

Ecole Nationale Polytechnique Maurice AUDIN d'Oran

Département : Formation préparatoire

Niveau : Deuxième année

Module Physique 03

Responsable : Pr Fouad BOUKLI HACENE

Email : bhfouad@yahoo.fr



- SERIE DE TD 04 -
OSCILLATIONS FORCEES A 1 DEGRE DE LIBERTE
PARTIE 01 : COURS

Problème 1 :

Le mouvement d'un immeuble A est modélisé par une masse m et un ressort de raideur k subit à une oscillation sismique sinusoïdale d'amplitude a de la forme $X_s(t) = a \cos \omega t$ -voir la figure 1.

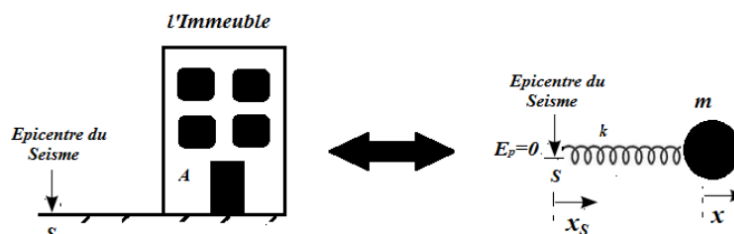


Figure 01

1. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
2. En déduire le Lagrangien du système.
3. Etablir l'équation différentielle du système.
4. Quelle est la réponse du système. Justifier le résultat.
5. On intègre un amortisseur exerçant sur le système une force de frottement $\vec{f}_{fr} = -\alpha \vec{v}$; ou α est le coefficient de frottement visqueux- Voir la figure 2.

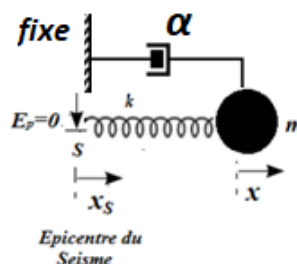


Figure 2

- 5.1 Etablir la nouvelle équation différentielle du mouvement
- 5.2 Déterminer la réponse du système en régime permanent.
- 5.3 Déterminer la pulsation de résonance.
- 5.4 Tracer la courbe de la solution.
- 5.5 Exprimer l'impédance mécanique.

Problème 2 :

Lorsqu'un moteur électrique fonctionne, il présente des vibrations naturelles qu'il est nécessaire d'amortir pour éviter de les transmettre à son châssis. On prévoit donc un système de suspension. Le moteur est assimilé au point matériel de masse m pouvant se déplacer parallèlement à l'axe vertical Oz . La suspension le reliant au châssis est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k en parallèle avec un amortisseur exerçant sur le moteur une force de freinage $\vec{f}_{fr} = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$; ou α est le coefficient de frottement visqueux – voir figure 3. Le châssis reste fixe dans un référentiel galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$.

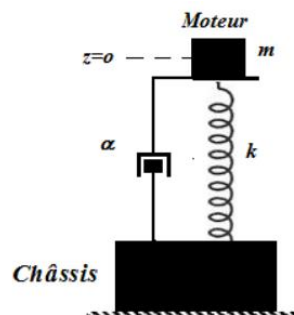


Figure 3

1. **Mode A** : Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile.
Déterminer dans ce cas la longueur l du ressort. On prend la référence $z=0$ au point m .
2. **Mode B** : Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le laisse évoluer librement.
Déterminer les énergies cinétique et potentielle. En déduire le Lagrangien du système.
3. Exprimer la fonction de dissipation D .
4. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z(t)$. On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \nu = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

5. Donner la forme de la solution générale $z(t)$ en fonction des paramètres ν et ω_0 , on suppose que $\nu < 1$. Comment appelle-t-on ce régime ?
6. Écrire l'expression de l'énergie totale E_T en fonction de $z(t)$ et $\frac{dz(t)}{dt}$.
7. Que vaut la valeur de l'expression $\frac{dE_T}{dt}$. Le système est-il conservatif ?
8. **Mode C** : Le moteur fonctionne, et tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de forme : $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega t \vec{u}_z$ Établir la nouvelle équation du mouvement vérifiée par $z(t)$
9. En régime permanent, on cherche des solutions de la forme $z(t) = z \cos(\omega t + \varphi)$ et $V(t) = V \cos(\omega t + \phi)$. Donner l'expression de la grandeur $V = V_0 e^{i\phi}$
10. Exprimer l'amplitude V_0 en fonction de ω et des paramètres ν , ω_0 et F_0/m .
Donner l'allure de $V_0(\omega)$.

11. Application numérique : La pulsation ω vaut 628 rad/s, le moteur a une masse $m=10\text{kg}$. On dispose de deux ressorts de raideurs $k_1=4\ 10^6\text{N/m}$ et $k_2=10^6\text{N/m}$. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

Problème 3:

On considère un système de réception radio modélisé par un circuit $R, L_{\text{ind}}, C_{\text{ap}}$ en série et alimenté par une source de tension sinusoïdale d'intensité $u(t)=U_0 \cos \omega t$ comme représenté par la figure 04

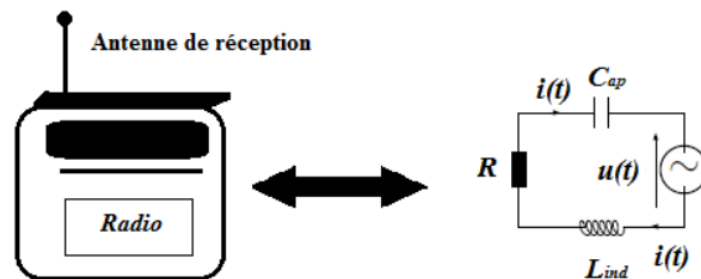


Figure 04

1. Déterminer l'impédance totale du système.
2. En déduire le module du courant parcourant le circuit en fonction des paramètres $R, L_{\text{ind}}, C_{\text{ap}}$ et ω .
3. Etudier les variations du module de courant en fonction de ω
4. Trouver la fréquence de résonance. En déduire le courant maximum.
5. Etablir la bande passante et le facteur de qualité en fonction des paramètres du circuit $R, L_{\text{ind}}, C_{\text{ap}}$ et ω .
6. Donner une explication au fonctionnement de ce système.
7. Quel est le système mécanique équivalent.

- SERIE DE TD 04 -
OSCILLATIONS FORCEES A 1 DEGRE DE LIBERTE
PARTIE 02 : TRAVAUX DIRIGES

Problème 04 :

Dans tous le problème, on considère une machine mécanique assimilée à un point matériel de masse m pouvant se déplacer parallèlement à l'axe vertical Ox – voir figure 5. La suspension le reliant au support est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k en parallèle avec un amortisseur exerçant sur la machine une force

de frottement $\vec{f}_f = -\alpha \vec{v}$

Le support reste fixe dans un référentiel galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$

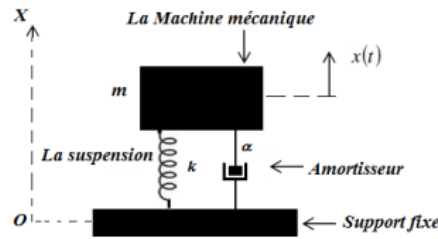


Figure 05

Partie 01 : On écarte la machine de sa position d'équilibre et puis on la laisse évoluer librement.

1. Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système
2. En déduire le Lagrangien du système.
3. Exprimer la fonction de dissipation D.
4. On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad 2\eta = \frac{\alpha}{m\omega_0}$$

Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $x(t)$.

5. On suppose que $\eta < 1$. Donner la forme de la solution générale $x(t)$ en fonction des paramètres η et ω_0 avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

6. Comment appelle-t-on ce régime dans ce cas-là ?
7. Calculer le décrément logarithmique δ
8. Montrer que la diminution de l'énergie totale E_T du système est due au travail des forces de frottement

Partie 02 : La machine mécanique est maintenant excitée par l'intermédiaire des supports de suspension- voir la figure 6.

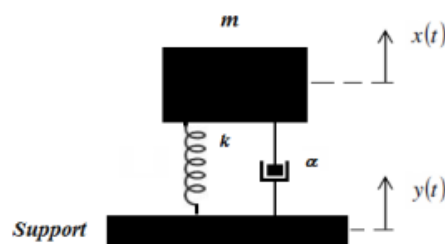


Figure 06

On suppose que le support possède un déplacement harmonique de forme :

$$y(t) = B \cos \omega t$$

- 8 Déterminer le Lagrangien du système.
- 9 Etablir l'équation différentielle du mouvement.

- 10 On pose la variable suivante : $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ et on cherche une solution de la forme : $x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$

Déterminer le rapport des modules d'amplitudes $T = \left| \frac{A}{B} \right|$ en fonction des paramètres η , ω_0 et ω .

11. Tracer la courbe $T(r)$ et interpréter les résultats.

Problème 05 :

On se propose d'étudier le comportement vibratoire un matériau en caoutchouc afin de l'utiliser dans la construction, représenté dans la figure 07.

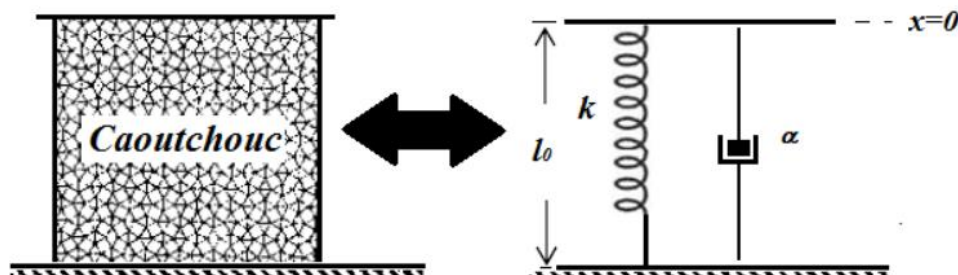


Figure 07

Nous assimilons l'élasticité du matériau à celle d'un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 et les pertes énergétiques par frottement à celle ayant lieu dans un amortisseur de coefficient α . Le ressort considéré à une raideur équivalente d'un ensemble de ressorts attachés en parallèle. On néglige le poids du caoutchouc devant les forces mises en jeu.

Partie A : On place un bloc de masse $m=1t$ sur le caoutchouc qui se comprime d'une distance d et prend une valeur de l . Après une compression supplémentaire, on relâche qui va se mettre à osciller autour de sa position d'équilibre qu'on le repère par la coordonnée $x(t)$ comme le montre la figure 8.

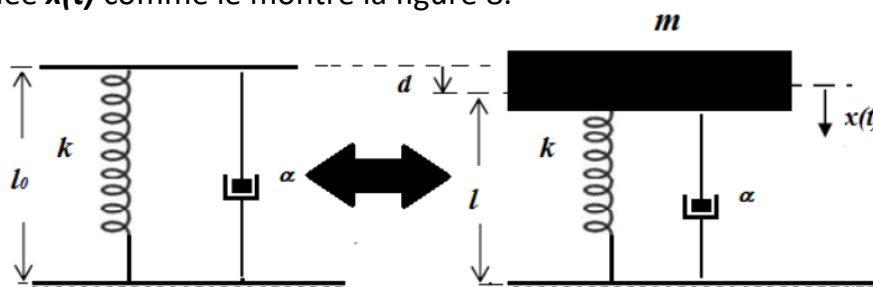


Figure 08

1. Le système est **en équilibre** :
 - 1.1. Déterminer l'énergie potentielle.
 - 1.2. En déduire la compression $d=l-l_0$.
2. Le système physique **maintenant oscille** :
 - 2.1 Déterminer l'énergie cinétique.

- 2.2 En déduire le Lagrangien du système
- 2.3 Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse m
- 2.4 Donner la solution générale de la solution $x(t)$ sachant que le mouvement est oscillatoire amorti.
- 2.5 Donner l'expression du décrement logarithmique δ . L'intervalle de temps, $\Delta t = 0.2s$ qui sépare le premier et le sixième maximum correspond à la diminution d'amplitude de 60%.
- 2.6 Déterminer les valeurs de k et α .
- 2.7 On refait la même expérience avec un autre caoutchouc. On trouve $\alpha' = 4.5103 \text{ Kg/s}$. Au bout de combien de temps, $\Delta t'$, obtient-on la même diminution d'amplitude que dans l'expérience précédente ?
- 2.8 Quel est le matériau le plus adéquat pour la construction ?

Partie B : On prend dans cette partie un caoutchouc de caractéristiques physiques suivantes : $k = 25106 \text{ N/m}$ et $\alpha = 104 \text{ Kg/s}$ qui sera utilisé dans la construction d'un pont d'autoroute, de masse $m = 12.5 \text{ t}$. On assimile l'effet du passage des véhicules sur le pont à celui d'une force sinusoïdale $F(t)$ d'amplitude $F_0 = 10 \text{ kN}$ et de pulsation ω , appliquée perpendiculairement au pont ; voir la figure 9.

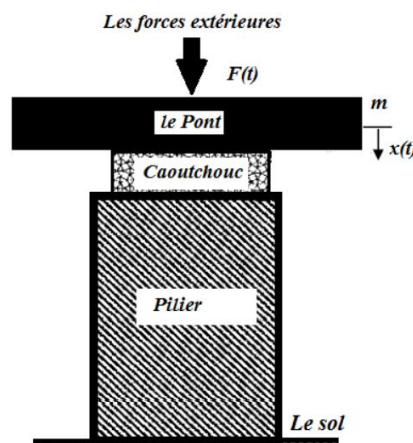


Figure 09

3. Etablir le Lagrangien du système.
4. Exprimer l'équation différentielle du mouvement du pont pour la coordonnée $x(t)$ donnant son déplacement par rapport à l'état d'équilibre.
5. Déterminer l'expression de la solution $x(t)$ en régime permanent.
6. Déterminer la fréquence de résonance f_r .
7. Donner l'expression de l'amplitude maximale à laquelle le pont peut vibrer.
8. Quelle est la phase correspondante dans ce cas-là ?
9. Calculer l'énergie communiquée au pont pendant un intervalle de temps égale à une période, lorsque le passage des véhicules le fait vibrer à la fréquence de résonance.
10. Déterminer l'énergie dissipée par la force de frottement pendant la même période. Interpréter le résultat

Problème 06 :

Un véhicule est modélisé par un bloc, de centre de gravité G et de masse $M = 1\text{t}$, reposant sur une roue de rayon R par l'intermédiaire de sa suspension dont l'axe OG reste toujours vertical. L'ensemble est animé d'une vitesse horizontale constante v . La suspension, quant à elle, est modélisée par un ressort de raideur $k = 10^5\text{N/m}$ et de longueur à vide l_0 , et d'un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α – voir figure 10.

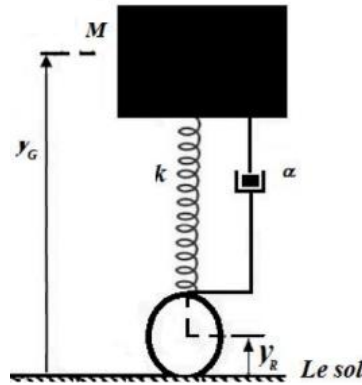


Figure 10

Partie A : La position verticale du véhicule est repérée par y_G dans un référentiel ayant comme origine le point de contact de la roue avec le sol. On note y_R , la distance entre le centre de la roue et l'origine.

1. Montrer que la position d'équilibre y_{Geq} de G lorsque le véhicule est au repos s'écrit comme suit :

$$y_{Geq} = l_0 + y_R - \frac{Mg}{k}$$

2. Suite à une impulsion soudaine, le véhicule acquiert un mouvement d'oscillations verticales. On cherche dans ce qui suit à établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement. On étudie le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment y_{Geq} , en considérant $y = y_G - y_{Geq}$ comme une coordonnée généralisée suffisante à l'étude du mouvement vertical.

2.1 Ecrire les expressions de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle U (de pesanteur et élastique) du véhicule, en posant le zéro de l'énergie potentielle en y_{Geq} .

2.2 Écrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et l'expression de l'énergie potentielle élastique.

2.3 En déduire le Lagrangien du système.

Partie B : On rappelle que la fonction de dissipation D est, dans ce cas, proportionnelle au coefficient d'amortissement ainsi qu'au carré de la différence de vitesses des deux extrémités de l'amortisseur.

3. Écrire l'expression de la fonction de dissipation D .
4. En déduire l'équation d'Euler-Lagrange appropriée.
5. Montrer que l'équation différentielle du mouvement

$$M\ddot{y} + \alpha \dot{y} + k y = 0$$

6. Quelle est l'unité de α ?
7. Donner la valeur numérique de α pour laquelle le système aura un mouvement critique ?
8. Quel sens physique peut-on donner à cette valeur numérique de α ?

Partie C : Le véhicule se déplace maintenant à la même vitesse v mais sur une route ondulée (voir la figure 11). L'ondulation est représentée par une fonction sinusoïdale de période spatiale L et d'amplitude A . y_R peut alors s'écrire : $y_R = R + A \cos \Omega t$

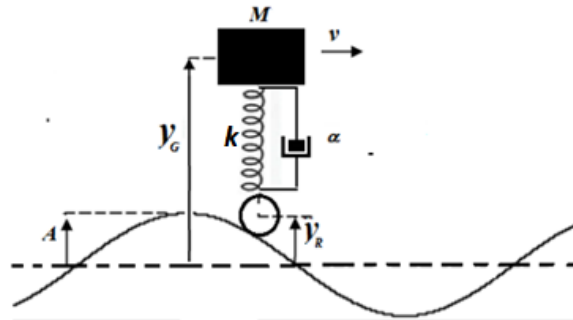


Figure 11

9. La situation est telle qu'on peut considérer que le véhicule est soumis à une force extérieure égale à : $F_e(t) = k A \cos \Omega t$ où k est la constante de raideur et $\Omega = 2 \pi v / L$ est la pulsation excitatrice
- 8.1 Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$M\ddot{y} + \beta \dot{y} + k y = k A \cos \Omega t - \beta \Omega A \sin \Omega t$$

- 8.2 Résoudre l'équation différentielle dans le régime permanent en utilisant la notation complexe.
- 8.3 Exprimer l'amplitude de la réponse du véhicule ainsi que son déphasage par rapport à l'excitation.

Problème 07 :

Soit le circuit formé par l'association parallèle des éléments suivants : R , L_{ind} , C_{ap} et alimenté par une source de courant sinusoïdale qui délivre un courant d'intensité $i(t) = i_0 \sqrt{2} \cos \omega t$ -voir la figure 12. On définit le facteur de qualité du circuit comme suit : $Q = RC_{ap}\omega_0$

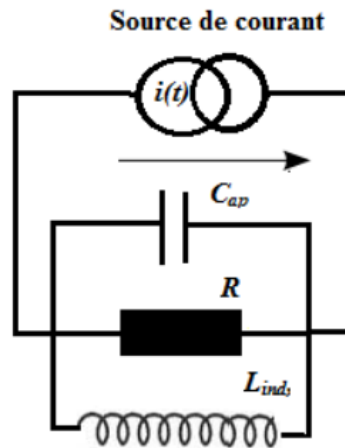


Figure 12

1. Exprimer la tension complexe u aux bornes de l'association parallèle en fonction de ω , i_0 , et des paramètres du circuit.

2. On pose les constantes suivantes : $\omega_0^2 = \frac{1}{L_{ind} C_{ap}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$
 - 2.1 Exprimer le module de la tension u aux bornes de l'association parallèle en fonction de R , i_0 , Q et x .
 - 2.2 Montrer que u passe par un maximum u_{max} pour une valeur de x à déterminer.

- 2.3 Représenter sommairement $f(x) = \frac{u}{u_{max}}$ en fonction de x .
- 2.4 Justifier votre réponse
- 2.5 Calculer la largeur de la bande passante.

Ecole Nationale Polytechnique Maurice AUDIN d'Oran

Département : Formation préparatoire

Niveau : Deuxième année

Module Physique 03

Responsable : Pr Fouad BOUKLI HACENE

Email : bhfouad@yahoo.fr



- DEVOIR 02 -

OSCILLATIONS FORCÉES A 1 DEGRÉ DE LIBERTÉ

Problème 01 :

Un vibreur dont la masse m a un mouvement périodique est relié à un ressort de raideur k . Les frottements de type visqueux sont modélisés par un amortisseur de coefficient α –voir la figure 1.

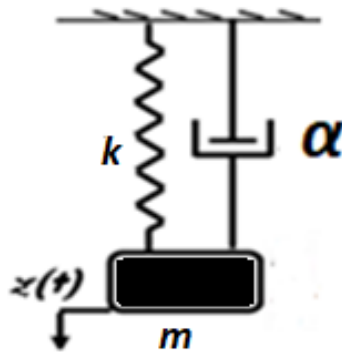


Figure 01

1. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. En déduire le lagrangien.
2. Donner la fonction de dissipation D .
3. Etablir l'équation régissant le mouvement.
4. Dans le cas d'un frottement peux visqueux. Donner la pseudo-période et l'expression de $z(t)$.
5. Le système subit l'action verticale de la force $F(t)$ agissant sur la masse m de type sinusoïdale $F(t) = F_0 \sin \Omega t$.
 - 5.1 Quelle est l'équation de mouvement du système ?
 - 5.2 Trouver, en régime permanent, le déplacement $z(t)$
 - 5.3 Tracer les courbes de l'amplitude $A(\Omega)$ et de l'argument $\phi(\Omega)$.
 - 5.4 En déduire la fréquence de résonance en amplitude et la bande passante à -3dB .
6. La force excitatrice est maintenant sous forme d'une impulsion périodique comme le montre la figure ci-dessous.
 - 6.1 Ecrire la nouvelle équation de mouvement, et dans le cas où l'amortissement est négligeable et $T = 6\pi/\omega_0$,
 - 6.2 Montrer que l'influence de $F(t)$ sur le système est équivalente à celle de son harmonique 3

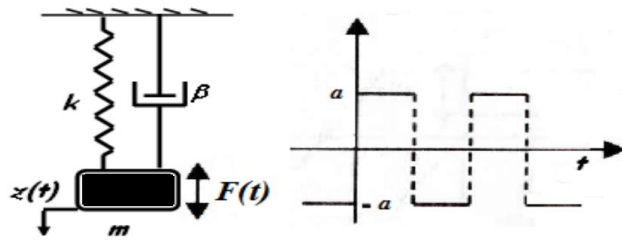


Figure 02

Problème 02 :

On définit un sismomètre comme un système physique appelé capteur qui comprend un support et une masse m relié par un ressort et un amortisseur disposés en parallèle, -voir la figure 3. La masse, de centre de gravité G , ne peut se déplacer que verticalement. Le support, le ressort et l'amortisseur ont une masse négligeable.

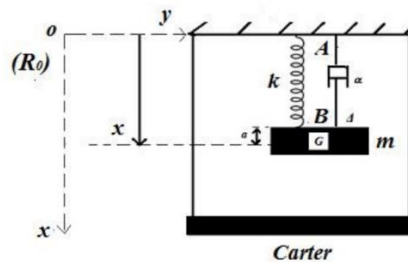


Figure 03

Le ressort a une longueur à vide l et une rigidité k . La constante de frottement est α . On précise que si, les extrémités A et B d'un amortisseur appartenant à un système mécanique, décrivent un axe Δ parallèle à l'axe Ox avec des vitesses respectives v_a et v_b , l'amortisseur exerce sur le reste du système en point A une force $\alpha(v_b - v_a)\vec{i}$ et en point B une force $\alpha(v_a - v_b)\vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire.

Partie A : Le support est immobile par rapport au repère (R_0) .

1. Calculer l'abscisse x_0 du centre d'inertie de la masse en équilibre.
2. Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse écarté de sa position d'équilibre.
3. Que devient cette équation quand on pose $x = x_0 + X$.
4. On pose les constantes suivantes : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\alpha = \lambda f_c$ avec $f_c^2 = 4km$.
Montrer que l'équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{X} + \alpha^* \dot{X} + \beta^* X = 0$$

5. Calculer α^* et β^* en fonction de λ et ω_0 .
6. On donne $\lambda = 0.5$, $\omega_0 = 10$ rad/s. A l'instant initial, $X = 1$ cm et $\dot{X} = 0$. Déterminer X pour $t = 0.2$ s.

Partie B : On suppose maintenant que le support est solidaire du carter d'une machine animé d'un mouvement sinusoïdale verticale $x_1(t) = b \sin \omega t$ par rapport au repère (R_0) , comme le montre la figure 04. On suppose que b est positif.

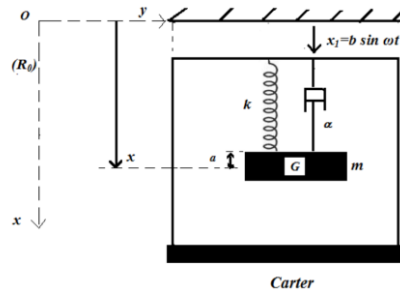


Figure 04

7. Ecrire l'équation de la masse par rapport à (R_0) .
8. Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = H \sin \omega t$$
Avec $x = X + C + b \sin \omega t$
9. Déterminer H et C, que représente X ?
10. Etudier la solution en régime permanent $X(t) = S \sin(\omega t - \varphi)$ Avec S positif.
11. Calculer le rapport S/b et $\tan \varphi$ en fonction de λ et $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$.
12. Tracer l'allure du graphe de S en fonction de μ tel que $S = f(\mu)$.
13. On suppose que $\lambda = 0.5$. Montrer que si μ est supérieur à une certaine valeur μ_1 , $(S/b) - 1$ est inférieur à 10^{-2} .
14. Calculer dans ce cas μ_1 .
15. En déduire une condition pour que l'appareil puisse fonctionner en capteur d'amplitude.