essai

G: Quantité de grandeur à mesurer

Exemple: La largeur d'échelon d'un volucompteur est de 1 cm et la valeur de cet échelon est de 5 cl. Donc: S = 10 mm/ 5 cl = 2mm/5cl.

- **Exactitude de mesure**

Un instrument de mesure est d'autant plus exact que les résultats de mesure qu'il indique coïncident avec la « valeur vraie » (par définition théorique) que l'on cherche à mesurer. Il est à remarquer que l'exactitude ne s'exprime pas par une valeur chiffrée. C'est une appréciation qualitative des résultats.

L'exactitude est plus aisée à définir par l'erreur de mesure. Elle s'exprime en unité de grandeur (erreur absolue) ou en pourcentage (erreur relative).

En dehors des conditions opératoires, l'exactitude d'un appareil est essentiellement liée à deux types de caractéristiques : la justesse et la fidélité. Un appareil est exact s'il est à la fois juste et fidèle.

L'exactitude d'un appareil de mesure peut également être entachée par des causes extérieures : erreur opératoire, erreur provoquée par les grandeurs d'influences (température, pression etc), erreur de référence ou d'étalonnage, erreur d'hystérésis, erreur de finesse etc.

- **Justesse**

L'erreur de justesse est l'erreur globale résultant de toutes les causes pour chacun des résultats de mesure pris isolément. C'est donc l'aptitude de l'appareil à donner des résultats qui ne sont pas entachés d'erreur.

Dans le cas de mesures multiples c'est l'écart entre le résultat moyen et la valeur vraie.

La justesse est assurée par l'absence d'erreurs systématiques. Il peut exister un biais qui rend la mesure inexacte (même si la dispersion est faible). Erreurs de lecture, absence de contrôle et de corrections de facteurs influents, incertitude due à la modélisation, etc. Tous les biais doivent être identifiés et estimés afin d'être ajoutés à la dispersion, le système devient alors juste.

- **Fidélité**

La fidélité est l'aptitude d'un appareil de mesure à donner des mesures exemptes d'erreurs accidentelles. La fidélité (ou précision) définit la dispersion des résultats. Si on n'effectue qu'une seule mesure, la fidélité représente la probabilité qu'elle soit représentative du résultat moyen. Ce dernier aurait été obtenu en effectuant une infinité de mesures.

Nota : le résultat moyen étant lui-même entaché de l'erreur de justesse.

Si on effectue un ensemble de mesures d'une grandeur G, on obtient une valeur maximum (V_{max}) et une valeur minimum (V_{min}). Les erreurs limites de fidélité sont alors :

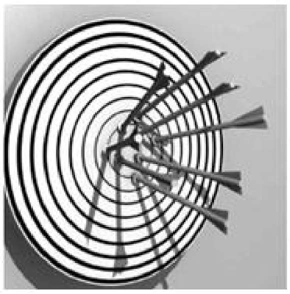
$$F_{max} = -\frac{V_{max} - V_{min}}{2} \qquad\qquad F_{min} = -\frac{V_{max} - V_{min}}{2}$$

<u>Exemple:</u> Des mesures répétées à l'aide d'un voltmètre donnent : U_{Max}=100.2 V U_{min}= 99.7 V

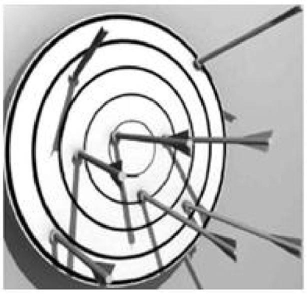
$$F = \pm\frac{100,2 - 99,7}{2} = \pm\frac{0,5}{2} = \pm 0,25\text{V}$$

La fidélité provient de la répétabilité et de la reproductibilité des mesures. Les valeurs d'un système fidèle sont peu dispersées. La dispersion peut provenir d'erreurs accidentelles ou d'un phénomène physique par essence aléatoire (comme par exemple la radioactivité). Les expérimentateurs par un travail propre, consciencieux et selon un protocole bien défini et réfléchi, pourront minimiser la dispersion. Les sources peuvent être innombrables, nous essaierons d'en identifier un maximum afin de les évaluer.

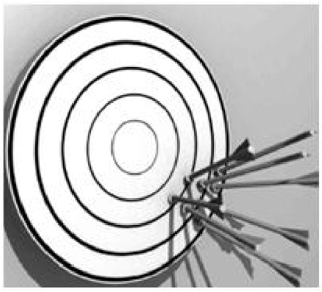
L'influence de ces différentes sources d'incertitude peut être illustrée par une cible et des flèches. Le centre de la cible correspond à la grandeur à mesurer et les flèches représentent les différentes mesures. Si les flèches, dans leur ensemble, ne sont pas correctement centrées, la justesse n'est pas assurée. Le resserrement des flèches représente la fidélité. La distance entre les cercles sur la cible indique la résolution. La valeur notée est celle du cercle dont la flèche est le plus proche. L'expérimentateur voit les flèches et les cercles, par contre il ne sait pas où est la cible et son centre. Il tient l'arc et son désir d'être au plus proche du centre de la cible montre la qualité et la rigueur de son travail.



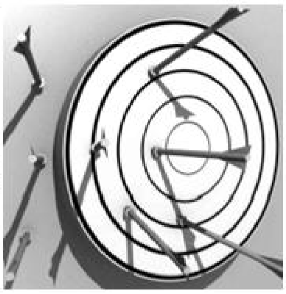
Mesure juste, fidèle et avec une bonne résolution



Mesure juste, mais peu fidèle et avec une faible résolution



Mesure peu dispersée mais avec un biais, et mal résolue



Mesure avec un biais, fortement dispersée et une faible résolution

1.2. Type de mesure

L'analyse des différents types de mesures en statistique consistent à déterminer la tendance d'un ensemble de données, la dispersion de cet ensemble ou la position d'une donnée dans l'ensemble.

Suite à une étude statistique, il est possible de se retrouver avec un ensemble de données assez imposant. Afin de bien analyser ces données, on peut se concentrer sur différentes mesures se rapportant soit à l'ensemble de données au complet par la tendance générale de celui-ci ou par l'étendue de celui-ci, soit à une donnée en particulier par la position de celle-ci dans l'ensemble. les mesures de tendance centrale, les mesures de dispersion, les mesures de position

- **Les mesures de tendance centrale**

Les mesures de tendance centrale décrivent une mesure statistique autour de laquelle se concentrent les données d'une distribution. Voici trois des mesures de tendance centrale les plus couramment utilisées:

- ✓ La moyenne
- ✓ Le mode
- ✓ La médiane

Nous pouvons simplement estimer une grandeur classique : par exemple, combien y-a-t-il de jours dans une semaine ? La réponse est sans ambiguïté. Par contre pour une grandeur statistique l'approche est plus subtile. Imaginons des étudiants qui font des expériences de calorimétrie pour mesurer la capacité thermique de l'eau1. Les différents groupes mesurent les valeurs suivantes : {5100; 4230; 3750; 4560; 3980} J/K/kg. Que vaut alors la capacité ? Nous donnerons dans cette partie une réponse à cette question. Elle sera de nature probabiliste.

Nous cherchons une caractéristique du centre de la distribution des observations {xi}. Il en existe plusieurs, **le mode**, par exemple, est facile à déterminer, il s'agit de la valeur la plus représentée (Exemples de distributions). Nous avons aussi **la médiane** qui correspond à la valeur qui sépare la distribution en deux parties égales. Mais la plus utilisée est **la moyenne** qui représente au mieux le centre d'une distribution :

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_i+\ldots+x_n}{n}$$

La moyenne indique le centre d'équilibre d'une distribution. Elle a l'avantage de tenir compte de toutes les données de la distribution.

Exemple1: Pour la capacité thermique de l'eau nous obtenons :

$$\bar{c}=\frac{5100+4230+3750+4560+3980}{5}=4324\ J/K/kg$$

Nous avons considéré la moyenne arithmétique. Nous aurions pu prendre la moyenne géométrique :

$$\bar{x}=\sqrt[n]{\prod x_i}$$

Par exemple, pour deux températures 20°C et 40°C, la moyenne géométrique est

$$\sqrt{20\,°C\cdot 40\,°C}\simeq 28{,}3\,°C$$

alors que la moyenne arithmétique est 30°C. Dans la pratique on constate que la moyenne arithmétique est mieux adaptée.

Le mode est la valeur ou la modalité la plus fréquente lorsque l'on compile des données, c'est celle qui revient le plus souvent dans la distribution. Il est possible d'avoir plus d'un mode dans une même distribution.

Exemple 1: On a la distribution suivante : 60, 65, 67, 70, 70,72, 78, 78, 78 , 84, 88, 88, 90, 95. 78 est le mode puisque ce nombre est répété 3 fois.

Exemple 2: On a l'ensemble de données suivant : 60, 65, 67, 70, 70, 72, 78, 78, 78, 84, 88, 88, 88,95. Dans ce cas-ci, la distribution contient deux modes : 78 et 88, puisque ces deux données sont les plus fréquentes (à égalité).

Exemple 3: Quel est le mode de la distribution ci dessous?

Nbr d'animaux	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**total**
Nbr de personnes	**12**	**17**	**10**	**6**	**3**	**48**

Le mode de cette distribution correspond à 1 animal car c'est cette valeur qui revient le plus souvent (17 fois).

*Exemple 4: (*Mode pour des données groupées en classes): Dans le cas d'une distribution dont les données sont groupées en classes (ou en intervalles), la classe ayant l'effectif le plus élevé porte le nom de classe modale. Le milieu de la classe modale donne une estimation de la valeur du mode. Pour écrire des classes, on utilise les crochets.

Classes d'âge	**[0,5[**	**[5,10[**	**[10,15[**	**[15,20[**	**total**
Nbr de personnes	**0**	**17**	**10**	**8**	**40**

Nombre de personnes âgées entre 0 et 20 ans qui suivent un cours de karaté dans le quartier
La classe [10, 15[inclus le 10, mais pas le 15. Une personne de 10 ans fait partie de cette classe, alors qu'une personne âgée de 15 ans fait plutôt partie de la classe [15, 20[. La classe modale est [5,10[, puisque c'est la classe qui regroupe le plus grand nombre de personnes, soit 17. On estime le mode en prenant le milieu de la classe modale, c'est-à-dire que le mode est 5+10/2 =7,5 ans.

La médiane est la mesure de tendance centrale qui indique le centre de la série de données. Elle permet de ne pas tenir compte de données aberrantes qui pourraient fausser les résultats si on les incluait dans le calcul de la moyenne. La médiane est donc la valeur qui sépare la distribution placée en ordre croissant en deux parties égales.
Note : Pour trouver la médiane d'une distribution statistique, il faut toujours classer les données en ordre croissant.

Si une série de statistique compte n données, alors la médiane sera la :

$$\textbf{rang de la médiane} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{e}} \text{ donnée.}$$

Deux cas peuvent survenir :

1. Si n est un nombre impair, alors $\frac{n+1}{2}$ sera un nombre entier et on pourra aller chercher directement la médiane. C'est la donnée du centre.

2. Si n est un nombre pair, alors $\frac{n+1}{2}$ sera un nombre décimal. On utilise alors comme médiane la moyenne des deux données centrales de la série de données.

- ✓ *Médiane dans une distribution ordonnée*

Calcul de la médiane lorsque la distribution contient un <u>nombre impair de données</u>

Si la liste est composée d'un nombre impair de données, la médiane sera le nombre placé au centre de la série de données.

<u>Exemple 1:</u>

Voici le nombre de kilomètres parcourus par jour par Victor lors de son voyage à vélo :

34, 185, 188, 192 , 196, 197, 201.

La médiane est 192, puisqu'il y a 3 données avant et 3 données après ce nombre.

En utilisant la formule de l'encadré précédent on trouve, avec $n = 7$:

$$\textbf{rang de la médiane} = \left(\frac{7+1}{2}\right)^{\text{e}} = 4^{\text{e}} \text{ donnée.}$$

En calculant la moyenne, le nombre de kilomètres parcourus chaque jour équivaut à 170 km. Cette réponse est peu représentative, puisque tous les jours sauf un, Victor a fait plus de 180 km. Le nombre 34 agit sur la moyenne en la diminuant. Dans ce cas-ci, la médiane permet de réduire son influence.

Calcul de la médiane lorsque la distribution contient <u>un nombre pair de données</u>

S'il y a un nombre pair de données dans la distribution, il faut faire la moyenne entre les deux données au centre de la liste.

<u>Exemple 2:</u>

Lors de son voyage, Victor est parti 8 jours plutôt que 7. Voici les kilomètres qu'il a parcourus chaque jour:

34, 185, 188, 192, 196 , 197, 199, 201.

Comme le nombre de données est pair, on doit faire la moyenne des deux données centrales (192 et 196) pour obtenir la valeur de la médiane.

$\frac{192+196}{2} = 194$ est la médiane de cette série de données.

En utilisant la formule pour trouver la position de la médiane, voici ce que l'on obtient en utilisant $n = 8$:

$$\textbf{rang de la médiane} = \left(\frac{8+1}{2}\right)^{\text{e}} = 4,5^{\text{e}} \text{ donnée.}$$

La $4,5^{\text{e}}$ donnée est donc obtenue en faisant la moyenne entre la 4^{e} donnée (192) et la 5^{e} donnée (196).

Pour ce deuxième exemple, la médiane est 194. Ici, la médiane ne fait pas partie de la distribution, mais elle est plus représentative que la moyenne pour la distribution en raison de la donnée aberrante.

- ✓ *Médiane dans une distribution condensées*

Pour une distribution de données condensées, la médiane est la valeur située au milieu de l'effectif.

<u>Exemple 3:</u>

Soit la distribution de données condensées suivante, quelle est la médiane ?

Valeur	Effectif
1	6
2	12
3	5
4	2
Total	25

1) On applique la formule pour trouver la position de la médiane.

$$\text{rang de la médiane} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{e}} = \left(\frac{25+1}{2}\right)^{\text{e}} = 13^{\text{e}} \text{ donnée}$$

Donc, la médiane est la 13^{e} donnée à partir du début de l'effectif.

2) On additionne les effectifs (effectif cumulé) à partir du début jusqu'à ce que l'on dépasse la valeur de la position de la médiane.

Valeur	Effectif	Effectif cumulé
1	6	6
2	12	18
3	5	23
4	2	25
Total	25	

Ici, la valeur de la médiane est de 2, car c'est dans cette modalité que l'on dépasse la valeur de la position de la médiane.

Exemple 4:

Soit la distribution de données suivante. Quelle est la médiane ?

Valeur	Effectif
1	9
2	16
3	19
4	6
Total	50

1) On applique la formule pour trouver la position de la médiane.

$$\text{rang de la médiane} = \left(\frac{50+1}{2}\right)^{\text{e}} = 25,5^{\text{e}} \text{ donnée}$$

Donc, la médiane correspond à la moyenne entre la 25$^{\text{e}}$ donnée et la 26$^{\text{e}}$ donnée.

2) On additionne les effectifs (effectif cumulé) à partir du début jusqu'à ce que l'on trouve où se situe les deux données recherchées.

Valeur	Effectif	Effectif cumulé
1	9	9
2	16	25
3	19	44
4	6	50
Total	50	

La 25$^{\text{e}}$ donnée vaut 2 et la 26$^{\text{e}}$ donnée vaut 3. La médiane sera donc la moyenne entre ce deux valeurs :

$$\frac{2+3}{2} = 2,5.$$

La médiane de cette distribution est donc 2,5.

- ✓ *Médiane dans une distribution DE données groupées en classes*

Pour une distribution de données groupées en classes, la classe comportant la médiane est appelée classe médiane. Le milieu de la classe médiane donne une estimation de la valeur de la médiane.

<u>*Exemple 1:*</u> Soit la distribution de données groupées en classes suivante, quelle est la médiane?

Soit la distribution de données groupées en classes suivante, quelle est la médiane ?

Classe	Effectif
[0,5[	32
[5,10[	28
[10,15[	41
[15,20[	23
Total	124

La médiane est située dans la classe correspondant à la donnée du centre.

1) On applique la formule pour trouver la position de la médiane.

$$\text{rang de la médiane} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{e}} = \left(\frac{124+1}{2}\right)^{\text{e}} = 62,5^{\text{e}} \text{ donnée}$$

Ce qui signifie que la médiane se situe entre la 62^e et la 63^e donnée à partir du haut.

2) On additionne les effectifs (effectif cumulé) à partir du début jusqu'à ce que l'on dépasse la valeur de la position de la médiane.

Classe	Effectif	Effectif cumulé
[0,5[	32	32
[5,10[	28	60
[10,15[	41	101
[15,20[	23	124
Total	124	

Ce n'est qu'à la classe [10,15[que l'effectif cumulé dépasse la valeur de la médiane. En effet, car la 62^e donnée et la 63^e donnée se trouvent toutes les deux dans cette classe. Donc, la classe médiane est [10,15[. Le milieu de la classe (12,5) représente une estimation de la médiane.

- **Les mesures de dispersion**

Les mesures de dispersion servent à caractériser l'étalement des valeurs présentes dans une distribution. Plus la distribution sera étalée, plus la valeur de la mesure de dispersion sera élevée.

- ✓ L'étendue
- ✓ L'étendue des quarts
- ✓ L'étendue interquartile
- ✓ L'écart moyen
- ✓ La variance
- ✓ L'écart type

L'**étendue**, habituellement notée E, est définie comme la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la distribution.

$$E = x_{\max} - x_{\min}$$

où x représente une donnée de la distribution.

*Procédure à appliquer pour déterminer l'étendue:

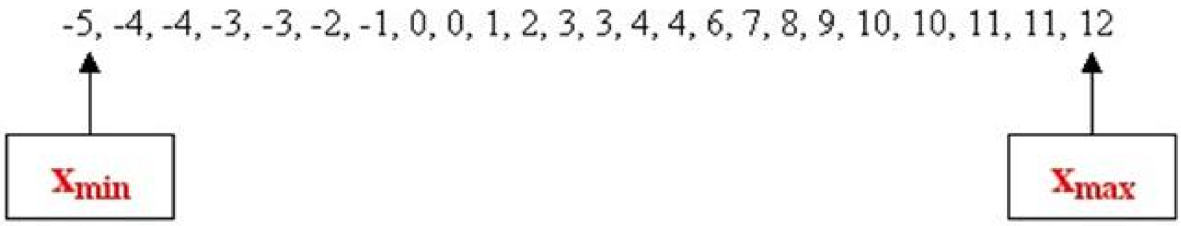
1. Placer les données de la distribution en ordre croissant.
2. Identifier la donnée ayant la plus grande valeur et celle ayant la plus petite valeur.
3. Calculer l'étendue en soustrayant ces deux valeurs.

Exemple 1:

Tout au long d'une journée de printemps, on mesure la température extérieure à chaque heure. On obtient la distribution suivante, dans laquelle toutes les valeurs sont en degrés Celsius (°C).

7,8,10,11,12,11,10,9,6,4,3,2,0,-1,-3,-4,-5,-4,-3,-2,0,1,2,3

On place les données en ordre croissant et on identifie les valeurs maximales et minimales de la distribution.



On calcule l'étendue : E=12–(−5)=17. L'étendue de cette distribution est de 17 °C.

L'étendue des quarts, notée EQ , est définie comme la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale d'un quart. L'étendue des quarts fait donc appel à la notion de quartile.

Formule:

$$E_{Q1} = Q_1 - x_{\min} \qquad E_{Q2} = Q_2 - Q_1$$

$$E_{Q3} = Q_3 - Q_2 \qquad E_{Q4} = x_{\max} - Q_3$$

E_Q représente l'étendue des quarts;
$x_{\min}$ représente la valeur minimum de la distribution;
$x_{\max}$ représente la valeur maximum de la distribution.

<u>*Procédure à appliquer pour déterminer l'étendue:</u>

1. Déterminer la valeur de chacun des quartiles de la distribution.

2. Calculer l'étendue du quart recherchée.

<u>*Exemple 1:*</u>

Calculer l'étendue du 1er quart de la distribution utilisée à l'exemple précédent. Les données sont en degrés Celsius.

-5,-4,-4,-3,-3,-2,-1,0,0,1,2,3,3,4,4,5,7,8,9,10,10,11,11,12.

Il va falloit calculer $E_{Q1} = Q_1 - x_{min}$

On doit trouve la médiane qui représente Q_2 avant de trouver Q_1.

On a 24 données.

$$\text{rang de } Q_2 = \frac{n+1}{2} = \frac{24+1}{2} = 12,5^{\text{e}}\text{donnée}$$

En partant de la valeur minimum, on trouve que Q_2 se situe entre 3 et 3 donc Q_2 est égal à 3 °C.

-5,-4,-4,-3,-3,-2,-1,0,0,1,2,3,3,4,4,5,7,8,9,10,10,11,11,12.

Q_1 est la médiane de la première moitié de la distribution qui contient 12 données

-5,-4,-4,-3,-3,-2,-1,0,0,1,2,3,3,4,4,5,7,8,9,10,10,11,11,12.

$$\text{rang de } Q_1 = \frac{n+1}{2} = \frac{12+1}{2} = 6,5^{\text{e}}\text{donnée}$$

-5,-4,-4,-3,-3,-2,-1,0,0,1,2,3,3,4,4,5,7,8,9,10,10,11,11,12.

Q_1 se retrouve entre la 6e et la 7e donnée donc entre -2 °C et -1 °C, ce qui donne -1,5 °C

x_{min} La valeur la plus basse de la distribution est de –5 °C.

On calcule l'étendue du premier quart : $E_{Q1} = -1,5°\text{C} - (-5°\text{C}) = 3,5°\text{C}$.

L'**étendue interquartile**, habituellement notée EI, est définie comme la différence entre le troisième quartile et le premier quartile. L'étendue interquartile fait donc appel à la notion de quartile.

Puisque chaque quartile sépare la distribution en quatre parties ayant environ le même nombre de données, l'étendue interquartile revient à calculer l'étendue de 50 % des données, celles qui sont les plus près de la médiane, de part et d'autre de celle-ci.

Formule:

$$EI = Q_3 - Q_1$$

<u>*Procédure à appliquer pour déterminer l'étendue interquartile:</u>

Déterminer la valeur de chacun des quartiles de la distribution.

Calculer l'étendue interquartile.

Calculer l'étendue interquartile de la distribution suivante. Les données sont déjà placées en ordre croissant.

-5, -4, -4, -3, -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12.

On détermine la valeur de chacun des quartiles. Pour ce faire, on trouve d'abord la médiane. Ici, on a 24 données, ce qui est un nombre pair. La médiane sera donc égale à la moyenne des 12^{e} et 13^{e} données. Dans ce cas, ces deux données sont égales à 3. La médiane vaut donc 3 °C.

On cherche maintenant les valeurs des premiers et troisièmes quartiles. Cela revient à chercher la médiane des 12 premières données (premier quartile) et des 12 dernières données (troisième quartile). La valeur du premier quartile est égale à −1,5 °C alors que celle du troisième quartile est égale à 8.5 °C.

On calcule l'étendue interquartile : ***EI*=8,5 ∘ C–(−1,5 ∘ C)=10 ∘ C**. L'étendue interquartile de cette distribution est de 10 °C.

L'écart moyen, habituellement noté EM, est défini comme la moyenne des écarts à la moyenne des valeurs de la distribution.

L'écart moyen peut se calculer peu importe si la distribution étudiée est une population complète ou est un échantillon de cette population. De plus, on peut le calculer pour des données non regroupées, condensées ou regroupées en classes.

$$EM = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n}$$

<u>*Procédure à appliquer pour déterminer l'écart moyen:</u>

1. Déterminer si les données proviennent d'un échantillon ou d'une population. Si ce n'est pas spécifié, on considère que c'est un échantillon.

2. Déterminer si les données sont regroupées, condensées ou regroupées par classes.

3. Déterminer la taille de la distribution.

4. Calculer la moyenne de la distribution.

5. Calculer tous les écarts à la moyenne.

6. Calculer l'écart moyen.

Exemple 1:

Calculer l'écart moyen de la distribution utilisée dans les exemples précédents. La distribution a été placée en ordre croissant. Les valeurs sont en degrés Celsius.

-5, -4, -4, -3, -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12.

Cette distribution est un échantillon et contient des données non groupées. Elle contient 24 données. Sa moyenne est environ $3,29°\mathrm{C}$ (ceci est $\overline{x}$. Voici le calcul des écarts à la moyenne.

x_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	x_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
-5	8,29	3	0,29
-4	7,29	4	0,71
-4	7,29	4	0,71
-3	6,29	6	2,71
-3	6,29	7	3,71
-2	5,29	8	4,71
-1	4,29	9	5,71
0	3,29	10	6,71
0	3,29	10	6,71
1	2,29	11	7,71
2	1,29	11	7,71
3	0,29	12	8,71

Pour calculer l'écart moyen, il reste à faire la somme de la colonne de droite du tableau précédent et à diviser ce résultat par 24 (il y a 24 données).

EM=111,5824 ≈4,65 ∘ C . L'écart moyen de cette distribution est donc d'environ 4,65 degrés Celcius.

La variance, habituellement notée s^2 ou σ^2 est définie comme la moyenne du carré des écarts (positifs ou négatifs) à la moyenne des valeurs de la distribution. Le calcul de la variance est nécessaire pour calculer l'écart type.

La variance peut se calculer peu importe si la distribution étudiée est une population complète ou est un échantillon de cette population.

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} \text{ ou } \sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}$$

$\sum$ est la lettre grecque sigma majuscule, ce symbole signifie qu'il faut effectuer une somme.

x_i représente la i^e valeur de la distribution.

$\overline{x}$ représente la moyenne de l'échantillon et μ représente la moyenne d'une population.

n représente la taille de l'échantillon et N la taille de la population.

Note : si on travaille avec un échantillon on utilise la formule pour s^2 alors que si on travaille avec une population on utilise la formule pour σ^2.

*Procédure à appliquer pour déterminer la variance

1. Déterminer si les données constituent un échantillon ou une population.
2. Déterminer la taille de la distribution (n ou N).
3. Calculer la moyenne de la distribution ($\overline{x}$ ou μ).
4. Calculer le carré de tous les écarts (positifs ou négatifs) à la moyenne.
5. Calculer la variance (s^2 ou σ^2).

Calculer la variance de la distribution utilisée dans les exemples précédents. La distribution a été placée en ordre croissant. Les valeurs sont en degrés Celsius.

-5, -4, -4, -3, -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12.

Cette distribution est un échantillon et contient des données non groupées. Elle contient 24 données. Sa moyenne est $\overline{x} \approx 3,29°\mathrm{C}$. Voici le calcul du carré des écarts à la moyenne.

x_i	$(x_i - \overline{x})^2$
-5	68,72
-4	53,14
-4	53,14
-3	39,56
-3	39,56
-2	27,98
-1	18,40
0	10,82
0	10,82
1	5,24
2	1,66
3	0,08
3	0,08
4	0,50
4	0,50
6	7,34
7	13,76
8	22,18
9	32,60
10	45,02
10	45,02
11	59,44
11	59,44
12	75,86

Pour calculer la variance, il reste à faire la somme de la colonne de droite du tableau précédent et à diviser ce résultat par 23 (car il faut diviser par $n-1$ puisque nous travaillons avec un échantillon), comme on a 24 données.

$$s^2 = \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{690,86}{23} \approx 30,04$$

Ainsi, la variance est d'environ $30,04°\mathrm{C}^2$.

L'écart type, habituellement noté s lorsqu'on étudie un échantillon et σ lorsqu'on étudie une population, est défini comme la racine carrée de la moyenne du carré des écarts à la moyenne des valeurs de la distribution.

L'écart type est la racine carrée de la variance

L'écart type est donc la racine carrée de la variance. Par conséquent, tout comme la variance, l'écart-type peut se calculer peu importe si la distribution étudiée est une population complète ou est un échantillon de cette population.

Exercice

Soient les âges des étudiants d'une classe {18; 20; 18; 19; 18; 18; 18; 17; 18; 19; 17; 19; 17; 21; 18}.

Déterminez le mode, la médiane, la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, l'étendue, l'écart-type, et l'écart moyen.

R: n=15; mode=18; médiane=18; moyenne=18,333; moy. géométrique=18,303; étendue=4; écart-type=1,113; écart moyen=0,844.

1.3. Causes d’erreurs (aléatoires, systématiques) , effets et corrections

Deux types d’erreurs peuvent apparaître. Elles peuvent très souvent être combinées l’une à l’autre ce qui rend l’analyse des données délicate.

1.3.1. Les erreurs aléatoires : défauts de fidélité

Considérons toujours notre grandeur C à mesurer. Sa mesure a été effectuée un grand nombre de fois, dans des conditions apparemment identiques avec des mesures indépendantes les unes des autres. Malgré ces précautions, on constate que l'on aboutit à des résultats différents les uns des autres : les résultats sont dispersés.

Pour réduire (limiter l’impact) l’erreur aléatoire, il faut augmenter le nombre d’observations.

Les défauts de fidélité se manifestent par la non-répétabilité des résultats. De nombreuses causes sont responsables de ces erreurs qui jouent aléatoirement dans un sens ou dans un autre : manque de fidélité de l'instrument.

Exemples d’erreurs aléatoires

- ✓ Les erreurs de lecture des graduations d'un microscope de mesure en raison d'une netteté insuffisante de ces dernières.
- ✓ des erreurs de positionnement d'un palpeur sur l'objet à mesurer au cours d'une série de mesures.
- ✓ Influence de vibrations mécaniques sur l'instrument de mesure.

1.3.2. L’erreur systématique: défauts d'exactitude ou de justesse

Le résultat obtenu prend toujours la même valeur mais ce n'est pas la valeur attendue : un décalage systématique apparaît.

La caractéristique de ces défauts est d'agir toujours dans le même sens sur le résultat de la mesure, le faussant systématiquement par excès ou par défaut. On dit que ces défauts introduisent des erreurs systématiques.

Il existe de nombreuses sources d'erreurs « systématiques »:

- ✓ effet des grandeurs d'influences (température, pression, ….),
- ✓ erreur de justesse de l'instrument de mesure (instrument décalibré),
- ✓ perturbation due à la présence d'instrument d'observation,

Il est important de détecter et de corriger une erreur systématique. Pour cela on peut :

- ✓ mesurer la même grandeur avec des instruments différents,
- ✓ mesurer la même grandeur avec des méthodes différentes,
- ✓ mesurer une grandeur étalon (contrôle de justesse de l'instrument),

Exemples d'erreurs systématique

Une mesure de longueur effectuée à la température de 25°C au lieu de la température de référence de 20°C; cela produit une erreur systématique à la suite de la dilatation thermique de l'objet.

1.4. Conditions d'acceptation d'un produit (Plage d'incertitude et tolerance).

On peut utiliser 4catégories dans lesquelles on peut puiser :

1. Qualité des produits : aptitude à l'emploi ; exactitude des caractéristisques ; précision des relevés ; respect du cahier des charges ; cohérence ; adéquation ; conformité ; esthétique ; tolérances sur l'état de surface ; degré de propreté ; etc. ;. ;

2. Temps : rapidité d'exécution ; respect des normes sur les dessins et schémas ; etc. ;

3. Processus : adéquation du choix des méthodes ; adéquation du choix des moyens ; adéquation du choix des outils ; adéquation du choix des instruments de contrôle ; adéquation du choix des opérations ; adéquation du choix des réglages ; respect des règles de sécurité ; pertinence de la disposition du matériel ; pertinence de la disposition des pièces ; rigueur ; etc

4. Définitions et normes techniques : adéquation entre la définition et son application ; respect des normes sur les dessins et schémas.

1.5. Comment évaluer l'incertitude d'un mesurage ?

L'incertitude de mesure d'une grandeur M, est un paramètre positif qui permet de définir un intervalle de valeurs « probables » de la grandeur M dans lequel on a 95% de chance de trouver la « valeur vraie ». On parle d'intervalle de confiance à 95%.

La qualité d'une mesure sera d'autant meilleure que l'incertitude associée sera petite.

Evaluation de l'incertitude d'un mesurage :

Il existe deux types d'évaluation de l'incertitude d'une grandeur :

- ✓ L'évaluation de type A, qui consiste en un traitement statistique des valeurs mesurées, et qui estime exclusivement l'erreur aléatoire.
- ✓ L'évaluation de type B, est évalué par un jugement fondé sur des lois de probabilité. Elle est réalisée lorsqu'une évaluation de type A n'est pas possible.

1.5.1. Evaluation de type A d'une incertitude (à partir de N mesures)

On suppose que l'on a effectué N mesures $x_1, x_2, ..., x_N$ de la même grandeur x en utilisant les mêmes méthodes des conditions de répétabilité.

L'incertitude de répétabilité est évaluée de façon statistique (type A) dans le cas où les N mesures ont été effectuées dans les mêmes conditions expérimentales (même opérateur, même matériel, …)

Valeur moyenne

La meilleure estimation de la valeur vraie X , notée $\bar{X}$, obtenue à partir des N mesures $x_1, x_2, ..., x_N$ est la moyenne de ces mesures :

$$\boxed{\text{meilleure estimation de } X = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}}$$

Ecart-type (ou deviation standard)

L'incertitude moyenne des mesures individuelles est donnée par l'écart-type :

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}}$$

σ_X est le paramètre qui caractérise la dispersion des valeurs prises par X et caractérise l'incertitude sur **une** mesure.

Ecart-type (ou deviation standard) de la moyenne

L'incertitude type sur notre meilleure estimation de la valeur vraie X , notée $\bar{X}$, est donné par :

$$\text{incertitude type sur } \bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

L'incertitude type qui lui est associée est définie par la relation : $\boldsymbol{u(X)} = \sigma x \,/\sqrt{N}$

<u>Remarques et compléments</u>

- Si d'une façon ou d'une autre, vous arrivez à évaluer les incertitudes systématiques δx_{syst} , une expression raisonnable (mais pas justifiée de façon rigoureuse) pour l'incertitude totale δx est la somme quadratique de l'incertitude aléatoire $\delta x_{aléa} = \sigma x\,/\sqrt{N}$ et de l'incertitude systématique δx_{syst}:

$$\delta x = \sqrt{\left(\delta x_{aléa}\right)^2 + \left(\delta x_{syst}\right)^2}$$

Si l'on ne dispose pas du temps nécessaire pour faire une série de mesures afin d'évaluer les incertitudes par des méthodes statistiques (pour ce qui concerne les erreurs aléatoires), on estime δx à partir des spécifications des appareils de mesures et des conditions expérimentales. On parle alors d'évaluation de type B de l'incertitude.

<u>*Exemple :*</u> On effectue 20 mesures du diamètre d'un cylindre à l'aide d'un pied à coulisse et on obtient $\sigma_{(X)}$ = 0,018 mm

Si l'on effectue l'évaluation de l'incertitude à partir de ces 20 observations, l'incertitude-type retenue sur la moyenne de ces 20 observations sera u(x) =0 018 $/\sqrt{20}$mm

Si on estime que cette évaluation, 0,018 mm, représente convenablement l'écart-type de la dispersion d'une mesure de ce cylindre autour de sa moyenne, on peut prendre $\sigma_{(X)}$ = 0,018 mm comme l'écart type expérimental d'une mesure établie à l'aide du même type d'instrument. C'est cette valeur qui sera utilisée pour une nouvelle mesure.

L'incertitude-type sur une mesure sera alors u(x) = 0,018 mm

L'incertitude-type sur la moyenne de trois mesures ultérieures sera alors u(x) =0 018 / $\sqrt{3}$ mm

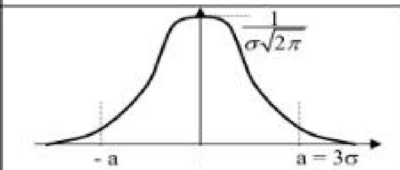
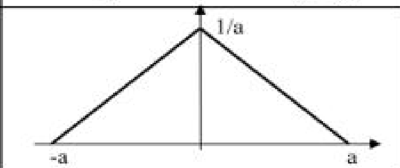
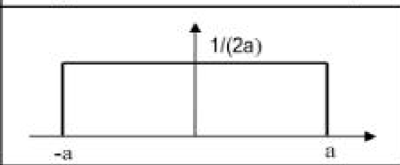
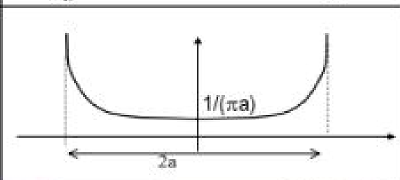
1.5.2. Evaluation de type B (à partir d'une mesure unique)

La détermination de la loi de l'erreur est liée à la maîtrise du processus de mesure et à l'expérience de l'opérateur ; elle dépend d'un ensemble d'informations qui peuvent être :
des résultats de mesures antérieures ;

- ✓ l'expérience ou la connaissance du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés ;
- ✓ de facteurs d'influence (température, pression,.....) ;
- ✓ des spécifications du fabricant ;
- ✓ les données fournies par des certificats d'étalonnage ou autres ;
- ✓ l'incertitude assignée à des valeurs de référence et donnée avec ces valeurs.

Détermination d'incertitudes de type B

Cas d'une mesure directe : (mesure de la longueur d'un objet, de la masse d'un objet, …)
Lorsqu'une mesure ne peut pas être reproduite plusieurs fois, il est impossible l'évaluer une incertitude par un traitement statistique. Il faut alors repérer les différentes sources d'erreurs liées au processus de mesure.

loi	Fonction de distribution	u(x)	utilisation
normale		$a/3$	Erreur dépendant d'un nombre important de paramètre, de faible effet individuel.
triangulaire		$a/\sqrt{6}$	Erreur comprise entre deux limites avec faible probabilité d' atteindre ces limites
uniforme		$a/\sqrt{3}$	Résolution d'un indicateur numérique - Hystérésis Instrument vérifié conforme à une classe
dérivée arc sinus		$a/\sqrt{2}$	Grandeur d'influence variant de façon sensiblement sinusoï-dale entre deux extremums (ex : température régulée)

Dans le cas de la loi de probabilité uniforme :

Type d'erreur	Incertitude associée
Cas d'une lecture simple sur une règle graduée [1]	$u_B = \frac{d/2}{\sqrt{3}} = \frac{d}{\sqrt{12}}$
Cas d'une double lecture sur une règle graduée [1]	$u_B = \sqrt{2}\times\frac{d/2}{\sqrt{3}}$
Cas d'une mesure obtenue à l'aide d'un instrument dont la tolérance ou la précision est donnée par le constructeur[2] (cas d'un teslamètre, d'une pipette jaugée, d'une fiole jaugée, ...)	$u_B = \frac{t}{\sqrt{3}}$
Exemple : Appareil numérique (ampèremètre, voltmètre, ...) =>	$u_B = \frac{précision}{\sqrt{3}} = \frac{(x\%+n\times digit)}{\sqrt{3}}$
Cas où on évalue un Ecart Maximal Toléré (EMT) (Ajustage à plus ou moins une goutte, soit ± 0,050 mL, d'où EMT=0,050 mL)	$u_B = \frac{EMT}{\sqrt{3}}$
Cas d'une burette graduée [1] et [2]	$u_B = \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\times\frac{d/2}{\sqrt{3}}\right)^2}$ [3]

[1] d correspond à la plus petite graduation de l'instrument de mesure

[2] t correspond à la tolérance de l'instrument de mesure

[3] Pour une même grandeur, les incertitudes types se composent de manière quadratique :

$$u(M)^2 = u^2(M)_{ER1} + u^2(M)_{ER2} + \ldots$$

1.5.3. Recommandations pratiques

a) Choix des composantes de l'incertitude

Dans la pratique il existe de nombreuses sources possibles d'incertitude dans un mesurage, telle que :

- ✓ la définition incomplète du mesurande ;
- ✓ un échantillonnage non représentatif ;
- ✓ une connaissance insuffisante ou un mesurage imparfait des conditions d'environnement ;
- ✓ un biais (dû à l'observateur) dans la lecture des instruments analogiques ;
- ✓ la résolution de l'instrument ;
- ✓ des valeurs inexactes des étalons et matériaux de référence ;

- ✓ des valeurs inexactes des constantes et paramètres retenus (obtenus par des sources extérieures par exemple) ;
- ✓ des approximations dans la méthode de calcul des incertitudes ou dans le processus de mesure.

Ces sources ne sont pas nécessairement indépendantes, et certaines contribuent aux variations entre les observations répétées du mesurande dans des conditions identiques.

Il est important de ne pas compter deux fois les mêmes composantes de l'incertitude. Si une composante de l'incertitude provenant d'un effet particulier est obtenue par une évaluation de type B, elle ne doit être introduite comme composante indépendante dans le calcul de l'incertitude finale du résultat de mesure que dans la limite où l'effet ne contribue pas à la variabilité des observations répétées.

Par exemple, la résolution d'un instrument de mesure, de sensibilité adaptée au mesurage, contribue à la variabilité des observations répétées, par la précision des résultats obtenus. Par contre une erreur éventuelle de justesse de cet instrument n'y contribue pas.

b) Incertitude-type sur une grandeur

Le mesurage d'une grandeur Y peut être modélisé par $Y = y_0 + E_1 + E_2 .... + E_n$ où les variables E_1, E_2 .... , E_n représentent les différentes composantes indépendantes de l'erreur.

Un résultat statistique montre que

$$u^2(Y) = u^2(E_1) + u^2(E_2) + \ldots u^2(E_n)$$

Par exemple : Plaçons nous dans le cas où Y représente le mesurage d'une pièce dans des conditions d'environnement contrôlées. On suppose qu'on effectue une série d'observations à l'aide d'un instrument de mesure et que les composantes retenues de l'erreur amènent au calcul de :

- u_A , incertitude-type déterminée statistiquement sur la série des observations ;
- u_B incertitude-type déterminée sur la justesse de l'instrument de mesure.

Alors l'incertitude retenue sur la grandeur Y est :

$$u^2(Y) = u_A^{\ 2} + u_B^{\ 2}$$

Dans l'exemple « fond de rainure » traité, si les mesures de longueurs sont effectuées à l'aide d'un pied à coulisse au 1/100 dont l'erreur de justesse maximale est de 30µm, alors l'incertitude sur une mesure de L_1 est :

- $u_A = 0{,}00816$ mm et
- $u_B = \dfrac{0{,}030}{\sqrt{3}}$ mm (instrument vérifié)

On a alors

$$u^2(L_1) = {u_A}^2 + {u_B}^2 = 0{,}00036658\ldots\text{mm et on en déduit que } u(L_1) = 0{,}0190\ldots\text{mm}$$

Remarque :

L'instrument de mesure est adapté au mesurage, les erreurs attachées à la résolution de l'instrument sont prises en compte dans la variabilité des résultats des mesures.

Sinon il faudrait prendre en compte l'erreur attachée à la résolution de l'instrument de mesure. Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer des mesures prises avec un instrument peu précis (comme par exemple un mètre de charpentier) ; toutes les valeurs seraient identiques et l'écart-type de répétabilité égal à zéro !

Des exemples d' incertitude-type B:

Résolution d'un indicateur

La résolution de l'afficheur numérique d'un instrument de mesure est source d'incertitude.

Si b est la résolution de l'appareil, la valeur de la grandeur se situe à l'intérieur de l'intervalle *[-b/2, + b/2]* avec une probabilité constante dans tout l'intervalle. Il s'agit d'une loi de probabilité rectangle et, dans ce cas, l'incertitude type a pour valeur :

$$u(x) = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

Appareil vérifié

Si l'on dispose d'un appareil qui a été vérifié et qui est conforme à une classe, cette classe est définie par une limite $\pm\alpha$ et elle obéit à une loi rectangle. L'incertitude type a pour valeur :

$$u(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

3. Incertitude-type composée

En général pour déterminer l'incertitude de mesure associée à un résultat, il faut décrire le processus de mesure et déterminer le modèle mathématique qui relie la valeur mesurée y du mesurande Y aux différentes grandeurs qui interviennent dans le processus :

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$$

où les X_i sont des grandeurs mesurées, des corrections d'erreurs systématiques, des constantes physiques, des grandeurs d'influence estimées,....
On connait les lois de répartition des erreurs sur chacune des grandeurs X_i et donc l'incertitude-type $u(x_i)$ sur chacune de ces grandeurs. L'objet de ce paragraphe est de déterminer l'écart-type sur la variable Y qui représentera l'incertitude-type sur Y, appelée incertitude-type composée de Y et notée $u_c(y)$

3. 1. Détermination de l'incertitude-type composée

Lorsque l'on a établi le modèle et que l'on a évalué les incertitudes types des grandeurs d'entrée, la loi de propagation de l'incertitude nous permet de calculer l'incertitude composée du mesurande *Y* : $u_c(Y)$ ou plutôt sa variance $u_c^2(Y)$

$$u_c^2(Y) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial X_i}\right]^2 u^2(X_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}\,u(X_i, X_j)$$

$$u_c^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} C_i^2 u^2(X_i)$$

Les coefficients de sensibilité C_i sont les dérivées partielles évaluées à x_i.

Cas d'un modèle linéaire où les grandeurs d'entrée sont indépendantes

Pour un modèle comportant uniquement des additions ou des soustractions de quantités indépendantes entre elles de type :

$$Y = h(X_1 + X_2 + ...)$$

où h est une constante.

Alors, l'incertitude type composée s'écrit :

$$u_c^2(Y) = h^2(u^2(X_1) + u^2(X_2) + ...)$$

Exemple : modèle sous la forme y = m.(p-q+r)

Les valeurs sont m = 1 ; p = 5,02 ; q = 6,45 ; et r = 9,04 avec des incertitudes types u(p) = 0,13 ; u(q) = 0,05 et u(r) = 0,22 :

$$y = 5{,}02 - 6{,}45 + 9{,}04 = 7{,}61$$

$$u(y) = 1 \times \sqrt{0{,}13^2 + 0{,}05^2 + 0{,}22^2} = 0{,}26$$

Cas d'un modèle produit ou quotient où les grandeurs d'entrée sont indépendantes

Pour un modèle comportant uniquement des produits ou des quotients de quantités indépendantes entre elles de type :

$$Y = h(X_1 X_2 ...)$$

où h est une constante.

Ce type de modèle se rencontre fréquemment en chimie analytique ; il est intéressant dans ce cas d'exprimer l'incertitude type composée sous forme d'écart type relatif :

$$\frac{u_c^2(Y)}{Y^2} = h^2\left(\frac{u^2(X_1)}{X_1^2} + \frac{u^2(X_2)}{X_2^2} + ...\right)$$

Exemple : modèle sous la forme y = (op/qr)

Les valeurs sont o = 2,46 ; p = 4,32 ; q = 6,38 ; et r = 2,99 avec des incertitudes types u(o) = 0,02 ; u(p) = 0,13 ; u(q) = 0,11 et u(r) = 0,07

$$y = (2{,}46 \times 4{,}32) / (6{,}38 \times 2{,}99) = 0{,}56$$

$$u(y)=0{,}56\times\sqrt{\left(\frac{0{,}02}{2{,}46}\right)^2+\left(\frac{0{,}13}{4{,}32}\right)^2+\left(\frac{0{,}11}{6{,}38}\right)^2+\left(\frac{0{,}07}{2{,}99}\right)^2}=0{,}024$$

Remarque

Les soustractions sont traitées de façon identique aux additions, de même les divisions sont traitées de façon identique aux multiplications.

Cas où toutes les grandeurs d'entrée ne sont pas indépendantes

Dans le cas où les termes de covariance ne sont plus nuls, la covariance $u(x_i, x_j)$ peut être estimée selon trois méthodes :

- **En estimant un coefficient de corrélation $r(X_i, X_j)$**

$$u_c^2(X_i, X_j)=u(X_i)u(X_i)r(X_i, X_j)$$

Une solution pratique est de faire varier le coefficient de corrélation r pour les valeurs extrêmes : -1, 0, +1 et d'observer les valeurs d'incertitude sur y, et par souci de sécurité et de prudence de retenir la valeur d'incertitude la plus élevée. On peut aussi en se fondant sur des raisonnements physiques évaluer r, mais cela demande une très grande expérience.

- **En calculant les termes de covariance**

Si nous avons deux grandeurs d'entrée corrélées X_i et X_j, qui sont estimées par leur moyenne, déterminées à partir de n paires indépendantes d'observations simultanées répétées.

$$u(X_i, X_j)=s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(X_{i,k}-\overline{X}_i)(X_{j,k}-\overline{X}_j)$$

- **En examinant les termes communs à deux grandeurs d'entrée**

Supposons que les grandeurs d'entrée X_i et X_j dépendent d'un ensemble de variables non corrélées $Q_1, Q_2, \ldots, Q_L$ de telle manière que $X_i=F(Q_1, Q_2, \ldots, Q_L)$ et $X_j=G(Q_1, Q_2, \ldots, Q_L)$ avec certaines variables pouvant apparaître seulement dans l'une ou l'autre des fonctions. La covariance peut se calculer par :

$$u(X_i, X_j)=\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}u^2(q_k)$$

Cas où toutes les grandeurs d'entrée sont corrélées positivement deux à deux

Dans ce cas, les termes de covariance sont égaux à + 1. L'écriture de la loi de propagation se simplifie et s'écrit :

$$u_c^2(Y)=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial X_i}u\ (X_i)\right]^2$$

Alors le carré de l'incertitude type composée $u_c^2(Y)$ s'écrit comme le carré de la somme des incertitudes types pondérées par leur coefficient de sensibilité C_i .

En posant :

$$C_i=\frac{\partial f}{\partial X_i}$$

$$u_c^2(Y)=\left[\sum_{i=1}^{N}c_i u\ (X_i)\right]^2$$

4. Notion d'incertitude élargie

4.1. Incertitude élargie

Bien que l'incertitude composée $u_c(Y)$ du mesurande Y puisse être utilisée pour exprimer l'incertitude d'un résultat de mesure, il est souvent nécessaire de donner un intervalle à l'intérieur duquel on puisse espérer voir se situer **une large fraction** de la distribution des valeurs pouvant être probablement attribuées au mesurande.

De ce fait, on peut être amené à exprimer une incertitude élargie U, telle que :

$$U = k.\ u_c(Y)$$

où k est le facteur d'élargissement.

La valeur de k est choisie sur la base d'un niveau de confiance requis pour l'intervalle $[y - U, y + U]$.

4.2. Détermination du facteur d'élargissement *k*

La détermination de *k* correspond à ce qu'on appelle en statistique la détermination d'un intervalle de confiance .

Pour obtenir ce facteur k, il est nécessaire d'avoir une connaissance de la loi de probabilité de la variable représentée par le résultat de mesure.

En faisant l'hypothèse d'une loi normale[2], ce qui est le cas le plus fréquent en métrologie, les niveaux de confiance sont approximativement égaux à :

- **68 % pour k = 1.**
- **95 % pour k = 2.**
- **99,8 % pour k = 3.**

Actuellement, dans tous les certificats d'étalonnage édités à l'entête du COFRAC, le facteur *k* retenu est 2 ; cette valeur est aussi la plus fréquemment rencontrée dans toute l'Europe.

Il est bien évident que l'expression d'une incertitude n'a de sens que si la valeur du facteur d'élargissement est précisée.

Expression de l'incertitude

a) Règles d'arrondissage

Lorsqu'on exprime le résultat d'un mesurage et que la mesure de l'incertitude est l'incertitude type composée $u_c(Y)$ ou l'incertitude élargie U, on retiendra les règles simples suivantes :

1. **L'incertitude type composée de *y* est, généralement, annoncée avec 2 chiffres significatifs.**
2. **Le résultat de mesure est arrondi aux 2 mêmes chiffres significatifs que l'incertitude type.**

Exemple :
Si $y = 10{,}057\ 62$ mg/l avec $U = 27$ µg/l ; y est arrondi à 10,058 mg/l

b) Règles d'écriture du résultat et son incertitude

Pour écrire des résultats numériques du mesurage, on peut employer les différentes formes d'écriture suivantes :

- $Y = y\ (u_c(y))$

- $Y = y \pm (U)$ avec k = ...

Exemples

Pour une masse étalon de valeur nominale de 100 g comportant une incertitude exprimée sous forme d'incertitude type composée u_c :

$M_s = 100{,}021\ 47$ g avec $u_c = 0{,}35$ mg

$M_s = 100{,}021\ 47\ (0{,}00035)$ g

Pour une masse étalon de valeur nominale de 100 g comportant une incertitude exprimée sous forme d'incertitude élargie U :

$M_s = 100{,}02147 \pm 0{,}00070$ g avec k = 2

5. Présentation des résultats

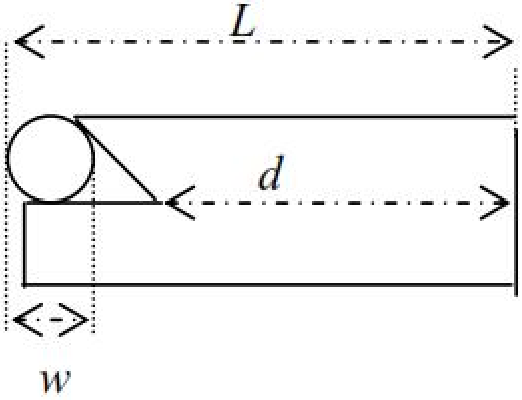
Pour déterminer une incertitude sur un mesurage :

Choisir une méthode de mesurage.

- Modéliser le mesurage : Déterminer les différentes variables qui entrent dans le mesurage, déterminer les grandeurs d'influence.
- Déterminer la fonction mathématique qui lie ces variables.
- Déterminer les composantes de l'erreur sur chacune des variables.
- Lister les composantes aléatoires et les composantes systématiques.
- Déterminer les incertitudes-types sur chacune des variables.
- Estimations de type A (statistiques) ou de type B (probabilistes)
- Éventuelle Incertitude – type composée sur chaque variable
- Déterminer l'incertitude – type composée sur le mesurage.
- Déterminer le facteur d'élargissement (associé à la loi supposée représenter la répartition des valeurs prises par le mesurande).
- Donner l'incertitude élargie sur le mesurage avec ses caractéristiques.

Un exemple :

On veut estimer l'incertitude sur la dimension d en fond de rainure de la pièce ci-dessous. Pour déterminer d, on place une pige de diamètre w dans la rainure et on mesure une distance L.



On effectue deux séries de mesures indépendantes de la longueur L avec deux piges de diamètres différents ; avec la pige de diamètre w_1, on obtient une longueur L_1 et avec la pige de diamètre w_2, une longueur L_2.

En utilisant la formule $$d = \frac{L_1 w_2 - L_2 w_1}{w_2 - w_1}$$

On effectue les deux séries de dix mesures de manière indépendante et on obtient, en mm :

L1	52,36	52,35	52,34	52,35	52,36	52,34	52,35	52,35	52,36	52,34
L2	59,17	59,18	59,17	59,17	59,19	59,18	59,18	59,17	59,18	59,19

- L'écart-type de répétabilité obtenu sur <u>une</u> mesure de L_1 est égal à 8,164 x 10^{-3} mm et celui sur une mesure de L_2 est égal à 7,888 x 10^{-3} mm.
- Pour obtenir l'écart-type retenu sur la moyenne des 10 mesures de L_1, on prendrait cette même valeur 8,164x10^{-3} mm divisée par $10^{1/2}$.
- Si les mesures de longueurs sont effectuées à l'aide d'un pied à coulisse au 1/100 dont l'erreur de justesse maximale est de 30µm, alors l'incertitude sur une mesure de L_1 est :

- $u_A = 0{,}00816$ mm et
- $u_B = \dfrac{0{,}030}{\sqrt{3}}$ mm (instrument vérifié)

On a alors $u^2(L_1) = u_A{}^2 + u_B{}^2 = 0{,}00036658\ldots\text{mm}$ et on en déduit que $u(L_1) = 0{,}0190\ldots\text{mm}$

- Détermination de l'incertitude-type composée
- déterminons les incertitudes sur les quatre variables :

On a : $c_1 = \dfrac{\partial d}{\partial L_1} = \dfrac{w_2}{w_2 - w_1} = 3$, $\qquad c_2 = \dfrac{\partial d}{\partial L_2} = \dfrac{-w_1}{w_2 - w_1} = -2$,

$c_3 = \dfrac{\partial d}{\partial w_1} = \dfrac{-(L_2 - L_1)w_2}{(w_2 - w_1)^2} = -5{,}121$ et enfin $c_4 = \dfrac{\partial d}{\partial w_2} = \dfrac{(L_2 - L_1)w_1}{(w_2 - w_1)^2} = 3{,}414$

En prenant $w_1 = 8$, $w_2 = 12$, pour valeur de L_1 la moyenne 52,35 des 10 valeurs et pour valeur de L_2 la moyenne 59,178 des 10 valeurs

- L'incertitude-type sur L_1 a déjà été calculée et elle a pour valeur 0,0190
- L'incertitude-type sur L_2 se calcule de même et elle a pour valeur 0,0192 avec u_A = 0,00780 mm et

$$u_B = \frac{0{,}030}{\sqrt{3}} \text{ mm (instrument vérifié)}$$

L'incertitude-type sur w_1, comme sur w_2 est 0,0010 mm (0,0020 mm représente deux écarts types).

- Résumons les résultats dans un tableau, les données sont exprimées en mm :

Composantes	$u(x_i)$	c_i	$\lvert c_i \rvert u(x_i)$
$u(L_1)$	0,0190	3	0,0570
s_9	0,00816		
u_j	$0{,}03/\sqrt{3}$		
$u(L_2)$	0,0192	-2	0,0384
s_9	0,00780		
u_j	$0{,}03/\sqrt{3}$		
$u(w_1)$	0,001	$-5{,}121$	0,00512
$u(w_2)$	0,001	3,414	0,00341

On a alors $u_c^2(d) = (0{,}0570)^2 + (0{,}0384)^2 + (0{,}00512)^2 + (0{,}00341)^2 = 0{,}00478....$

D'où $u_c(d) = 0{,}069...$

Avec un coefficient d'élargissement k = 2, on prendra U = 0,14 mm.

Le poids faible des incertitudes associées à des variables rectangulaires nous permet raisonnablement de faire l'hypothèse que la variable d suit approximativement une loi normale.

<u>En conclusion :</u>

L'incertitude sur d élargie d'un facteur k = 2 vaut 0,14 mm ; cette incertitude définit un intervalle estimé avoir un niveau de confiance proche de 95%.