MODULE: PHYSIQUE 03

VIBRATIONS

Présenté par

Pr Fouad BOUKLI HACENE

Professeur

Email: bhfouad@yahoo.fr

fouad.boukli-hacene@enp-oran.dz

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE MAURICE AUDIN D'ORAN

Département: Formation préparatoire
Module: Vibrations
Niveau : Deuxième année

CHAPITRE 2

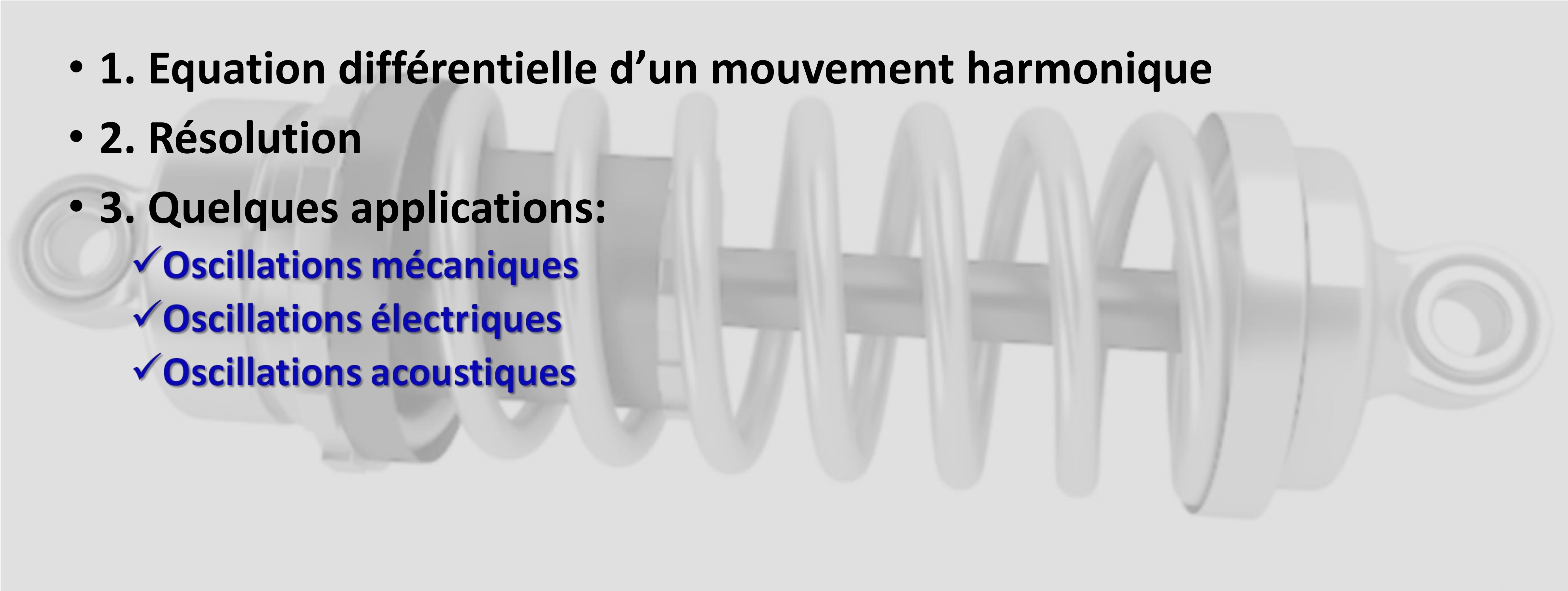
OSCILLATIONS LIBRES À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

Présenté par
Pr. Fouad BOUKLI HACENE
bhfouad@yahoo.fr /fouad.boukli-hacene@enp-oran.dz

1. Introduction
2. Méthodes de calcul
3. Equation de mouvement- Résolution
4. Applications

OBJECTIFS

- 1. Equation différentielle d’un mouvement harmonique
- 2. Résolution
- 3. Quelques applications:
    - ✓Oscillations mécaniques
    - ✓Oscillations électriques
    - ✓Oscillations acoustiques



INTRODUCTION

- Un système isolé oscillant à un degré de liberté est déterminé par la coordonnée généralisée q(t) qui est **l'écart d'amplitude par rapport à l'équilibre stable**.
- **Les oscillations de faible amplitude** autour de la position d'équilibre peuvent être assimilées à **des mouvements linéaires**
- **L'énergie potentielle peut s'exprimer sous la forme quadratique de la coordonnée généralisée *q(t).***

EQUATION FONDAMENTALE

- On définit **l'oscillation harmonique** par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

Où $\boldsymbol{\omega_0}$ est appelée la pulsation propre du système

- **La période propre** du mouvement oscillatoire est **indépendante de l'amplitude** du mouvement.
- En revanche, **au-delà d'une certaine amplitude, l'oscillation devient non linéaire**.
- Dans ce cas-la, la période propre dépend de l'amplitude

RÉSOLUTION

- La **solution** de cette équation différentielle est de **la forme sinusoïdale** telle que:

1. Pour ***la première forme de la solution q(t):***

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

✓Les constantes A et φ représentent respectivement l'amplitude des oscillations et le déphasage qui sont déterminées par les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

2. Pour ***la deuxième forme de la solution q(t):***

$$q(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

✓Elle souligne que **les solutions forment un espace vectoriel**

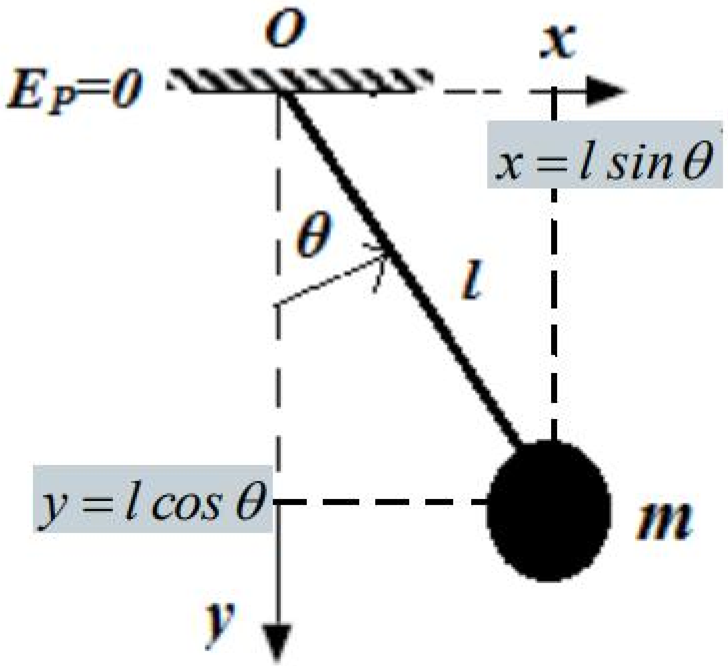
MÉTHODES DE CALCUL

- **MÉTHODE 1**: **Conservation de l'énergie totale**

1.1 Pour le pendule simple: **Le vecteur de position** s'exprime comme suit:

$$\vec{om}\begin{pmatrix} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

D'où $|v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l\dot{\theta})^2$



- ✓ **L'énergie cinétique s'écrit :** $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
- ✓ **L'énergie potentielle:** $E_p = -mgl\cos\theta$
- ✓ **L'énergie totale du système:** $E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$

SUITE

- En appliquant **le principe de conservation de l'énergie totale** pour un **système conservatif** ; on a:

$$\frac{dE_T}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta\right]=0$$

D'où:

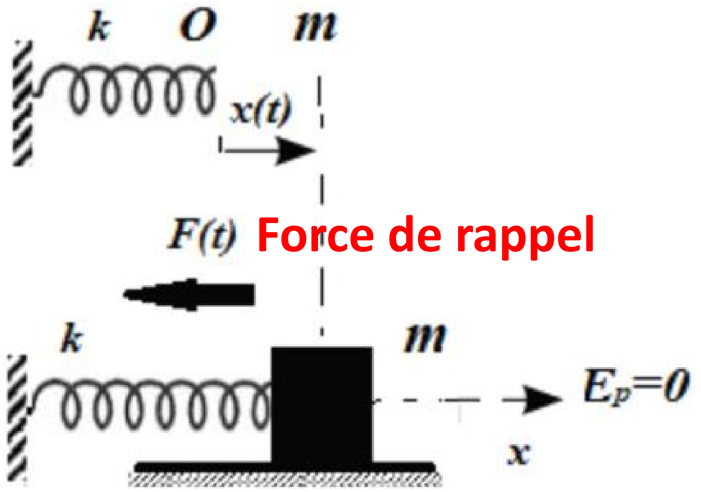
$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgl\dot{\theta}\sin\theta=0 \quad \Rightarrow \quad l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

✓On obtient alors **l'équation différentielle pour des petites oscillations** comme suit :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad avec \quad \sin\theta\cong\theta$$

SUITE

1.1 Pour un ressort étiré ; dont la longueur passe de *l* à ***l+x*** exerce une force pour revenir à sa longueur initiale ; proportionnelle à l'allongement algébrique ***x***



- Le **vecteur de position** est égal à

$$\vec{om} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}\vec{i}$$

- **L'énergie cinétique** s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- **L'énergie potentielle**, s'écrit sous la forme: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

- Alors, l'énergie totale **du système** s'écrit sous la forme:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

SUITE

- **<u>MÉTHODE 2</u>**: **Le formalisme de Lagrange – Euler**

1. On définit la fonctionnelle ***L*** appelé ***le Lagrangien du système*** comme suit:

$$L(q,\dot{q}) = E_c - E_p$$

2. On définit **l'action du système** comme **la sommation**, entre l'intervalle du temps, $[t_0, t_1]$ le long du trajet du système, de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle:

$$\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q})\mathrm{dt}$$

3. La détermination du trajet se fait par **une méthode variationnelle**.
4. Cette méthode aboutit aux **équations d'Euler-Lagrange** qui donnent des chemins sur lesquels **l'action est minimale.**

SUITE

- En appliquant le **principe de moindre action**:

$$\partial \Gamma = 0$$

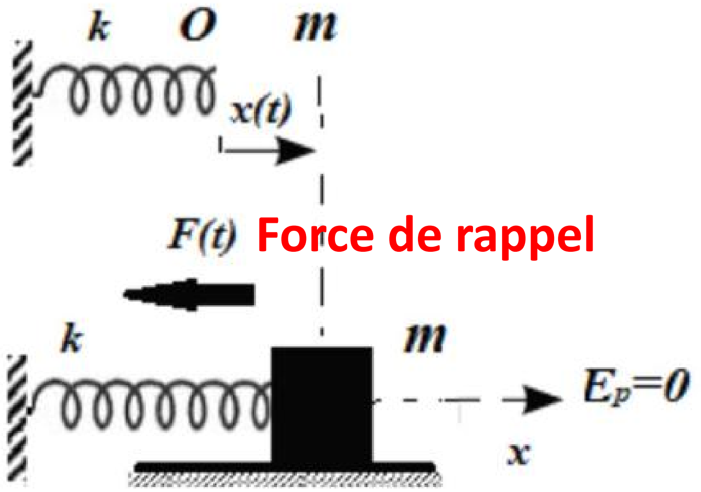
On obtient l'équation ***d'Euler-Lagrange*** pour **un système conservatif** comme suit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}) = 0 \qquad i = 1, n$$

APPLICATIONS

1. OSCILLATIONS MÉCANIQUES:

1. 1 Un ressort étiré ; dont la longueur passe de *l* à ***l+x*** exerce une force pour revenir à sa longueur initiale ; proportionnelle à l'allongement algébrique ***x***



- Le **vecteur de position** est égal à

$$\vec{om} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}\vec{i}$$

- **L'énergie cinétique** s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- **L'énergie potentielle**, s'écrit sous la forme: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

- Alors, le **Lagrangien du système** s'écrit sous la forme:

$$L(x,\dot{x}) = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

SUITE

- **L'équation du mouvement** est de la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \qquad avec \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x}=-kx$$

D'où:

$$m\ddot{x}+\underbrace{kx}_{\text{Force de rappel}}=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

✓ La pulsation propre est égale :

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

✓ La solution de l'équation différentielle s'écrit alors:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

EXEMPLE: LA CHUTE LIBRE : LE BUNGEE

- Le saut à l'élastique, aussi appelé **benji, bungie**, bungy jumping ou encore bungee.
- C’est une activité ludique et sportive de plein air qui consiste à se jeter dans le vide avec une corde élastique accrochée aux chevilles ou au torse, destinée a ralentir puis a stopper la chute
- L’objectif visé est de restituer les sensations fortes ressenties lors d'une chute libre

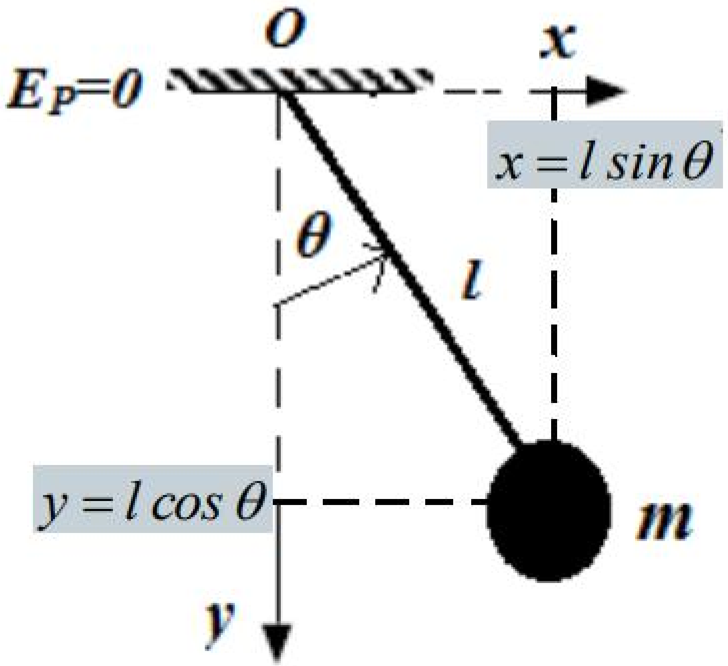
MÉTHODES DE CALCUL

1. OSCILLATIONS MÉCANIQUES:

1. 2 Un pendule simple: **Le vecteur de position** s'exprime comme suit:

$$\vec{om}\begin{pmatrix} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

D'où $|v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l\dot{\theta})^2$



- **L'énergie cinétique s'écrit :** $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
- **L'énergie potentielle:** $E_p = -mgl\cos\theta$
- Alors, le ***Lagrangien*** du système s'écrit : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$

SUITE

- Dans la **limite de petites oscillations** on a : $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad et \quad \sin\theta \simeq \theta$

- **L'équation du mouvement** s'écrit: $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta$ ⟹ Moment de rappel

- Finalement **l'équation différentielle** s'exprime comme suit:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

- D'où; **la pulsation propre est indépendante de l'amplitude** et est égale à

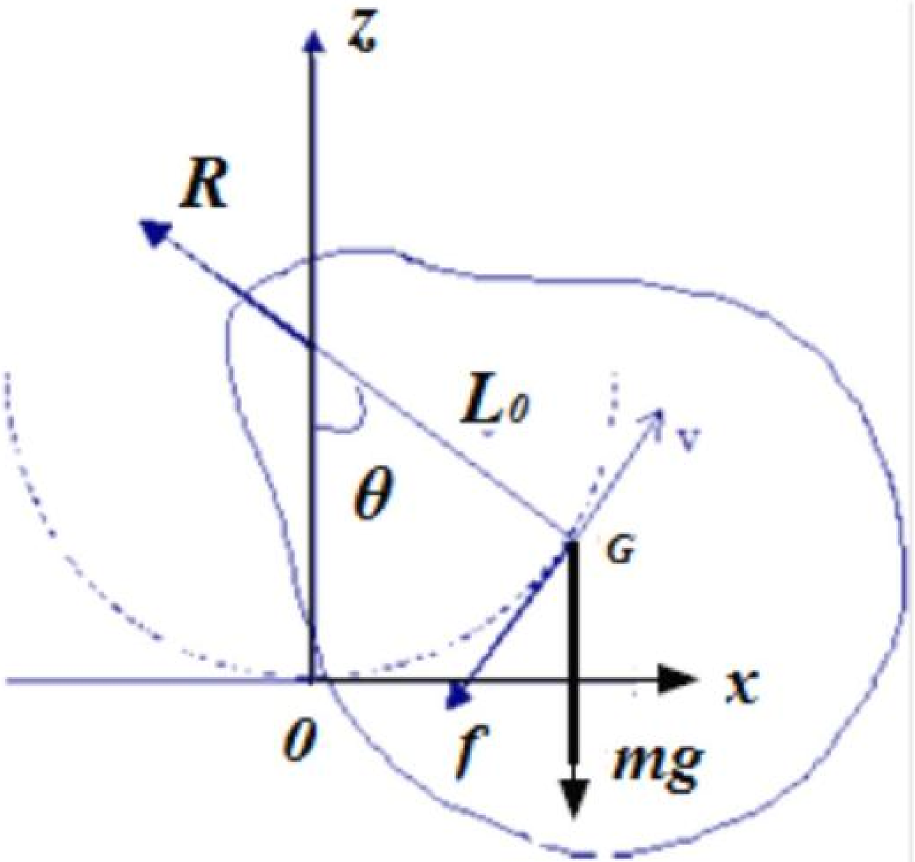
$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

- La **solution de l'équation différentielle** s'écrit: $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Suite

1.3 **Pour un pendule pesant** :

- On appelle pendule pesant, tout corps solide mobile autour d'un axe (en principe horizontal) ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur.
- Déplacé de sa position d'équilibre (stable) dans laquelle le centre de gravité est à la verticale de l'axe, le solide se met à osciller de part et d'autre de cette position dite d'équilibre.
- **Quelques exemples**: Dans la vie quotidienne on trouve des pendules pesants ; Un balancier d'horloge, une balançoire, etc.
- Le pendule simple est le cas particulier du pendule pesant



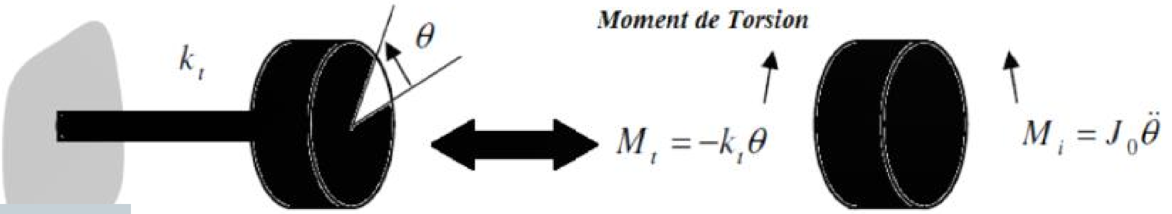
SUITE

- Pour un pendule pesant quelconque, **l'effet de l'inertie** sur la rotation ne peut pas être ramené à une masse ponctuelle placée au centre de gravité.
- C'est l'ensemble du solide qui tourne, et **son inertie** est caractérisée par son **moment d'inertie** noté ***J*** et la distance ***L₀*** du centre de gravité à l'axe de rotation.
- **L'énergie cinétique** s'écrit: $E_c = \frac{1}{2} J_{/o} \dot{\theta}^2$
- **L'énergie potentielle** s'exprime: $E_p = mgZ$ avec $Z = L_0(1-\cos\theta)$
- Le **Lagrangien** est égale alors: $L(\dot{\theta},\theta) = \frac{1}{2} J_{/o} \dot{\theta}^2 - mgL_0(1-\cos\theta)$
- **L'équation de mouvement** est déterminée: $\ddot{\theta} + \frac{mgL_0}{J_{/o}}\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$
- D'où La **pulsation propre** est égale à : $\omega_0^2 = \frac{mgL_0}{J_{/o}}$
- La **solution** est de la forme: $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

SUITE

1.4 Pendule de torsion:

- Un corps rigide de moment d'inertie J_0 oscille autour d'un axe avec une constante de torsion k_t



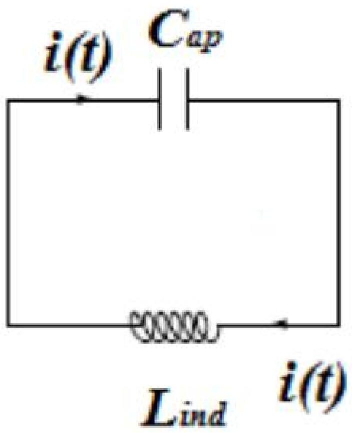
- **L'énergie cinétique** s'écrit : $E_c = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$
- Pour **l'énergie potentielle** on a: $E_p = \frac{1}{2} k_t \theta^2$
- Le **Lagrangien du système** s'écrit alors: $L(\dot{\theta},\theta) = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_t \theta^2$
- L'**équation de mouvement**: $\ddot{\theta} + \frac{k_t}{J_0}\theta = 0$
- La **pulsation propre**: $\omega_0^2 = \frac{k_t}{J_0}$
- La **solution de l'équation** est de la forme:

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- **Mouvement oscillatoire de torsion du pont de TACOMA aux U.S.A le 7 novembre 1940**

SUITE

2. Oscillations électriques:



- On considère un circuit (***L_{ind}, C_{ap}***) parcouru par un courant ***i(t)*** représenté comme suit :
- D'après la **loi des mailles du Kirchhoff** ; le bilan de tension s'écrit comme suit: $$L_{ind}\frac{di(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C_{ap}}=0$$

- Sachant que le courant ***i(t)*** pendant un temps ***dt*** apporte une charge ***dq***: $$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$
- On obtient **l'équation différentielle de mouvement**: $$L_{ind}\ddot{q}(t)+\frac{q(t)}{C_{ap}}=0$$
- Finalement; on a **l'équivalence**: $$\ddot{q}(t)+\frac{q(t)}{L_{ind}C_{ap}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=0$$

ANALOGIE: SYSTÈME MÉCANIQUE-SYSTÈME ÉLECTRIQUE

$$\begin{cases} L_{ind} & \Leftrightarrow & m \\ q(t) & \Leftrightarrow & x(t) \\ \dfrac{1}{c_{ap}} & \Leftrightarrow & k \end{cases}$$

Ce qu'il faut retenir!

- **L'oscillation harmonique est dans le cas général** est régie par l'équation différentielle:

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

- **La solution de cette équation différentielle** est de la forme:

$$q(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

- **La période propre T_0** est donnée comme suit:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Où ω_0 est appelée **la pulsation propre** du système,

- Il faut signaler que le système conserve son énergie totale ,

MERCI POUR VOTRE ATTENTION