Transformée de Fourier

Mme. Ghamnia*

12 avril 2020

Avant de commencer le cours sur la transformée de Fourier (TF), nous avons besoin de définir les ensembles suivants :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.

1. $Loc(I, \mathbb{C}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f \text{ est localement intégrable sur} I\}$, On dira f localement intégrable sur I si quelque soit $[a, b] \in I$ alors $\int_a^b f(x)dx$ existe.
2. $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty\}$, c'est à dire l'ensemble des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.
3. $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f \in Loc(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } f \in L^1(\mathbb{R})\}$.
4. $C_0 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \qquad lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}$

1 Définition : Transformée et Transformée Inverse de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dans $\mathcal{H}$, on définit la transformée de Fourier (TF) de f, la fonction notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et sa transformée inverse de Fourier (TIF) de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ respectivement par :

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx \qquad (TF)$$

$$\text{et (TIF)} \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha & , \quad si \quad f \text{est continue en } x \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha & , \quad si \quad f \text{est discontinue en } x, \end{cases}$$

*ENPO-MA, BP 1523 El Ménaouer, 31000 Oran, Algérie

1.1 Exemple 1 :

Soit $f(x) = e^{-|x|}$, calculer la TF de f et en déduire que

$$\int_0^{\infty} \frac{cosx}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{1-i\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\alpha x)} dx \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+i\alpha} + \frac{1}{1-i\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la TIF donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-|x|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin\alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{cos\alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + i.0
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos\alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

Ainsi pour $x = 1$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-1} = \frac{\pi}{2e}$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

1.2 Cas particuliers :

1. Si f est paire. On sait que $e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha$,donc la TF s'écrit :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(cos(\alpha x) - isin(\alpha x) \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) cos(\alpha x) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) sin(\alpha x) dx
\end{aligned}$$

Or les fonctions $x \longmapsto f(x)cos(\alpha x)$ et $x \longmapsto f(x)sin(\alpha x)$ sont respectivement paire et impaire, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)cos(\alpha x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)cos(\alpha x)dx$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)sin(\alpha x)dx = 0.$$

Donc si f est paire :

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(x)cos(\alpha x)dx$$

2. Si f est impaire alors on a de la même manière :

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(x)sin(\alpha x)dx$$

.

1.3 Exemple 2

Fonction porte (Exercice 1 de la Fiche de TD sur les TF)
NB : Essayer de le faire et il sera corrigé au début du prochain cours.

1.4 Propriétés

1.4.1 Lemme de Riemann :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors les fonctions $x \longmapsto f(x)cos\alpha x$ et $x \longmapsto f(x)sin\alpha x$ sont intégrables dans $[a,b]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{a}^{b} f(x)cos\alpha x dx = \lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{a}^{b} f(x)sin\alpha x dx = 0$$

1.4.2 Théorème :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dans $\mathcal{H}$. Alors

1. $\hat{f}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\infty f(x)e^{-i\alpha x}dx$ est normalement convergente.
2. $\hat{f}$ est bornée.
3. $\lim_{\alpha\longrightarrow\pm\infty}\hat{f}(\alpha) = 0$