TD n° 2 : Transformée de Fourier

Exercice 1. *Fonction porte*
Soit Π la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\Pi(x)$.
2. En déduire que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

Exercice 2.*Fonction triangle*
Soit Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\Delta(x)$.
2. Vérifier que $\Delta'(x) = \Pi(x + \frac{1}{2}) - \Pi(x - \frac{1}{2})$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $\Delta'(x)$ et retouver le résultat de la question 1.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$.

Exercice 3. Soit $a > 0$, en utilisant le résultat de l'exercice 1, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\cos(xt)}{t} dt = \begin{cases} \pi & \text{si } |x| < a \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |x| = a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. *Fonction Gaussienne*
Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$.

a) Vérifier que $f'(x) + xf(x) = 0$.
b) Calculer la TF de f.
c) Utiliser ce résultat pour calculer $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(\omega x)dx$.

Exercice 5. a) Calculer la TF de la fonction $f(x) = e^{-|x|}$.
b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^2} dx.$$

Exercice 6. On considère la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$.

1. Calculer la TF de f.
2. A l'aide de la TF inverse, en déduire la TF de $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.
3. Calculer $f * f$, en déduire la TF de $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$.
4. Déterminer la TF de $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$.