Ecole Nationale POlytechnique d'Oran

2^{e} Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie

ANALYSE III

Correction du TD n° 5

Abdallah Talhaoui

Séries entières

Exercice 1.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-5)^n$

Posons $X = x-5$, la série se réécrit $\sum a_n X^n$ avec $a_n = n!$.

$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, donc la série $\sum a_n X^n$ ne converge que pour $X = 0$, ce qui entraine que la série $\sum n!(x-5)^n$ ne converge que pour $x = 5$.

On déduit que $D_c = \{5\}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$

$a_n = \frac{1}{2n+1}$; $\quad R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1$.

Si $x = 1$ on étudie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergente (série harmonique).

Si $x = -1$ on étudie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ convergente d'après la règle de Leibnitz.

On déduit que $D_c = [-1, 1[$.

c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$

Posons $U_n(x) = \frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ et appliquons la règle de D'Alembert.

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+3)}{(2n+1)(n+1)}x^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_c = \mathbb{R} \;\; (R = +\infty)$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$

Posons $U_n(x) = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ et appliquons la règle de Cauchy .

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x-1|^{(n+1)}}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } |x-1| \le 1 \\ +\infty & \text{si } |x-1| > 1 \end{cases}$$

Ainsi la série $\sum U_n(x)$ converge absolument si et seulement si $|x-1| \le 1$.

On déduit que $R = 1$; $\;D_c = [0, 2]$.

e) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{8^{n+1}}$

Posons $U_n(x) = \frac{x^{3n+2}}{8^{n+1}}$ et appliquons la règle de D'Alembert.

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^3}{8} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$, donc $R = 2$.

Si $x = \pm 2$, alors $|U_n(x)| = \frac{1}{2}\;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $\sum U_n(x)$ diverge si $x = \pm 2$ car son terme général ne tend pas vers 0, ce qui entraine que $D_c =]-2, 2[$.

R Une autre méthode consiste à remarquer que $\sum U_n(x) = \frac{x^2}{8}\sum\left(\frac{x^3}{8}\right)^n$ série géométrique.

Exercice 2.

1. Posons $U_n(x) = \frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n+2}$ et appliquons la règle de D'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{3n+5}\left|\frac{x^{3n+5}}{x^{3n+2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{3n+5}|x|^3 = |x|^3 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

On déduit que $R = 1$.

Si $x = 1$: $\quad \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{3n+2}$ convergente d'après la règle de Leibnitz.

Si $x = -1$: $\quad \sum_{n\ge 0}\frac{1}{3n+2} \sim \frac{1}{3}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n}$ divergente (série harmonique).

Donc $D_c =]-1, 1]$.

2. Notons $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n+2}, \quad x\in D_c$.
En dérivant terme à terme, il vient que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+1}=x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n=\frac{x}{1+x^3}.$$

Par intégration, on obtient

$$\forall x\in]-1,1[,\quad S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{t}{1+t^3}dt.$$

Comme $S(0)=0$, on déduit que $\quad S(x)=\int_0^x\frac{t}{1+t^3}dt \quad \forall x\in]-1,1[$.

Pour calculer $S(x)$, nous sommes conduits à la décomposition

$$\frac{t}{1+t^3}=\frac{-1}{3(1+t)}+\frac{t+1}{3(t^2-t+1)}$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{t}{1+t^3}dt &= \left[-\frac{1}{3}\ln|1+t|\right]_0^x+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{3}{2}\int_0^x\frac{dt}{t^2-t+1}\right]\\ &= -\frac{1}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\int_0^x\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\\ &= -\frac{1}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x\\ &= -\frac{1}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right]\end{aligned}$$

On déduit que pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$S(x)=-\frac{1}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$$

3. a) Calcul de la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$.

   Nous allons montrer que $S(x)$ est continue sur $[0,1]$. Pour cela nous appliquons la régle d'Abel uniforme à la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n+2}$ sur $[0,1]$.
   Posons $\ a_n(x)=\frac{x^{3n+2}}{3n+2}, \quad b_n=(-1)^n$.

   i. Pour tout $x\in[0,1]$, la suite $(a_n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante (évident).
   ii. $\forall x\in[0,1],\ |a_n(x)|\leq\frac{1}{3n+2}$, donc $a_n(x)$ tend uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
   iii. $\forall n\in\mathbb{N},\ |b_0+b_1+\cdots+b_n|\leq 1$.

   On déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n+2}$ converge uniformément sur $[0,1]$, sa somme $S(x)$ est donc continue sur $[0,1]$. ce qui entraine que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}=S(1)=\lim_{x\to 1}S(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\pi-\ln 2\right).$$

b) Calcul de la somme de série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(6n+2)(6n+5)}$.

En utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{(6n+2)(6n+5)} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6n+2}-\frac{1}{6n+5}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^{2n}}{3(2n)+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{3(2n+1)+2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(6n+2)(6n+5)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2} = \frac{1}{9}\left(\sqrt{3}\pi-\ln 2\right).$$

Exercice 3.

a) On sait que $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}u^n, \quad u\in]-1,1]$.
En posant $u = x-1$, on obtient

$$f_1(x) = \ln x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n, \quad x\in]0,2].$$

b) On peut écrire $f_2(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}\right)$. Ainsi $f_2(x)$ apparait comme la somme d'une série géométrique de premier terme $a = \frac{1}{2}$ et de raison $q = -\frac{x-2}{2}$; par suite

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-2)^n, \quad x\in]0,4[.$$

c) En décomposant en élément simples, on obtient

$$f_3(x) = -\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x}-\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}.$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n, \quad x\in]-1,1[,\\ \frac{1}{1-\frac{x}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x\in]-2,2[.\end{aligned}$$

On déduit que

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n, \quad x\in]-1,1[.$$

d) Par dérivation, on obtient

$$f_4'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = -\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}-\frac{1}{3(1-\frac{x}{3})}.$$

Maintenant on a

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \in]-2,2[,$$
$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad x \in]-3,3[.$$

On déduit que

$$f_4'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^{n-1}, \quad x \in]-2,2[.$$

En intégrant terme à terme, on obtient

$$\int_0^x f_4'(t)dt = -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)t^{n-1}dt = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}, \quad x \in]-2,2[,$$

donc

$$f_4(x) - f_4(0) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}, \quad x \in]-2,2[.$$

Comme $f_4(0) = \ln 6$, on déduit que

$$f_4(x) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}, \quad x \in]-2,2[.$$

Exercice 4. On se propose de calculer les sommes des séries $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{4n^2-1}$, $x \in]-1,1[$. Par décomposition, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{2n-1}-\frac{x^n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right). \tag{1}$$

Deux cas se présentent :

1er cas : $x \in]0,1[$, posons $x = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$, $y \in]0,1[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-1+\left(y-\frac{1}{y}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

En dérivant terme à terme la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}$, on obtient

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}y^{2n} = \frac{1}{1-y^2}, \quad y \in]0,1[.$$

Par intégration, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right), \quad y \in]0,1[.$$

On déduit que

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right], \quad x \in]0,1[. \tag{2}$$

2e cas : $x \in]-1,0[$, posons $-x = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{-x}$, $y \in]0,1[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-x)^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-x)^n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 - \left(y + \frac{1}{y}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

En dérivant terme à terme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}$, on obtient

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n y^{2n} = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in]0,1[.$$

Par intégration, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1} = \arctan y, \quad y \in]0,1[.$$

On déduit que

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \left(\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\arctan\sqrt{-x}\right), \quad x \in]-1,0[. \tag{3}$$

D'après (1), on a $f(0) = -1$.

D'autre part la somme $f(x)$ est définie sur $[-1,1]$ car les séries numériques de termes généraux $\frac{1}{4n^2-1}$ et $\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ sont convergentes.

Vérifions que $f(x)$ est continue sur $[-1,1]$, en effet pour tout $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left|\frac{x^n}{4n^2-1}\right| \leq \frac{1}{4n^2-1} \text{(terme général d'une série convergente).}$$

La série entière considérée est alors normalement convergente sur $[-1,1]$, sa somme $f(x)$ est donc continue sur $[-1,1]$.

En utilisant (2), on déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} &= f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lim_{x\to 1^-} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lim_{x\to 1^-} \left[(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})\right] \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En utilisant (3), on a aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{1}{2}(1+2\arctan 1) = -\frac{2+\pi}{4}.$$

Exercice 5. On considère l'équation différentelle

$$\begin{cases} y'' + 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1;\ \ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (E)$$

Cherchons des solutions développables en séries entières.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n; \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}; \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 & \Rightarrow a_0 = 1 \\ y'(0) = 0 & \Rightarrow a_1 = 0. \end{cases}$$

En reportant dans (E) et en effectuant les changements d'indices nécessaires pour avoir partout x^n on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$2(a_2+a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n)x^n = 0$$

Tous les coefficients doivent être nuls, soit :

$$a_2 + a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+2} = -\frac{2}{n+2}a_n.$$

On en déduit, en distinguant les indices pairs et impairs :

$$a_{2p+1} = 0; \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}a_0 = \frac{(-1)^p}{p!}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

soit $\quad y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} x^{2p} = e^{-x^2} \quad$ avec $R = +\infty$.