SOLUTION FICHE 4

EXERCICE 1

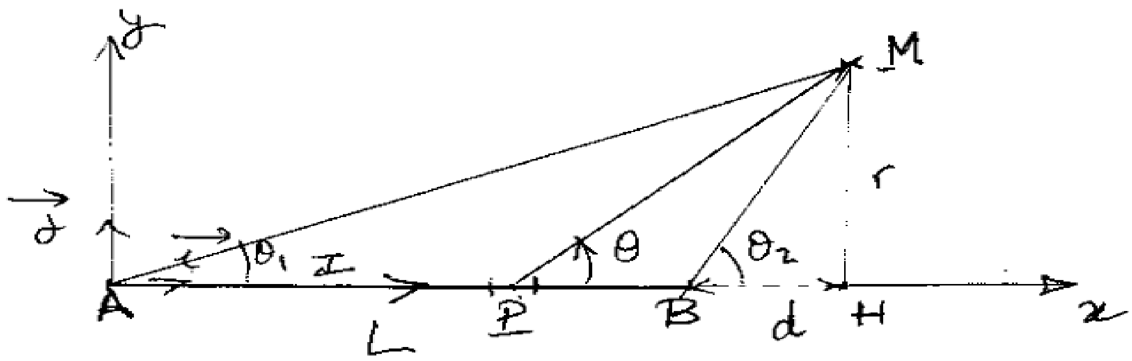
On introduit les axes Axyz, $(\vec i, \vec j, \vec k)$. On applique la loi de Biot et Savart pour le champ $d\vec B$ créé par $I\,d\vec l$ en P.

$$d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,\vec{dx} \wedge \vec{PM}}{PM^3}.$$

Tous les $d\vec B$ seront orientés selon $\vec k$. Il suffit de calculer le module et de sommer (intégrer).

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{dx}{PM^2}\,\sin(\vec{dx}, \vec{PM}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{dx}{PM^2}\,\sin\theta.$$

on a $\cot\theta = \frac{L+d-x}{r} \Rightarrow -\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{dx}{r} \Rightarrow \frac{r\,d\theta}{\sin^2\theta} = dx$



et $PM = \frac{r}{\sin\theta} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$ toujours > 0 puisque $\theta_1 < \theta_2$

$$\Rightarrow \boxed{B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\frac{L+d}{\sqrt{(L+d)^2+r^2}} - \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}}\right)\vec k}$$

EXERCICE N°2

On utilise le résultat du champ créé par un fil infini :

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$ et on applique en tenant compte du sens.

$$\vec B(M) = \vec B(1) + \vec B(2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{a}\vec k + \frac{1}{a+d}(-\vec k)\right]$$

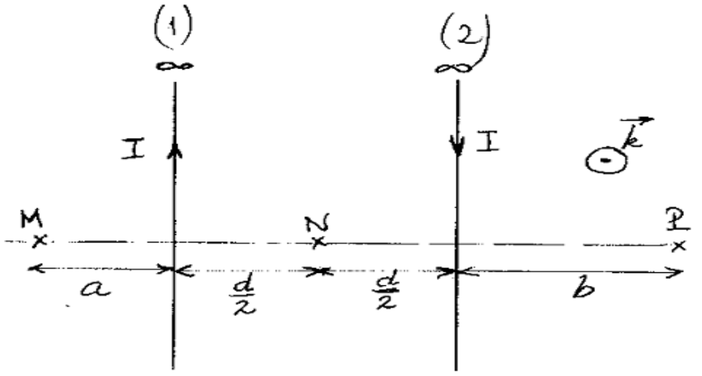
$$\vec B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{d}{a(a+d)}\,\vec k$$

$$\vec B(N) = \vec B(1) + \vec B(2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{-\vec k}{d/2} + \frac{-\vec k}{d/2}\right]$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{\pi d}(-\vec{k})$$

$$\vec{B}(P) = \vec{B}(1) + \vec{B}(2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{-\vec{k}}{b+d} + \frac{\vec{k}}{b}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi d(d+b)}\vec{k}$$



EXERCICE N°3

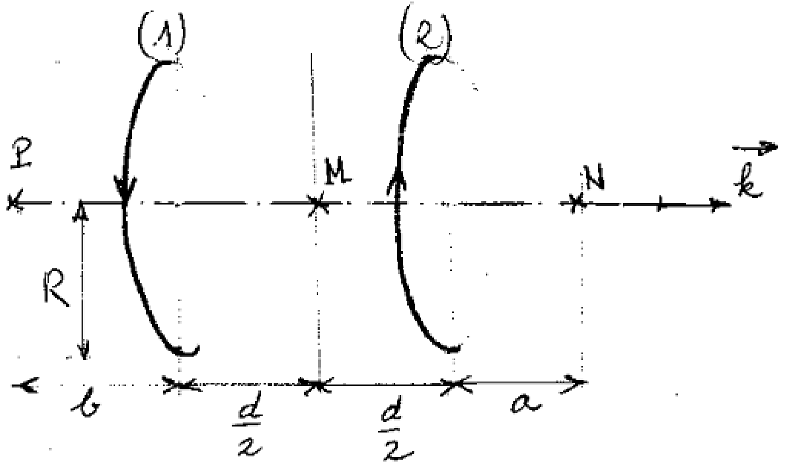
Il suffit de remplacer x par sa valeur dans chaque cas.

En P, $x = b$ pour le champ créé par (1) et $x = b+d$ pour le champ créé par (2), mais de sens opposé.

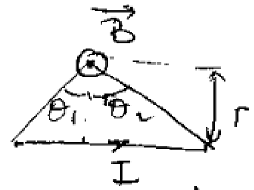
$$\boxed{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\frac{1}{(b^2+R^2)^{3/2}} - \frac{1}{[(d+b)^2+R^2]^{3/2}}\right]\vec{k}}$$

En M : $B(M) = 0$ car $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont égaux et opposés.

En N : $$\boxed{\vec{B}(N) = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[-\frac{1}{(a^2+R^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(d+a)^2+R^2]^{3/2}}\right]\vec{k}}$$



EXERCICE 4



Rappel du champ créé par un segment :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right)\vec{k}$$

Il suffit de déterminer θ_1 et θ_2 pour chaque segment (et r)

$AC \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow B_{AC} = 0$, de même $B_{EF} = 0$

$AB \Rightarrow \begin{cases}\theta_1 = 0, \ \theta_2 = \frac{\pi}{4} \\ r = b-a\end{cases}$ $\quad \vec{B}(AB) = \frac{\mu_0 I}{8\pi(b-a)}\sqrt{2}\,(-\vec{k})$,

$CD \Rightarrow \theta_1 = 0, \ \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \ r = b \quad \vec{B}(\vec{CD}) = \frac{\mu_0 I}{8\pi b}\sqrt{2}\,(\vec{k})$

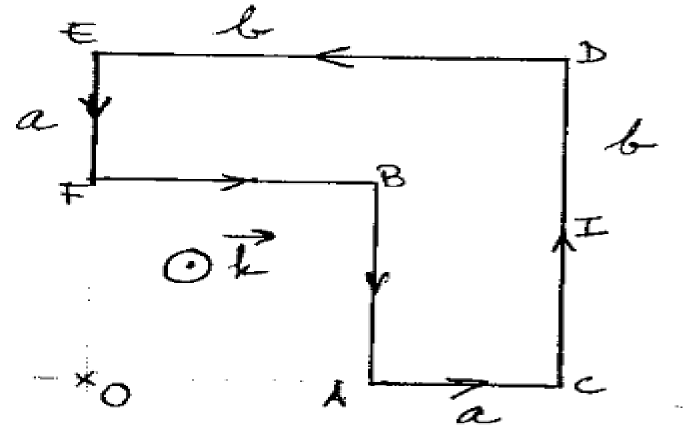
$ED \Rightarrow \theta_1 = 0, \ \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \ r = b \quad \vec{B}(ED) = \frac{\mu_0 I}{8\pi b}\sqrt{2}\,(\vec{k})$

$FB \Rightarrow \theta_1 = 0, \ \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \ r = (b-a) \quad \vec{B}(FB) = \frac{\mu_0 I}{\pi 8(b-a)}\sqrt{2}\,(-\vec{k})$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{2}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{b-a}\right]\vec{k}$$

ou

$$\boxed{\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{2}\,\frac{a}{b(b-a)}\,(-\vec{k})}$$



EXERCICEN°5

4.2 Force de Laplace

Force de Laplace sur NM parcouru par un courant i :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{NM} = i\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = i\mathrm{d}z\vec{u}_z \wedge B(x)\vec{u}_y = -iB(x)\mathrm{d}z\vec{u}_x$$

Sur NM, l'abscisse x est constante, le champ est uniforme sur le fil. On a alors :

$$\int_{\mathrm{N}}^{M} \mathrm{d}\vec{F}_{NM} = \int_0^a -iB(x)\mathrm{d}z\vec{u}_x = -iB(x)\vec{u}_x \int_0^a \mathrm{d}z = -iaB(x)\vec{u}_x$$

Le cadre comportant n spires la portion NM subit n fois la force exercée sur un brin :

$$\vec{F}_{NM} = -inaB(x)\vec{u}_x = -\frac{\mu_o I}{2\pi}\frac{nia}{x}\vec{u}_x$$

Le champ, étant uniforme sur tout le fil NM le point d'application de la résultante est situé au milieu de NM.

Force de Laplace sur QP parcouru par un courant i :

Par rapport au cas précédent, l'intensité du courant est de sens opposé : la force change de sens. De plus l'abscisse devient égale à $x+b$ et est constante pour tout le fil QP.

On aura donc : $\vec{F}_{QP} = iNaB(x+b)\vec{u}_x = \frac{\mu_o I}{2\pi}\frac{nia}{x+b}\vec{u}_x$ appliquée au milieu de QP.

Force de Laplace sur MQ parcouru par un courant i :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{MQ} = i\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = i\mathrm{d}x\vec{u}_x \wedge B(x)\vec{u}_y = iB(x)\mathrm{d}x\vec{u}_z$$

Cette fois le champ magnétique n'est pas uniforme le long de MQ (parallèle à l'axe 0x). On a donc en tenant compte des n spires :

$$\vec{F}_{MQ} = \int_M^Q n\mathrm{d}\vec{F}_{MQ} = \int_x^{x+b} inB(x)\mathrm{d}x\vec{u}_z = in\vec{u}_z \int_x^{x+b} B(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z \int_x^{x+b} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\vec{F}_{MQ} = \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z[\ln x]_x^{x+b} = \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z[\ln(x+b) - \ln x]$$

$$= \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z \ln\frac{x+b}{x}$$

$$\vec{F}_{MQ} = \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z \ln\left(1+\frac{b}{x}\right)$$

Force de Laplace sur PN parcouru par un courant i :

Le sens du courant a changé, cela change le sens de la force. Le reste est inchangé. On adonc :

$$\vec{F}_{PN} = -\frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z \ln\left(1+\frac{b}{x}\right)$$

On constate alors : $\vec{F}_{MQ} + \vec{F}_{PN} = \vec{0}$

La résultante des forces de Laplace exercées sur le cadre (courant i) de la part du champ magnétique créé par le fil infini (courant I) est donc :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{NM} + \vec{F}_{QP} &= -inaB(x)\vec{u}_x + -inaB(x+b)\vec{u}_x \\ &= -\frac{\mu_o naiI}{2\pi}\vec{u}_x\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b}\right]\end{aligned}$$

$\vec{F}_{NM} + \vec{F}_{QP} = -\frac{\mu_o naiI}{2\pi}\frac{b}{x+b}\vec{u}_x$ appliquée au centre d'inertie du cadre

Remarque :