MODULE: PHYSIQUE 03
VIBRATIONS

Présenté par

Pr. Fouad BOUKLI HACENE

fouad.boukli-hacene@enp-oran.dz/

bhfouad@yahoo.fr

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE MAURICE AUDIN D'ORAN

CHAPITRE 04

OSCILLATIONS FORCÉES À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

Présenté par

Pr. Fouad BOUKLI HACENE

fouad.boukli-hacene@enp-oran.dz/

bhfouad@yahoo.fr

1. Introduction
2. Equation du mouvement- Résolution
3. Aspect énergétique
4. Oscillateur électrique

OBJECTIFS

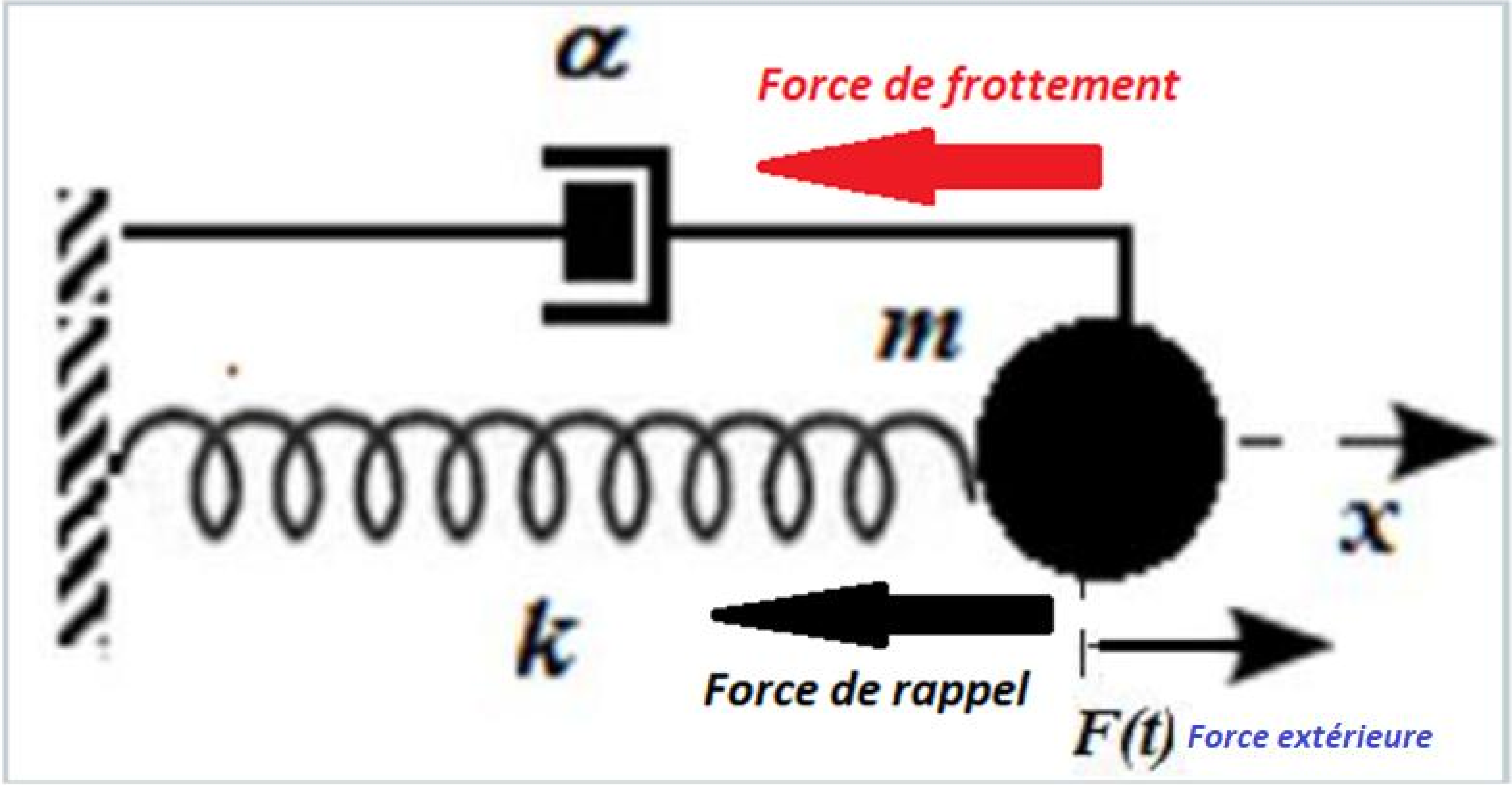
- 1. L'équation différentielle d'un mouvement Forcé
- 2. Les différentes solutions du problème
- 3. Le phénomène de résonance
- 4. Quelques applications

INTRODUCTION

- Les vibrations mécaniques sont à l'origine d'une grande partie des problèmes industriels.
- Ces vibrations sont symbolisées par un ensemble d'oscillateurs constitués de masse ; de ressorts et d'amortisseurs.
- On définit alors une oscillation forcée, tout système en mouvement sous l'action d'une force extérieure.

REPRÉSENTATION PHYSIQUE

- Le **système forcé** est représenté:

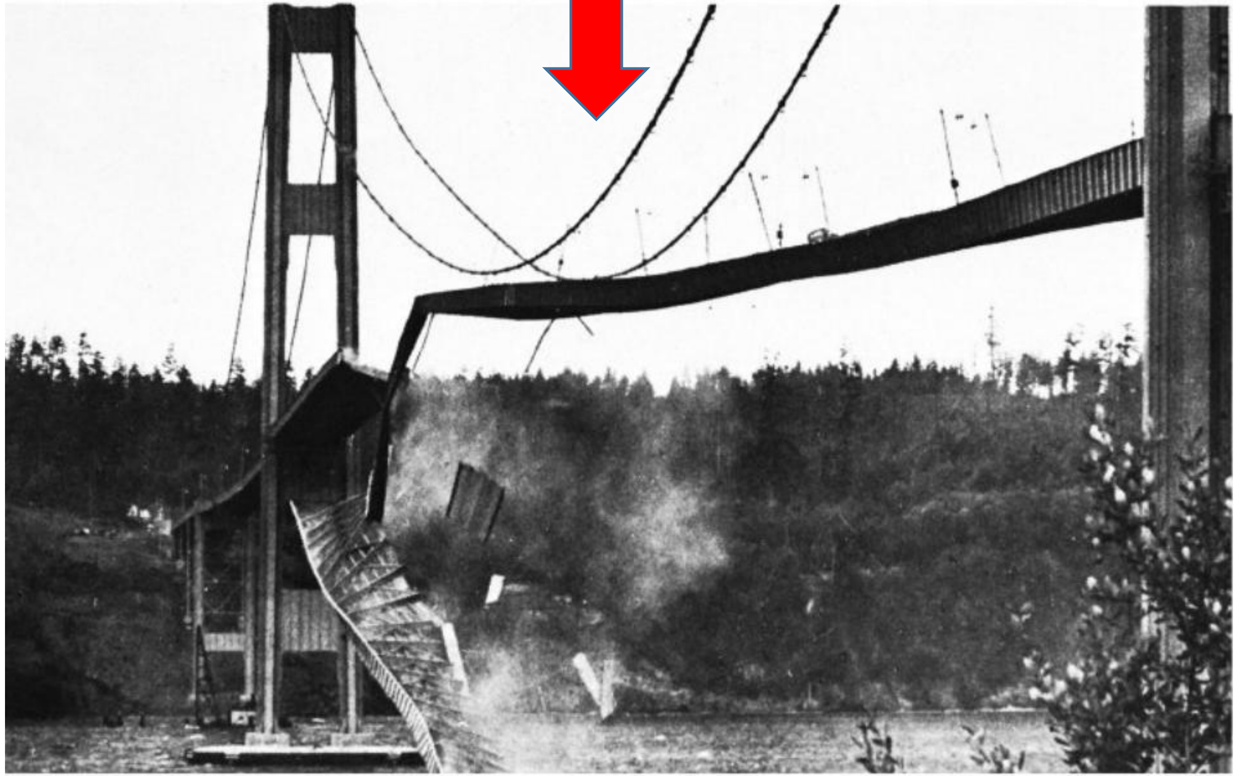


Glissement superficiel : Fluage

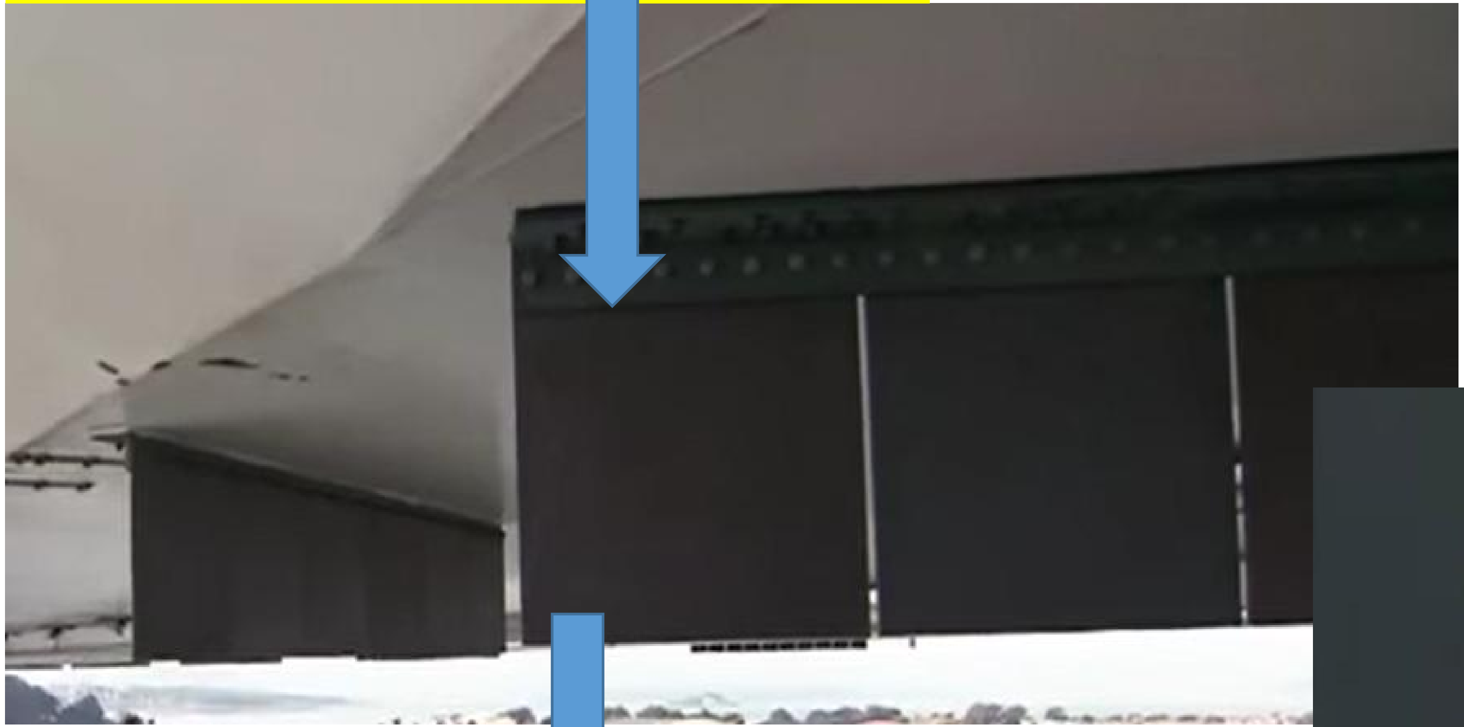
Glissement profond : Séisme

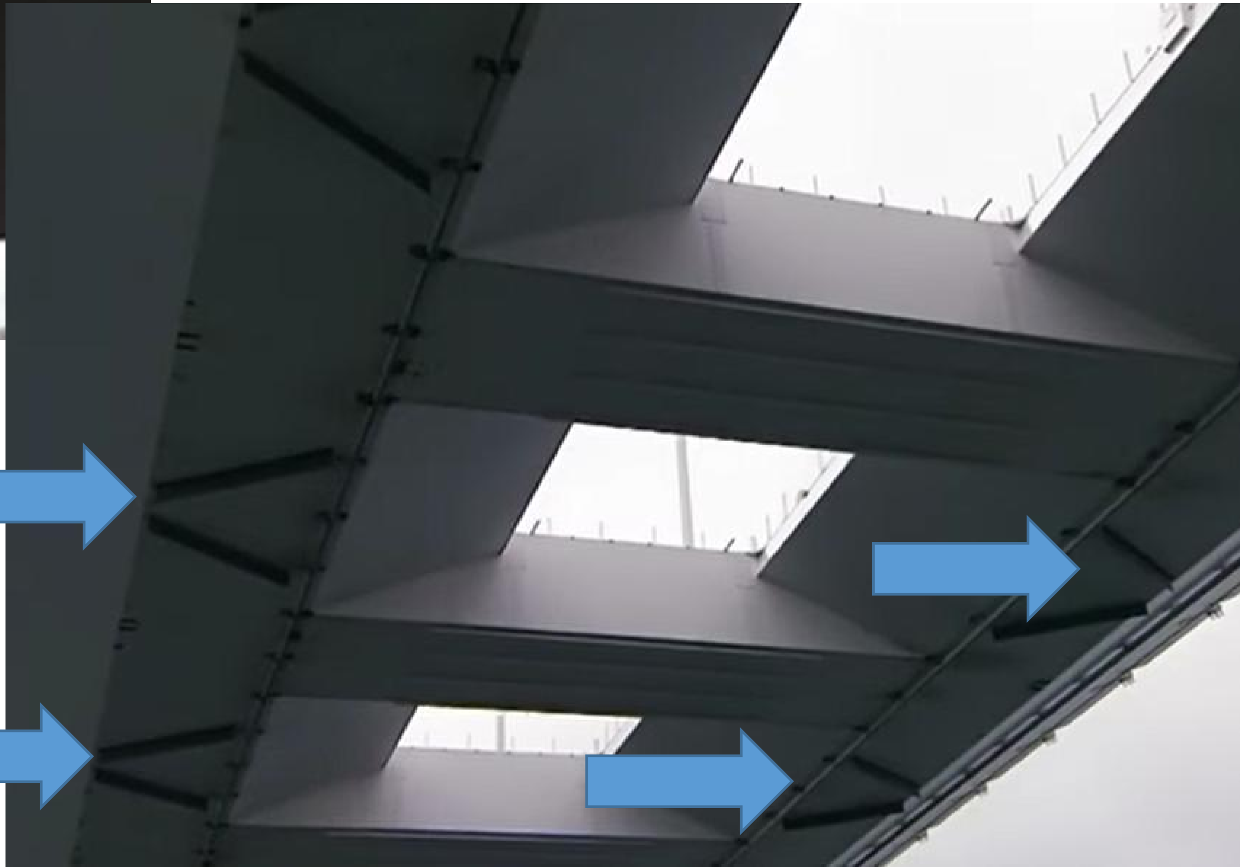
EFFET DU VENT
EFFONDREMENT
DU PONT TACOMA
1940 -USA

EFFET DU SEISME
EFFONDREMENT
DU PONT DE SAN FRANSISCO
1989-USA



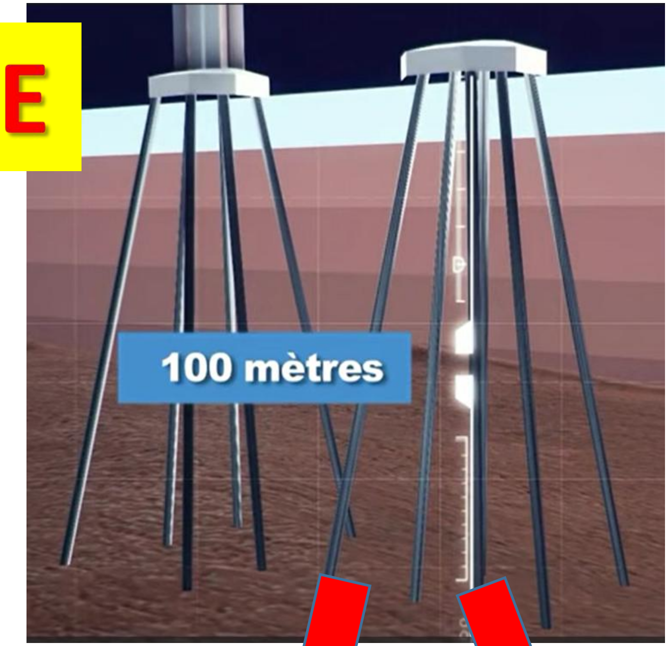
PLAQUES ANTI TOURBILLON DU VENT SOUS LE PONT

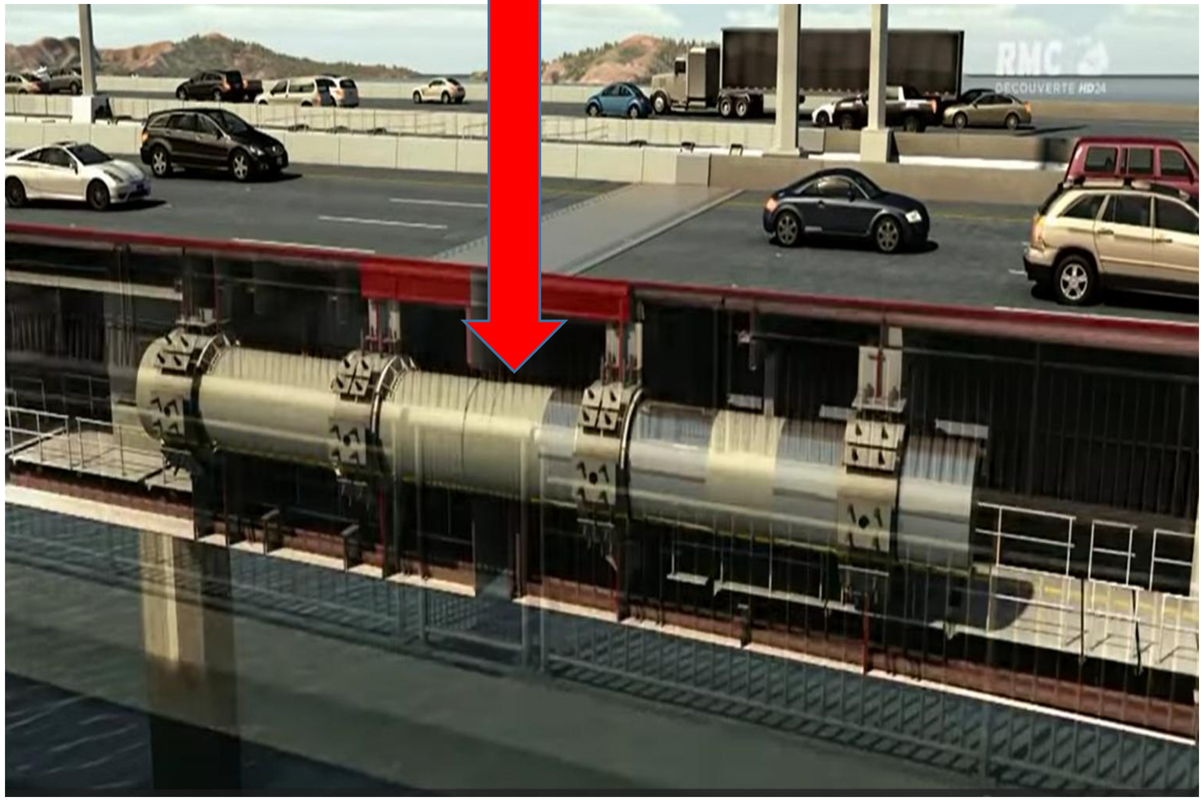




AMORTIR L'EFFET DU VENT

AMORTIR L'EFFET DU SEISME



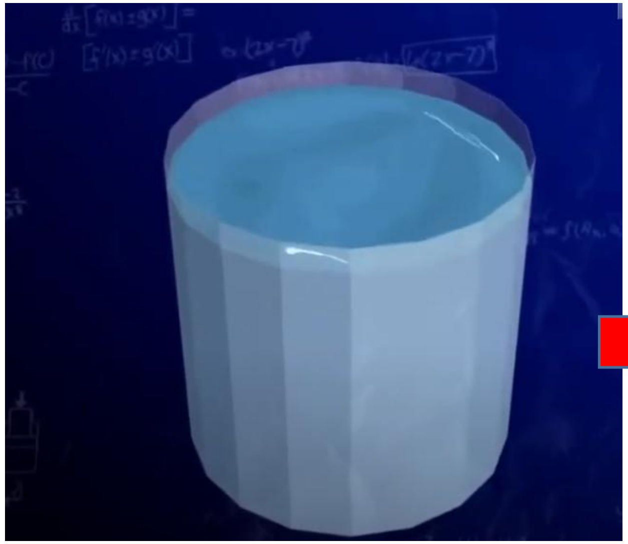


AMORTIR L’EFFET DU VENT SUR LES GRATTE-CIELS

EFFET CARÈNE LIQUIDE

EFFET CARÈNE LIQUIDE

Amortissement:
FORME SPHÉRIQUE DES RÉSERVOIRS



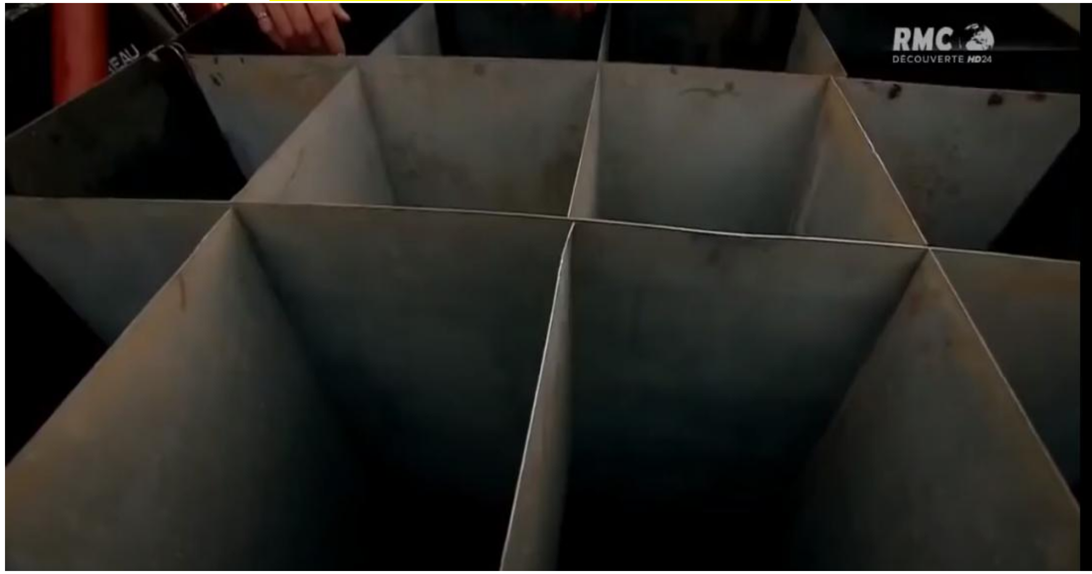
Tankers

BALLAST DES BATEAUX

EFFET CARÈNE LIQUIDE

Amortissement

CHICANES

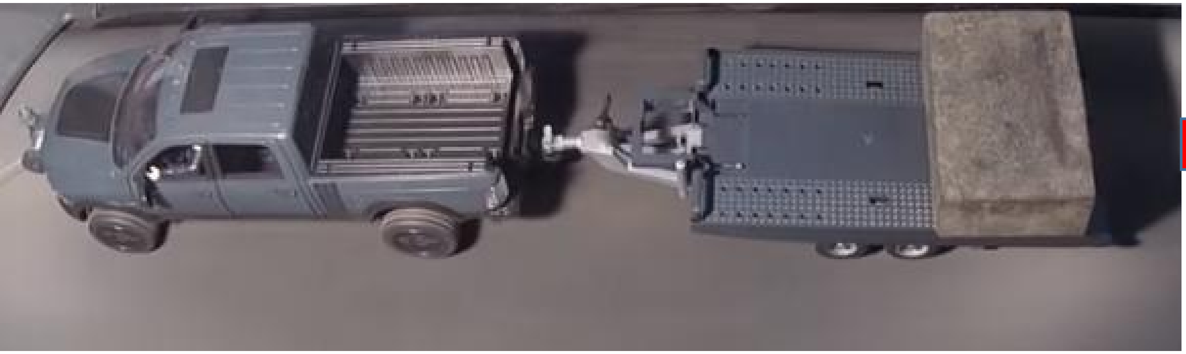


EFFET LACET

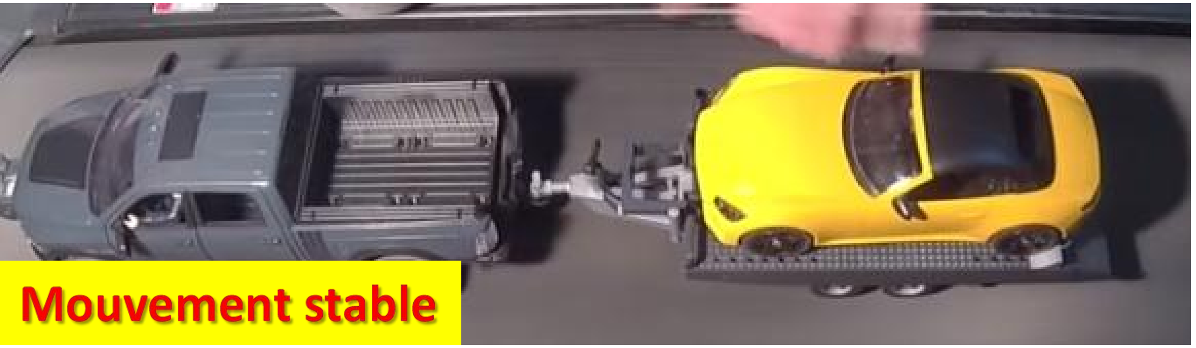
Mouvement stable

Effet d'Amortissement:
CHARGE SUR
LES ESSIEUS DE LA REMORQUE

Mouvement instable



Mouvement très instable

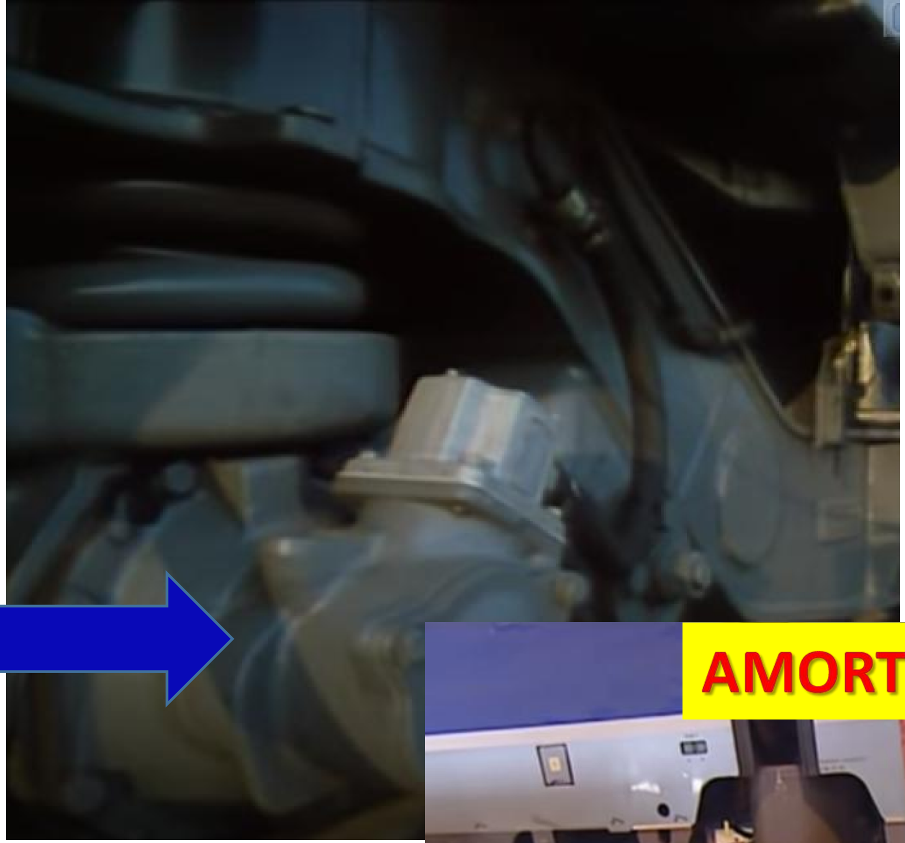


Mouvement stable

Mouvement instable

EFFET LACET- TRAINS

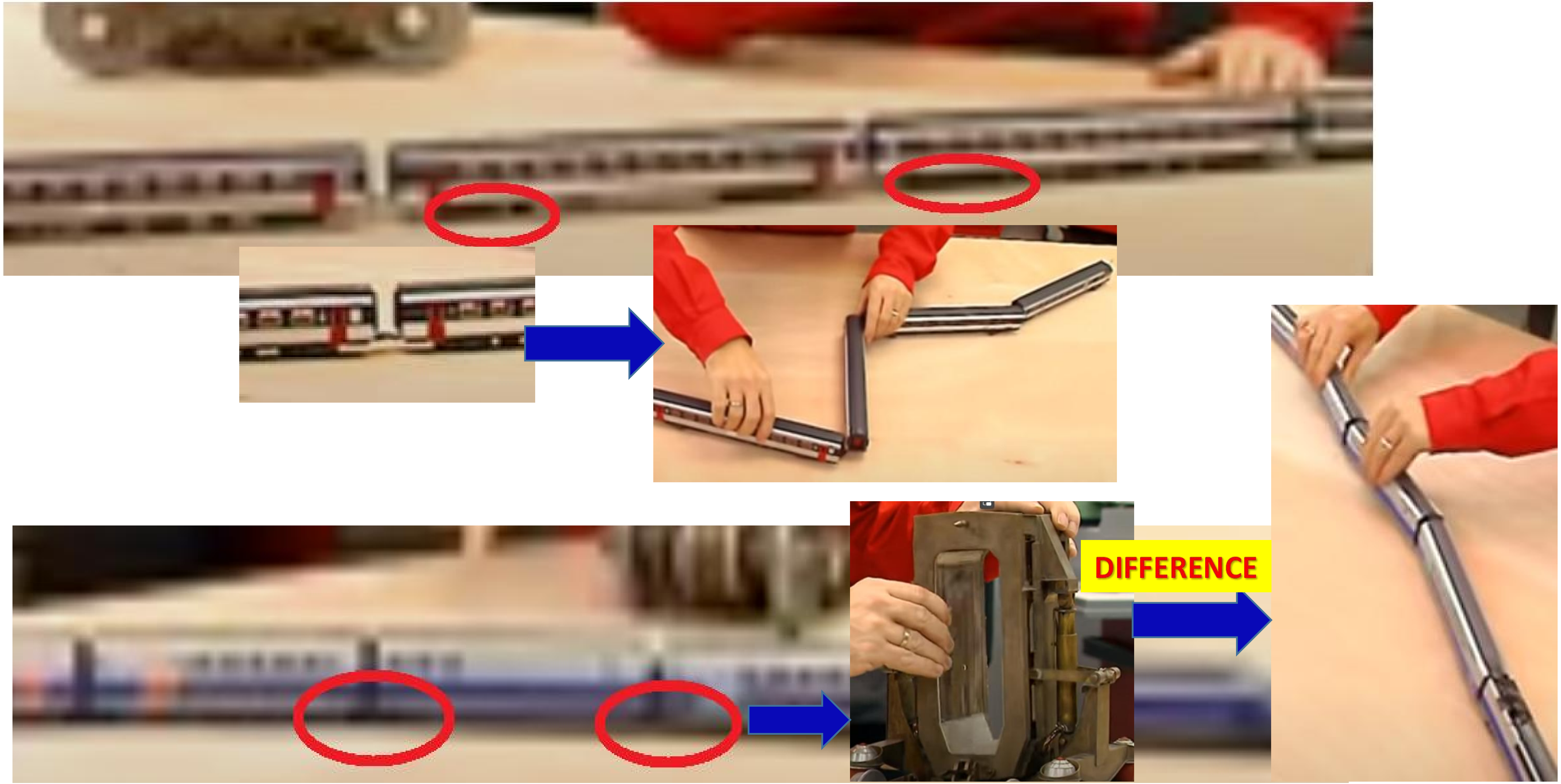
BOGIE



VIBRATIONS

AMORTISSEMENT

DIFFERENCE
TRAINS CLASSIQUES - TGV



MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

- ✓ On calcule le **Lagrangien pour le système forcé comme suit:**

$$L(x,\dot{x}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

- ✓ **L'équation de mouvement** est de la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha.\dot{x} + F(t)$$

Avec:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

EQUATION DU MOUVEMENT

- ✓ Finalement, on obtient L'équation de mouvement comme suit:

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha.\dot{x} + F(t)$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$$

- ✓ C'est une équation différentielle linéaire inhomogène avec second membre,

- ✓ Elle admet deux solutions:
  - Une solution générale et
  - Une solution particulière

SUITE

- Le <u>**mouvement forcé**</u> est exprimé en **présence de la force de frottement visqueuse** comme suit:

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Avec:

$$2\xi = \frac{\alpha}{m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Où *F(t)* est appelée la **fonction excitation extérieure**.

ξ, ω_0 :sont <u>**respectivement**</u> le **facteur d'amortissement** et **la pulsation propre** du système

RÉSOLUTION ANALYTIQUE

- La solution ***q(t)*** de l'équation différentielle ; **représente la réponse du système face à l'action extérieure**, qui est calculée par la somme de deux thermes:

$$q(t) = q_g(t) + q_p(t)$$

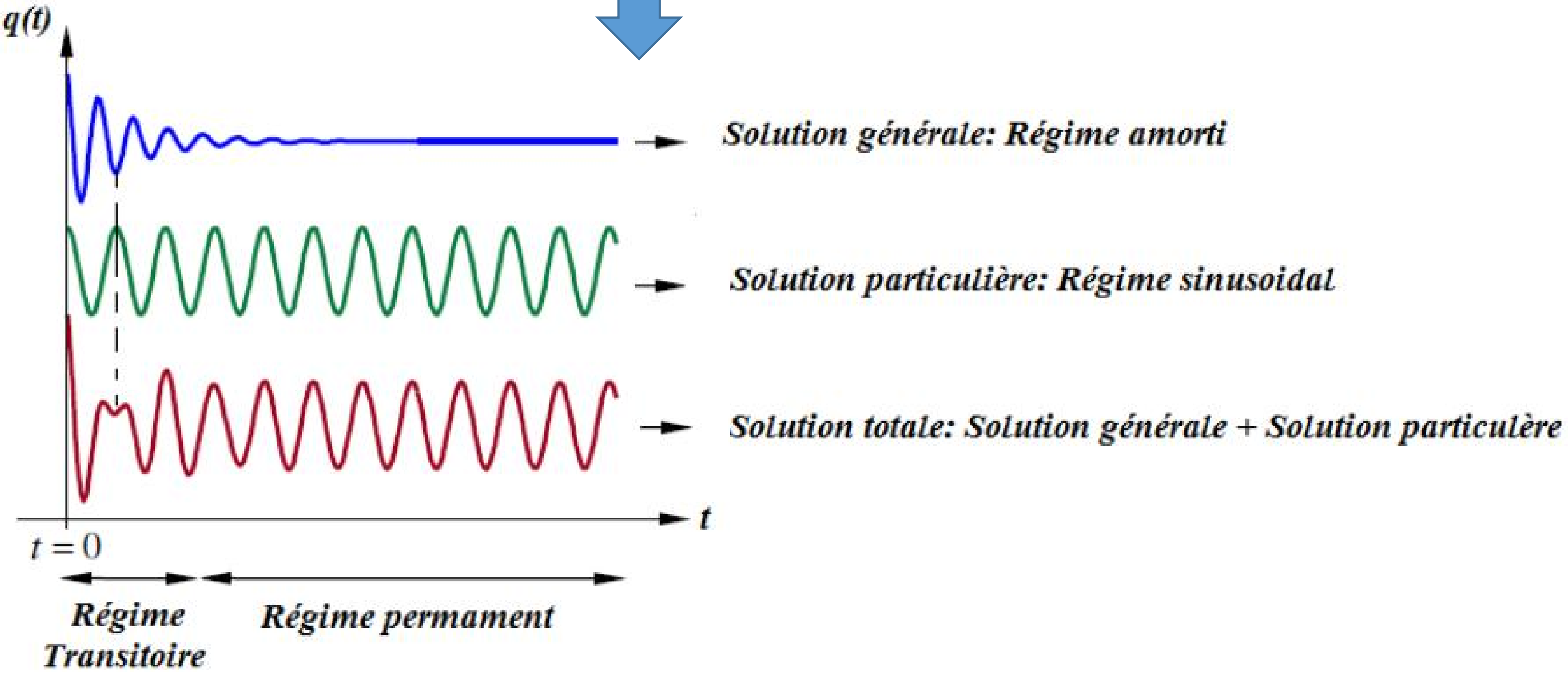
Où $q_g(t)$ et $q_p(t)$ représentent respectivement la **solution générale et la solution particulière** de l'équation différentielle,

- Il faut signaler qu'au **début du mouvement** ***q****(t)* **représente le régime transitoire**.
- **Au fil du temps** la solution homogène devient négligeable devant la solution particulière ; à ce moment on a: **le régime permanent**.
- Ainsi, la **solution totale** dans ce cas, sera de la forme suivante:

$$q(t) = q_p(t)$$

SUITE

Superposition du régime transitoire et du régime permanent



SUITE

- Dans le cas où l'excitation est sinusoïdale de type:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}(F_0 e^{j\omega t})$$

- La solution totale s'écrit alors comme suit:

$$q(t) = q_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

Où la constante *A* représente l'amplitude de la solution totale et φ le déphasage.

- On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme complexe :

$$q(t) = q_p(t) = \mathrm{Re}(Ae^{j(\Omega t+\varphi)})$$

SUITE

Avec

$$\dot{q}(t) = j\Omega A e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

$$\ddot{q}(t) = -\Omega^2 A e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Alors: **l'amplitude s'écrit sous la forme complexe** comme suit:

$$Ae^{j\varphi} = \frac{F_0}{-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2\xi j\Omega}$$

- **En module**

$$|A(\Omega)| = \frac{F_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}}$$

- **En phase**

$$\varphi = Artg\,\frac{2\xi\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

SUITE

✓ L'étude **des variations du module de l'amplitude** se fait par:

$$\left.\frac{d|A(\Omega)|}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 0$$

A cet effet on étudie les variations de la fonction *h(Ω)* :

$$\left.\frac{dh(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 0 \quad avec \quad h(\Omega) = (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2$$

Avec :

$$\left.\frac{dh(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2) + 8\xi^2\Omega$$

✓ On obtient ainsi, **deux pulsations**:

$$\Omega_{01} = 0$$

$$\Omega_{02} = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}$$

SUITE

- Après ; on calcule la deuxième dérivée de la fonction *h(Ω)*;

on obtient:

$$\left.\frac{d^2h(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega} = 4(\Omega^2-\omega_0^2)+8\Omega^2+8\xi^2 = 12\Omega^2-4(\omega_0^2-2\xi^2)$$

- On étudie le signe de la deuxième dérivée pour déterminer le maximum et le minimum,
  - Pour **la première pulsation** $\Omega=\Omega_{01}$ on a:

$$h''(\Omega_{01}) \prec 0 \quad \Rightarrow \quad A(\Omega_{01}) \succ 0$$

D'où la pulsation $\Omega=\Omega_{01}$ présente un minimum pour l'amplitude *A,*

  - Pour **la deuxième pulsation** $\Omega=\Omega_{02}$ on a :

$$h''(\Omega_{01}) \succ 0 \quad \Rightarrow \quad A(\Omega_{01}) \prec 0$$

D'où la pulsation $\Omega=\Omega_{02}$ présente un maximum pour l'amplitude *A*

SUITE

- ✓ Donc pour la pulsation $\Omega=\Omega_{02} = \Omega_r$ on obtient la **réponse maximale du système**.
- ✓ On a dans ce cas **le phénomène de résonnance**.

- ✓ A la **fréquence de résonnance** l'amplitude s'exprime comme suit:

$$\left|A(\Omega_r)\right|_{max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\Omega_r^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega_r^2}}$$

D'où

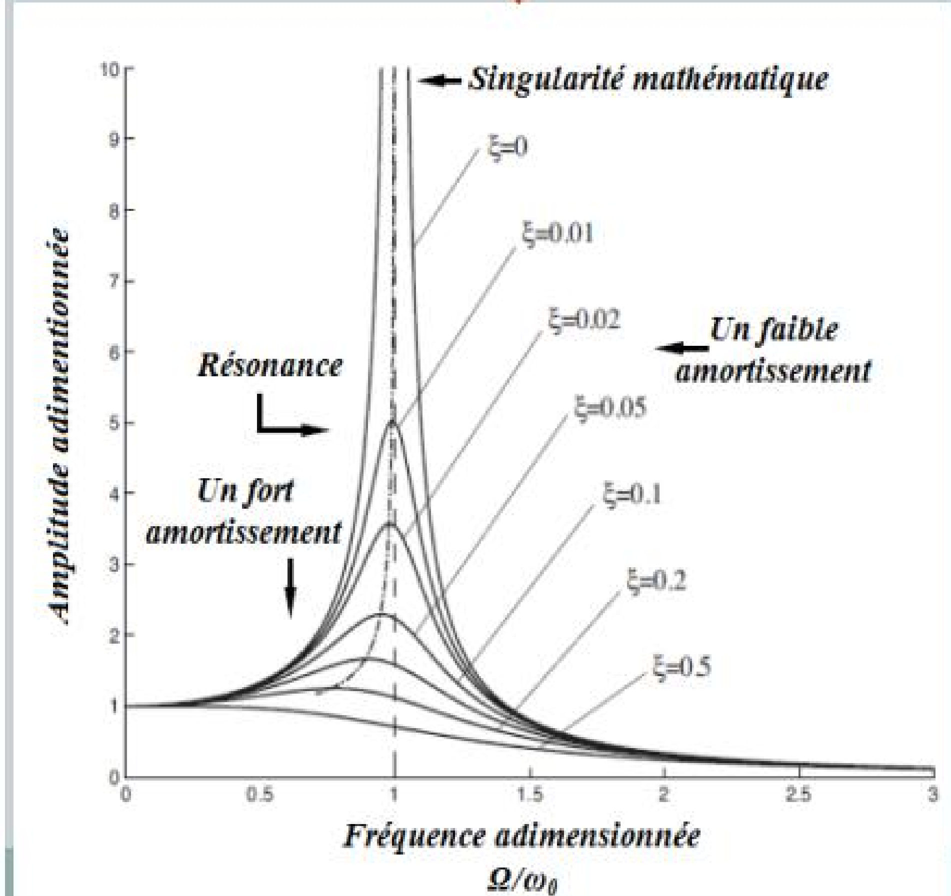
$$\left|A(\Omega_r)\right|_{max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\xi\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}} \approx \frac{F_0}{\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}}$$

- ✓ Pour des très <u>**faibles amortissements**</u> **;** l'amplitude maximale est égale à :

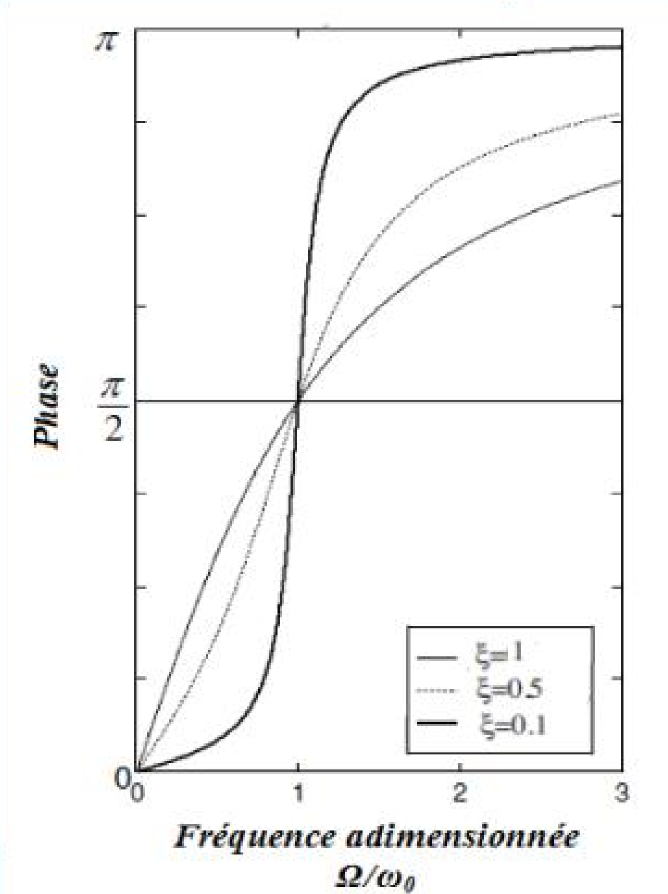
$$\left|A(\Omega_r)\right|_{max} \approx \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \quad avec \quad \xi \prec\prec \omega_0$$

SUITE

- ✓ La figure **illustre la variation du rapport de l'amplitude en fonction du rapport de la fréquence pour différentes valeur de ξ**



- ✓ La figure **représente la variation de la phase en fonction du rapport de la fréquence pour différents valeurs de ξ**



BANDE PASSANTE ET FACTEUR DE QUALITÉ

✓ On définit aussi :

- La **largeur de la bande passante** $\Delta\Omega$

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$$

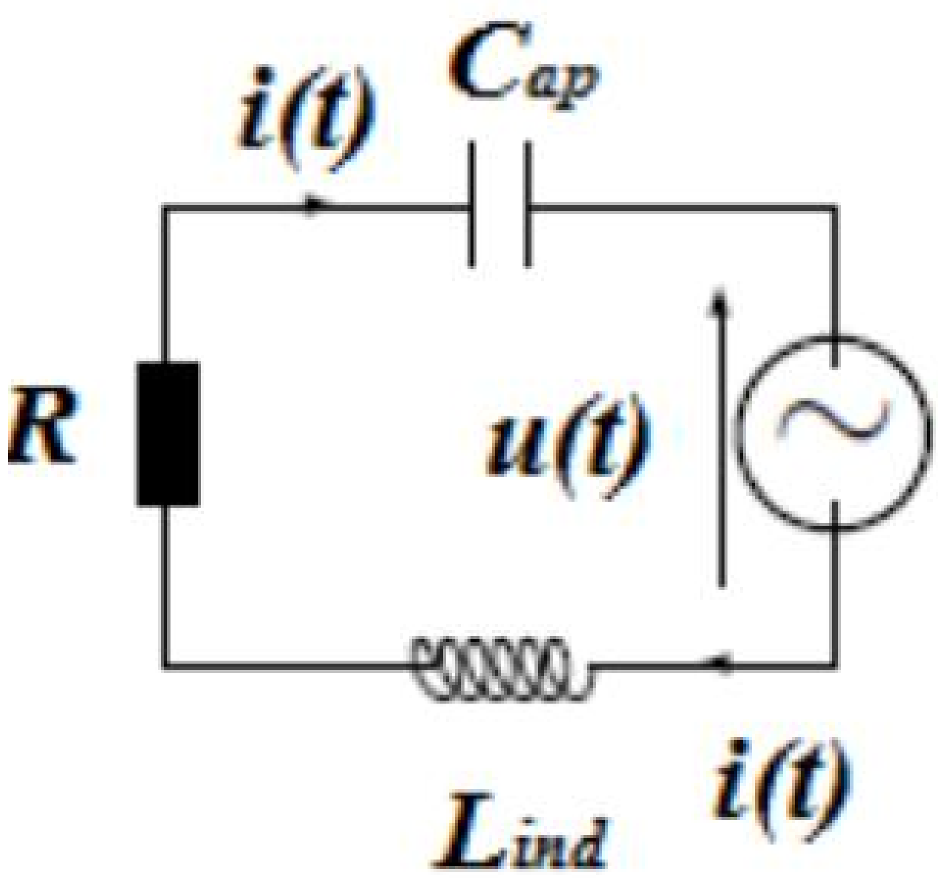
Où Ω_1 , Ω_2 sont des pulsations déduites par l'intersection de la courbe de l'amplitude de la réponse du système $A(\Omega)$ et la droite $\frac{A_{\max}(\Omega_r)}{\sqrt{2}}$

- **Le facteur de qualité** Q pour un faible amortissement:

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Omega_2 - \Omega_1}$$

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

- La figure ci-dessous illustre **le schéma du circuit oscillant R.L.C** en série alimenté par une source de tension U(t) :



$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

SUITE

- Le bilan des tensions s'écrit :

$$L_{ind}\frac{di(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C_{ap}}+Ri(t)=U(t)$$

ANALOGIE
Système électrique - Système mécanique

Sachant que le courant *i(t)* pendant un temps *dt* apporte une charge tel que :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

On obtient alors l'équation différentielle du mouvement comme suit :

$$L\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{C}=U(t)$$

On remarque que cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire forcé comme suit

$$\ddot{q}(t)+\frac{R}{L}\dot{q}(t)+\frac{q(t)}{LC}=\frac{U(t)}{L}\quad\Leftrightarrow\quad\ddot{x}(t)+\frac{\alpha}{m}\dot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=\frac{F(t)}{m}$$

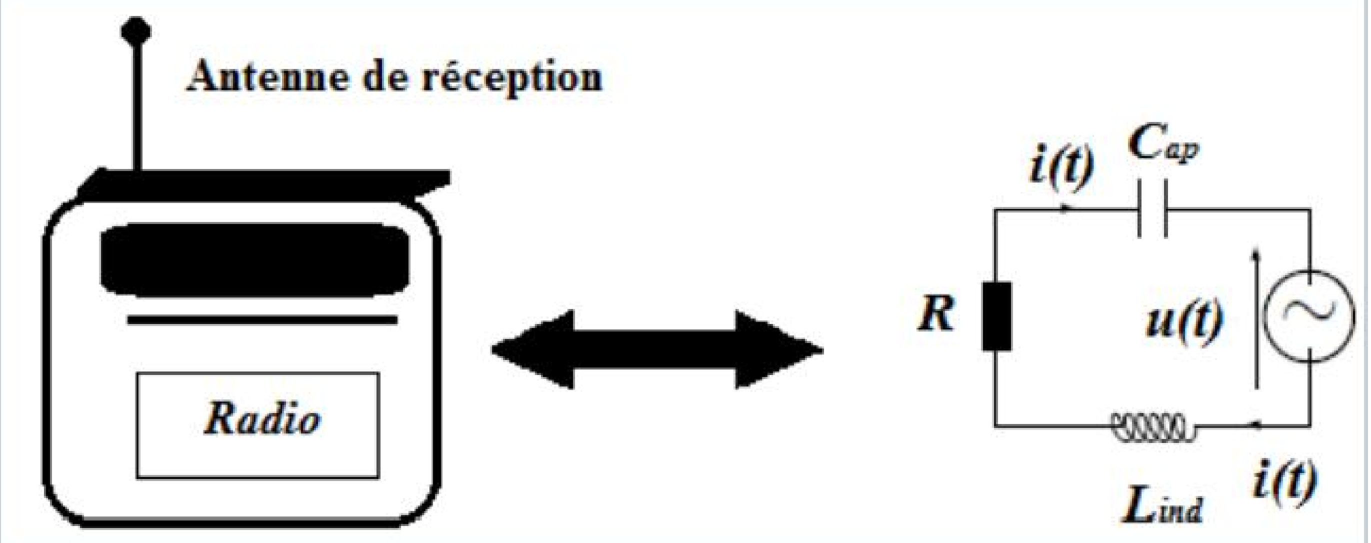
$$\begin{cases} L_{ind} \Leftrightarrow m \\ q(t) \Leftrightarrow x(t) \\ \dfrac{1}{c_{ap}} \Leftrightarrow k \end{cases}$$

$$\begin{cases} R \Leftrightarrow \alpha \\ U(t) \Leftrightarrow F(t) \end{cases}$$

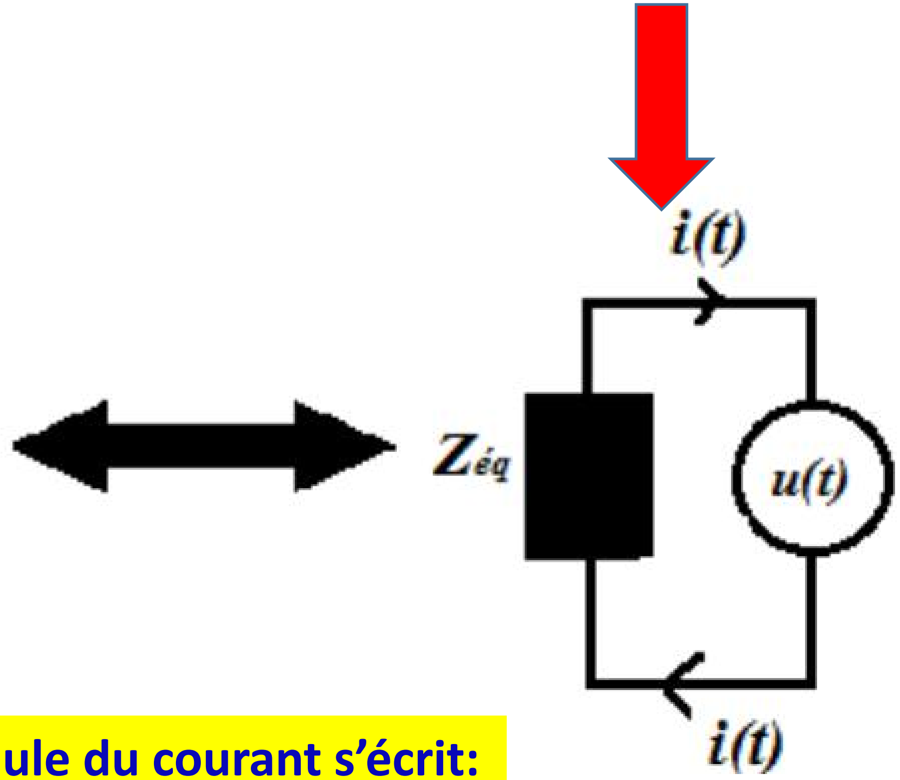
APPLICATIONS

✓ On considère un système de réception radio modélisé par un circuit R, L_{ind}, C_{ap} en série et alimenté par une source de tension sinusoïdale d'intensité:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t$$



LE CIRCUIT R.L.C EN SÉRIE est schématisé comme suit



- **L'impédance équivalente totale est égale**

$$\tilde{Z}_{éq} = R + j\left(L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega}\right)$$

- **Le module du courant s'écrit:**

$$I_0(\omega) = \frac{|u(t)|}{|\tilde{Z}_{éq}|} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + \left(L_{ind}\omega - \frac{1}{C_{ap}\omega}\right)^2}}$$

SUITE

- Le **module du courant est maximum** pour la valeur de: $I_{0max} = \dfrac{u_0}{R}$
- On a: $L_{ind}\omega - \dfrac{1}{C_{ap}\omega} = 0$
- On obtient **la pulsation correspondante**: $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{L_{ind}C_{ap}}} = \omega_0$

ω_r :est appelée **la pulsation de résonance** qui ne dépend que de l'inductance et de la capacité

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est **la bande passante**

ω_2, ω_1 Sont déterminées en résolvant **l'équation paramétrique** suivante:

$$\frac{|I_{0max}|}{|\sqrt{2}|} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + (L_{ind}\omega - \dfrac{1}{C_{ap}\omega})^2}}$$

LA BANDE PASSANTE

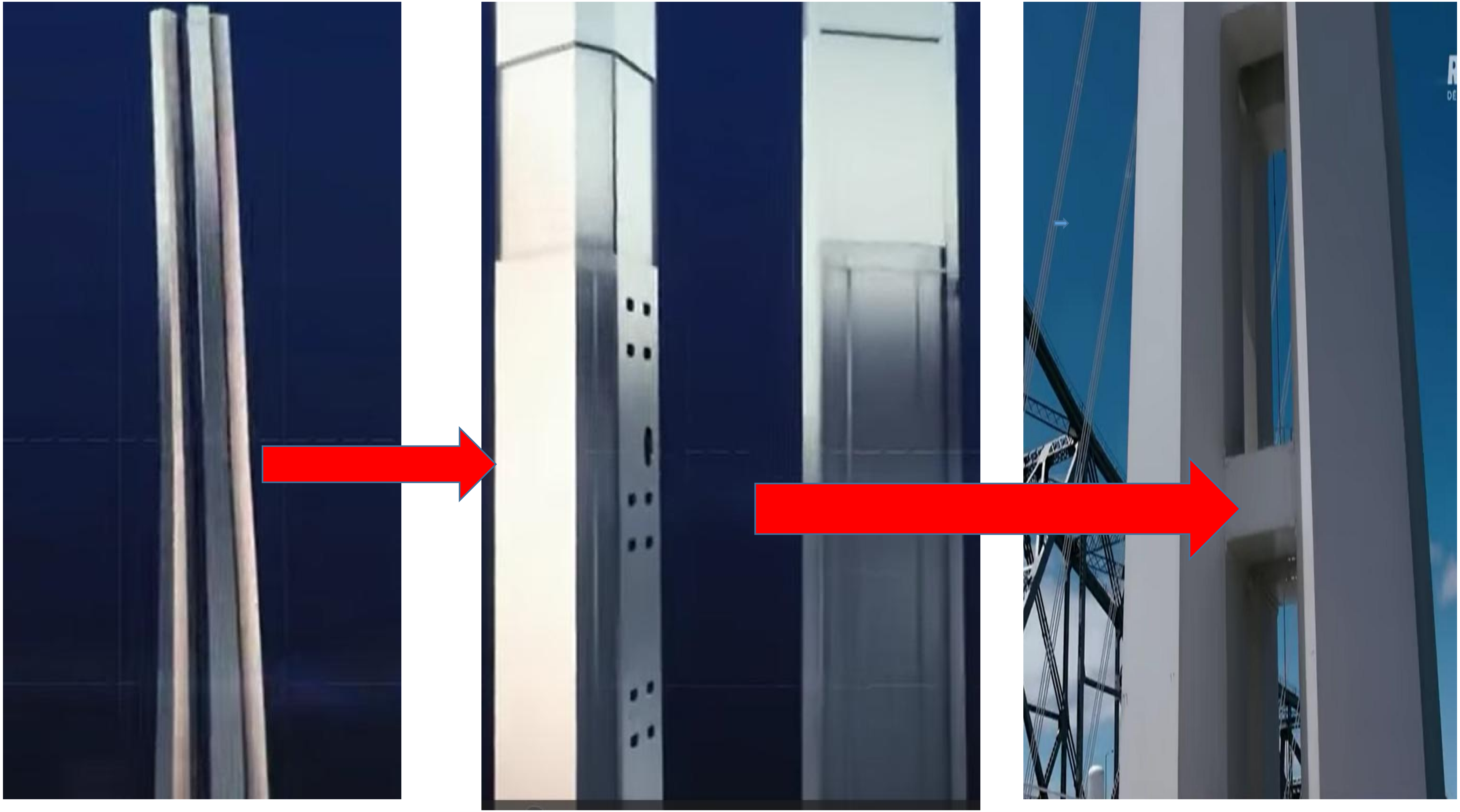
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L_{ind}}$$

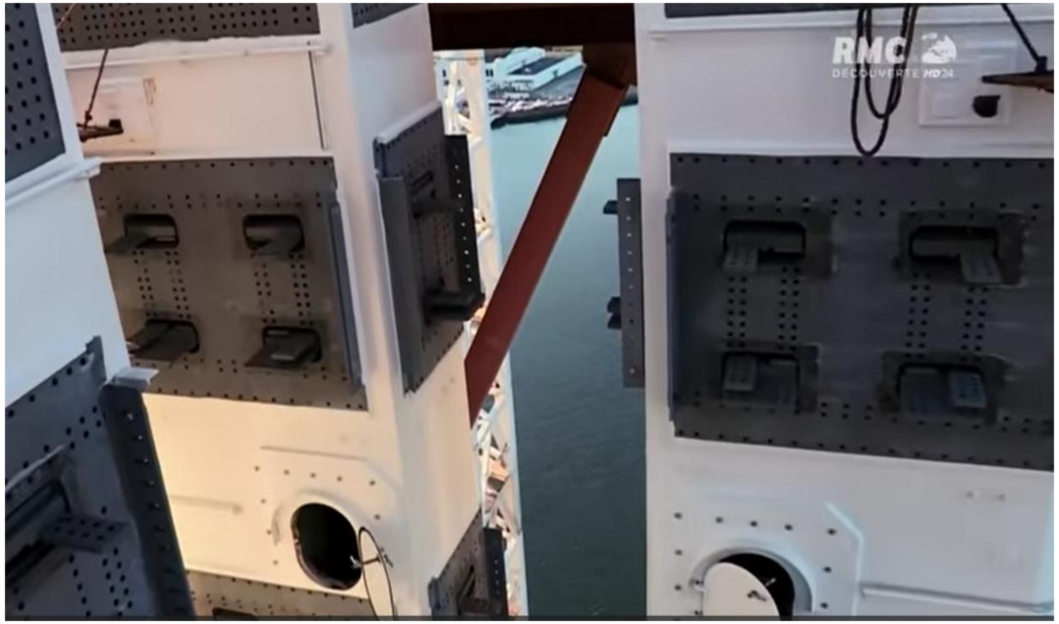
LE FACTEUR DE QUALITÉ

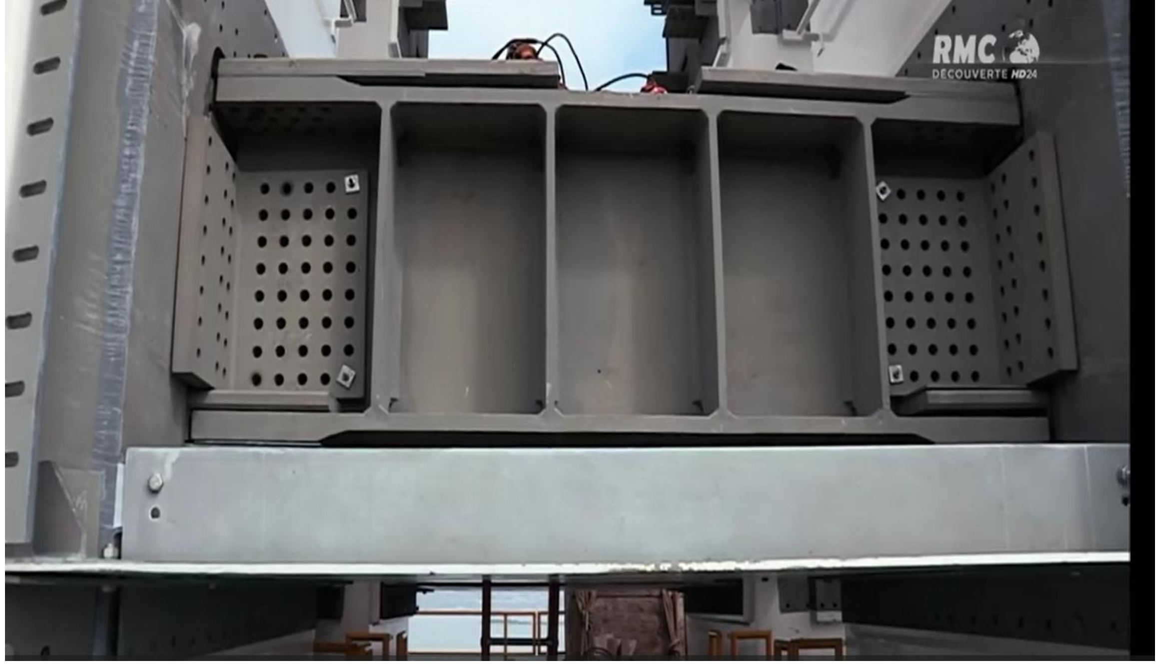
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L_{ind}\omega_0}{R}$$

REMARQUES IMPORTANTES

1. On constate que la fréquence de résonnance ne dépend pas de la résistance R,
2. Par contre la bande passante et le facteur de qualité varient en fonction de la résistance,
3. Pour une bonne application technique du système, c'est-à-dire avoir une très bonne réception du signal; il faut que la résistance du circuit soit faible
4. Pour amortir le séisme on doit faire face par deux approches
   - Par la résistance à l'énergie dégagée.
   - Par la flexibilité?







EFFET POGO

- **L'effet POGO** est, en mécanique des structures, un phénomène oscillatoire longitudinal instable qui peut se produire dans les étages à ergols liquides d'un lanceur, générant des chocs pouvant détruire le lanceur ou sa charge.
- Cet effet est provoqué par des fluctuations de poussée du moteur, qui engendrent des vibrations de structure et des colonnes du carburant liquide, qui à leur tour se répercutent sur l'alimentation du moteur.
- Lorsque ce cycle de perturbations entre en résonance, les oscillations augmentent et peuvent détruire les structures. Le nom provient du jeu appelé POGO-stick.
- Cet effet détruisit plusieurs fusées et satellites!!!!!

Ce qu'il faut retenir!

- **L'oscillation forcé dans le cas général** est régie par l'équation différentielle:

$$\ddot{q}(t)+2\xi\dot{q}(t)+\omega_0^2 q(t)=\frac{F(t)}{m}$$

- Il existe **deux régimes** :
  - **Le régime transitoire** :
    La solution totale du système est: $q(t)=q_g(t)+q_p(t)$

$q_g(t), q_p(t)$ représentent respectivement **la solution générale la solution particulière**

  - **Le régime permanent** :
    Caractérisé par **le phénomène** : **« La résonance »**

    la solution du système est de la forme: $q(t)=q_p(t)$

- Il faut signaler que **la force extérieure absorbe les pertes du système due aux forces de frottements,**

MERCI POUR VOTRE ATTENTION