theorie de systeme

Dr. Aberkane Moussa

École National Polytechnique MAURICE Audin ENP-MA d'Oran

Département : Génie Électrique.

Email : *moussa.aberkane@enp-oran.dz*

Table des matières

Objectifs

Ce cours permet à l'étudiant d'acquérir les outils fondamentaux pour l'étude des systèmes de commande automatique linéaires.

Ce cours concerne uniquement l'étude des systèmes linéaires, continus, invariants dans le temps et mono variables (systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants).

CHAPITRE II : Transformée de Laplace

1. Introduction

La transformée de Laplace est une méthode mathématique puissante utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Elle permet de convertir une équation différentielle dans le domaine temporel en une équation algébrique dans le domaine de Laplace, ce qui facilite grandement la résolution [4][*].

2. Formulation mathématique

Soit f(x) une fonction réelle de la variable réelle t, définie pour toute valeur de , sauf éventuellement pour certaines valeurs, en nombre fini dans tout intervalle fini, et nulle pour t<0.

La transformée Laplace de f(t) est définie par l'égalité : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)}.\, f(t)\,dt$

p étant une variable complexe.

On dit que F(p) est la transformée de f(t) et que f(t) est l'original de F(p).

Pour résoudre les équations différentielles grâce à la transformée de Laplace, il est nécessaire de savoir effectuer le passage de f(t) à F(p) mais aussi de F(p) a f(t).

On note : $f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$ ou aussi $F(p)=TL\ f(t)$.

Exemple 01 :

La figure 1 représente la fonction échelon unitaire u(t) ou Heaviside :

$$u(t)=\begin{cases} 0\ si\ t<0 \\ 1\ si\ t>0 \end{cases}$$

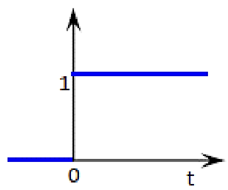


Fig. 01. Rampe (échelon de vitesse)

Exemple 02 :

Soit à calculer $L\{f^{'}(t)\}$

En utilisant l'intégration par partie, on aura : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)}.\ f'(t)dt$

Si la condition initiale est nulle f(0)=0 on trouve : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)}.\ f'(t)dt=pF(p)$

De même pour la dérivée seconde : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)}.\ f'(t)dt=p^2 F(p)-pf(0)-f'(0)$

De même, si toutes les conditions initiales sont nulles $f(0)=f^{'}(0)=f^{'}{'}(0)=0$, alors : $L\{f^n(t)\}=p^n F(p)$

2.1. Propriétés et théorèmes

Les propriétés de la TL sont réunies dans le tableau ci-après :

Propriété	$f(t)$	$F(p)$
Linéarité	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(p)+bF_2(p)$
Dérivation	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
Intégration	$\int f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
Retard	$f(t-\theta)$	$e^{-\theta p}\cdot F(p)$
Changement d'échelle	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$

A ces propriétés, on doit joindre les théorèmes suivants :

$$Théorème\,de\,la\,valeur\,initiale \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(x)=\lim_{p\to\infty}\{pF(p)\}$$

$$Théorème\,de\,la\,valeur\;finale \Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(x)=\lim_{p\to 0}\{pF(p)\}$$

Ce résultat n'est valable que si n'a aucun pôle (racine du dénominateur) dans le demi-plan droit du plan complexe et aucun pôle sur l'axe imaginaire, à l'exception du pôle simple à l'origine [5].*

2.2. Table du transformée de Laplace

$f(t)$	$F(p)$	*Remarque*
$\delta(t)$	1	
$u(t)=1$	$\frac{1}{p}$	$p>0$
$t\cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$p>0$
$t^2\cdot u(t)$	$\frac{2}{p^3}$	$p>0$
$t^n\cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n\in\mathbb{N}$ *et* $p>0$
$e^{-at}f(t)\cdot u(t)$	$F(p+a)$	$a\in\mathbb{R}$
$e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	*Réel* $(p+a)>0$
$t^n e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$n\in\mathbb{N}$ *et* $(p+a)>0$
$e^{-at}\sin(wt)\cdot u(t)$	$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$	$(p+a)>0$
$e^{-at}\cos(wt)\cdot u(t)$	$\frac{p}{(p+a)^2+w^2}$	$(p+a)>0$
$\left[1-\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1 e^{\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{\frac{t}{\tau_2}}\right)\right]$	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$p>0$
$1-\frac{e^{-m\cdot w_0\cdot t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left((w_0\sqrt{1-m^2})\cdot t-\varphi\right)$ $\varphi=-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$	$\frac{1}{p\left[1+2m\frac{p}{w_0}+\left(\frac{p}{w_0}\right)^2\right]}$	$m<0$
$1-\frac{e^{-m\cdot w_0\cdot t}}{\sqrt{1-m^2}}\cos\left((w_0\sqrt{1-m^2})\cdot t-\varphi\right)$ $\varphi=\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\right)$	$\frac{1}{p\left[1+2m\frac{p}{w_0}+\left(\frac{p}{w_0}\right)^2\right]}$	$m<0$

3. Transformée Inverse de Laplace

On peut exprimer la Transformée inverse, en utilisant les intégrales de Fourrier et de Melin-Fourrier.

Si F(p) est la Transformée de Laplace d'une fonction f(t) , on a :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} F(p)\,dp$$

Où c est une constante, appelée abscisse de convergence.

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, F(p) est immédiatement reconnaissable dans la table,
- soit, lorsque la fonction n'apparaît pas dans la table, décomposer en fractions partielles et écrire en termes de fonctions simples de p pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

A noter que cette manière simple de trouver la Transformée inverse est basée sur le fait qu'il existe une correspondance unique entre la fonction temporelle et sa transformée inverse de Laplace du fait de la continuité de la fonction temporelle.

Remarque :

Dans le domaine de la théorie du contrôle, F(p) est fréquemment mise sous la forme : $F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$

Avec A(p) et B(p) des polynômes en p, et degré de B(p) ≤ degré de A(p)

3.1. Si F(p) ne contient que des pôles distincts

F(p) peut, alors, être décomposé en une somme de fractions partielles :

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{a_1}{p+p_1}+\frac{a_2}{p+p_2}+\ldots+\frac{a_n}{p+p_n}$$

Avec : $a_i=\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_i)\right]_{p=-p_i}$ a_i : constante appelée résidu au pôle $p = p_i$.

Exemple 01 :

Trouver la Transformée Inverse de $F(p)=\frac{p+3}{(p+2)(p+1)}$. 2 pôles distincts : p = –1 , p = –2

$F(p)=\frac{a_1}{p+1}+\frac{a_2}{p+2}$ avec : $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, donc F(p) devient $F(p)=\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p+2}$

⇨ $f(t)=2e^{-t}-e^{-t}$.

Remarque :

Dans le cas où le degré de B(p) > degré de A(p) dans $F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}$ il faut alors diviser le numérateur par dénominateur, ensuite appliquer la méthode des fractions partielles.

Exemple 02 :

Trouver la Transformée Inverse de $G(p)=\frac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+2)(p+1)}$

En divisant le numérateur par le dénominateur, on obtient : $G(p)=p+2+F(p)$

3.2. Si F(p) contient des pôles multiples :

Soit p_1 le pôle multiple de F(p) , r étant l'indice de multiplicité de ce pôle.

$$F(p)=\frac{(B(p))}{(A(p))} \text{, Avec } A(p)=(p+p_1)^r(p+p_{(r+1)})(p+p_{(r+2)})\ldots\ldots(p+p_n)$$

Alors F(p) s'écrit : $F(p)=\frac{(B(p))}{(A(p))}=\frac{b_r}{(p+p_1)^r}+\frac{b_{(r-1)}}{(p+p_1)^{(r-1)}}+\ldots\ldots+\frac{b_1}{((p+p_1))}+\frac{a_{(r+1)}}{(p+p_{(r+1)})}+\frac{a_{(r+2)}}{(p+p_{(r+2)})}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{(p+p_n)}$

Exemple :

Trouver la Transformée Inverse de $F(p)=\frac{(p^2+2p+3)}{(p+1)^3}$

$$F(p)=\frac{b_3}{(p+1)^1}+\frac{b_2}{(p+1)^2}+\frac{b_1}{(p+1)^3}$$

Avec : $b_3 = 2$, $b_2 = 0$, $b_1 = 1$,

donc F(p) devient : $F(p)=\frac{2}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+1)^1}$

La fonction inverse de F(p) est $f(t)=(t^2+1)e^{-t}$

3.3. Si F(p) contient des pôles complexes conjugués :

$$F(p)=\frac{(B(p))}{(A(p))}=\frac{(a_1 p+a_2)}{((p+p_1)(p+p_2))}+\frac{a_3}{((p+p_3))}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{((p+p_n))}$$

Avec a_1 et a_2 les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(a_1 p+a_2)_{(p=-p_1)}=\left[\frac{(B(p))}{(A(p))}(p+p_1)(p+p_2)\right]_{(p=-p_1 \, ou \, p=-p_2)}$

Exemple :

Trouver la Transformée Inverse de $F(p)=\frac{(p+1)}{(p(p^2+p+1))}$

On a : $p^2+p+1=0$ pour $p=-0{,}5\mp j0{,}86$

donc : $F(p)=\frac{(a_1 p+a_2)}{((p+0{,}5+j0{,}86)(p+0{,}5-j0{,}86))}+\frac{a}{p}$

Après des calcule mathématique on trouve $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$

donc F(p) s'écrit : $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{-p}{p^2+p+1}$

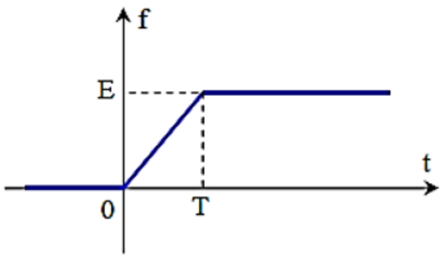
Ce qui donne pour $f(t)=1-e^{-0{,}5t}\cos(0{,}86t)+\frac{0{,}5}{0{,}86}e^{-0{,}5t}\sin(0{,}86t)$

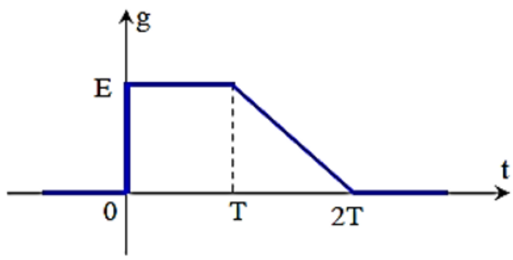
4. Exercices :

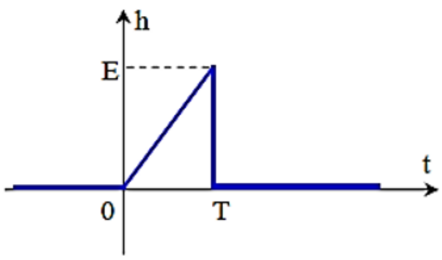
1. Calculez-les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :

- $f(x) = 4\left(1 - e^{-0.1t}\right)$
- $f(t) = e^{-at} \sin wt \cdot u(t)$
- $f(t) = \dfrac{t^2}{2}$
- $f(t) = t \cdot e^{-at} u(t)$
- $f(x) = e^{-at}$
- $f(t) = \cos wt$
- $f(t) = t^5 e^{2t}$
- $f(t) = e^{-0.5t} u(t-2)$

2. Trouvez les fonctions temporelles des signaux ci-dessous en déduire leurs transformé de Laplace.







3. Calculez les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :

$$\text{a)} F(p) = \frac{5p+16}{(p+2)^2(p+5)}, \qquad \text{b)} F(p) = \frac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2}$$

$$\text{c)} F(p) = \frac{p(p+2)}{p^2+2p+2}, \qquad \text{d)} F(p) = \frac{5(p+2)}{p^2(p+1)(p+3)},$$

II

CHAPITRE III : Représentation des systèmes par équations différentielles

1. Introduction

La modélisation des systèmes dynamiques à l'aide des équations différentielles est une méthode fondamentale en ingénierie des systèmes et en contrôle automatique. Cette représentation permet de décrire la relation entre les entrées et les sorties d'un système en fonction du temps, en tenant compte de ses caractéristiques internes [6]*.

Les équations différentielles sont particulièrement utiles pour modéliser les systèmes mécaniques, électriques, thermiques, et autres systèmes physiques. Ce cours présente les principes de base et les méthodes pour modéliser ces systèmes à l'aide d'équations différentielles linéaires.

2. Concepts de base des équations différentielles

2.1. Définition d'une équation différentielle

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction inconnue à ses dérivées. Dans le contexte des systèmes dynamiques, cette fonction inconnue représente généralement une variable d'état du système, comme la position, la vitesse ou le courant, et ses dérivées représentent les changements au cours du temps [7]*.

Exemple général :

$$a_n \frac{(d^n y(t))}{(dt^n)} + a_{(n-1)} \frac{(d^{(n-1)} y(t))}{(dt^{(n-1)})} + \ldots\ldots + a_1 dy \frac{(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{(d^m u(t))}{(dt^m)} + \ldots\ldots + b_0 u(t)$$

Ou :

y(t) : est la sortie du système,

u(t) : est l'entrée du système,

a_0 , a_1 , ... a_n , et b_0 , b_1 , ... b_m sont des coefficients constants.

3. Représentation des systèmes dynamiques par équations différentielles :

3.1. Systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT) :

Un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) est un système pour lequel les coefficients des équations différentielles ne dépendent pas du temps.

La réponse d'un tel système est entièrement déterminée par ses propriétés et par son entrée.

3.2. Solution d'une équation différentielle :

La solution d'une équation différentielle est une fonction qui satisfait l'équa-tion pour des conditions initiales données. La solution peut être composée de deux parties :

- **Solution homogène** (solution de l'équation homogène associée sans entrée u(t) .
- **Solution particulière** (solution qui dépend de l'entrée .

La Transformée de Laplace est souvent utilisée pour résoudre les équations différentielles dans le domaine de la fréquence. En prenant la transformée de La-place de l'équation différentielle, elle se transforme en une équation algébrique facile à résoudre[8][*].

3.3. Fonction de transfert :

La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du système, en supposant des conditions initiales nulles. Elle représente la relation entre l'entrée et la sortie dans le domaine de Laplace.

Exemple 01 : Modélisation de la dynamique d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur :

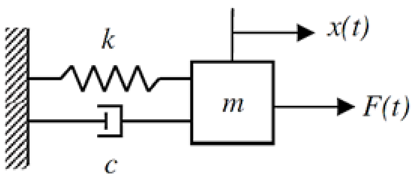


Figure1. Modélisations d'un système masse-ressort-amortisseur.

Dans un référentiel galiléen, l'accélération subie par un corps de masse est proportionnelle à la résultante des forces extérieures exercée sur cette masse, et inversement proportionnelle a .

On se souvient plus généralement de cette loi sous la forme : $\sum F_{ext} = m\ddot{x}$

Les relations de comportement du ressort et de l'amortisseur s'écrivent : $\begin{matrix} f_{ressoet} = -kx \\ f_{amort} = -c\dot{x} \end{matrix}$

On obtient donc les équations de mouvement suivantes : $m\dfrac{(d^2x(t))}{(dt^2)} + c\dfrac{(dy(t))}{(dt)} + kx(t) = F(t)$

Où :

- x(t) : est la position de la masse,
- m : est la masse,
- b : est le coefficient d'amortissement,
- k : est la constante de raideur du ressort,

- F(t) : est la force appliquée.

Soit en variable de Laplace : $m\,p^2 X(p)+cpX(p)+kX(p)=F(p)$

Exemple 02 : Systèmes électriques (circuit RLC)

Pour un circuit RLC en série,

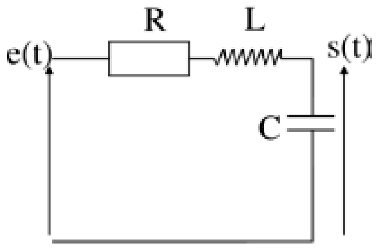


Figure2. Circuit RLC série.

La loi de Kirchhoff donne : $L\frac{(d^2 i(t))}{(dt^2)}+R\frac{(d\,i(t))}{(dt)}+\frac{1}{C}i(t)=s(t)$

Où :

- i(t) : est le courant,
- L : est l'inductance,
- R : est la résistance,
- C : est la capacité du condensateur,
- s(t) : est la tension appliquée.

Soit en variable de Laplace : $L\,p^2 I(p)+RpI(p)+\frac{1}{C}I(p)=S(p)$

Exemple 03 : Moteur à courant continu

Vu de l'extérieur, la machine peut être représentée par la mise en série d'une résistance R, d'une inductance L et d'une f.e.m à vide donnée par la relation , Ev = k Ω si Ω est la vitesse de rotation.

Nous supposerons que l'ensemble fixé à l'arbre de la machine est de moment d'inertie J et que le moment du couple de frottement est C=f j (frottement visqueux).

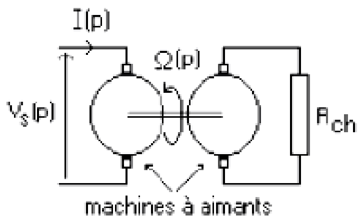


Fig. 3 . moteur à courant continu

Équation électrique : $V_e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+K\,\Omega(t)$

Soit en variable de Laplace : $V_e(p)=RI(p)+LpI(p)+K\,\Omega(p)$

Équation mécanique : $j\frac{d\,\Omega(t)}{dt}=ki(t)-f\,\Omega(t)-C_{ch}(t)$

Soit en variable de Laplace : $Jp\,\Omega(p)=kI(p)-f\,\Omega(p)-C_{ch}(p)$

On peut écrire alors :
$$\Omega(p)=\frac{k}{f+Jp}I(p)-\frac{1}{f+Jp}C_{ch}(p)$$
$$I(p)=\frac{1}{R+Lp}V_e(p)-\frac{k}{R+Lp}\Omega(p)$$

Bibliographie

[1] B. Bergeon, AUTOMATIQUE : Systèmes linéaires analogiques, IUT Bordeaux 1, GEII, septembre 2007.

[2] Frédéric Gouaisbaut, Automatique des systèmes linéaires, Université Paul Sabatier, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, 2007.

[3] Eric Magarotto, Cours de Régulation, Université de Caen, Département Génie Chimique et Procédés, Version septembre 2004.

[4] Eric Ostertag, Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande, Ellipses / Editions marketing S.A. 2004, ISBN 2-7298-2013-2.

[5] Maurice Rivoire, Jean Louis Ferrier et Jean Groleau, Exercices d'automatiques : Signaux et systèmes, Edition Chihab–Eyrolles 1994.

[6] Marek Zelazny, Fouad Giri et Taïeb Bennani, Systèmes asservis : Commande et régulation, Tome 1, Editions Eyrolles 1993, ISBN 2-212-09569-4.

[7] Joseph J. Distefano, Allen R. Stubberud et Ivan J. Williams, Systèmes asservis : Cours et problèmes, Série Schaum, McGraw–Hill Inc, ISBN : 0–07–017047–9, 2ème édition, Paris 1990.

[8] Michel ETIQUE, Régulation automatique (REG), Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du canton de Vaud (HEIG-Vd), Département d'électricité et d'informatique Filière Génie Electrique, octobre 2005.