theorie de systeme

Dr. Aberkane Moussa

École National Polytechnique MAURICE Audin ENP-MA d'Oran

Département : Génie Électrique.

Email : *moussa.aberkane@enp-oran.dz*

Table des matières

Objectifs

Ce cours permet à l'étudiant d'acquérir les outils fondamentaux pour l'étude des systèmes de commande automatique linéaires.

Ce cours concerne uniquement l'étude des systèmes linéaires, continus, invariants dans le temps et mono variables (systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants).

I

CHAPITRE I : Généralités sur les systèmes de commande automatique linéaire

1. Introduction :

Les systèmes de commande automatique jouent un rôle crucial dans de nombreuses applications industrielles et technologiques. Un système de commande automatique est un ensemble de dispositifs qui gèrent, commandent ou régulent le comportement d'autres dispositifs ou systèmes pour atteindre un certain objectif. Ces systèmes permettent d'automatiser des tâches en ajustant les paramètres de fonctionnement en réponse à des variations externes, sans intervention humaine directe.

Dans un contexte linéaire, un système de commande est qualifié de linéaire si la relation entre l'entrée et la sortie du système peut être représentée par des équations différentielles linéaires. Autrement dit, la sortie est proportionnelle à l'entrée, et les principes de superposition et d'homogénéité s'appliquent. Les systèmes linéaires sont largement étudiés en raison de leur simplicité mathématique et des outils puissants disponibles pour leur analyse et conception.[01]*

2. Définition :

Un système de commande automatique est un système qui régule et contrôle le comportement d'un autre système sans intervention humaine directe. Il se compose généralement des éléments suivants [2]*:

- **Elément commandé** (ou processus) : c'est le système à contrôler
- **Le capteur** : il mesure la grandeur de sortie du processus
- **Le régulateur** : il compare la valeur mesurée à la valeur de référence et génère une commande pour le processus
- **L'actionneur** :il applique la commande générée par le régulateur au processus

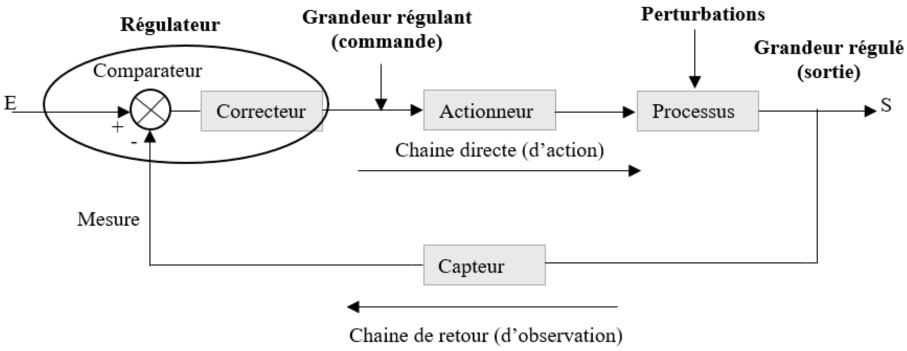


Fig 01. Schéma bloc d'un système asservi

Les systèmes linéaires sont des systèmes dont le comportement est régi par les principes de linéarité. Un système linéaire satisfait deux propriétés principales : **l'additivité et l'homogénéité.**

L'additivité signifie que la réponse du système à une combinaison linéaire de plusieurs entrées est égale à la somme des réponses individuelles de chaque entrée appliquée séparément. Mathématiquement, cela peut être exprimé par :

$$S(x_1(t)+x_2(t))=S(x_1(t))+S(x_2(t))$$

Où S représente le système x_1 et x_2 sont les entrées.

Un système est dit linéaire si :

a. Additivité :

$$\begin{Bmatrix} e_1(t) \Rightarrow s_1(t) \\ e_2(t) \Rightarrow s_2(t) \\ e_1(t)+e_2(t) \Rightarrow s_1(t)+s_2(t) \end{Bmatrix}$$

b. Homogénité :

$$\begin{Bmatrix} e(t) \rightarrow s(t) \\ \lambda e(t) \rightarrow \lambda s(t) \end{Bmatrix}$$

Un système linéaire répond donc aux principes de **superposition** et de **linéarité** (homogénéité).

3. Objectifs des systèmes de commande automatique :

- **Régulation** : Maintenir une variable de sortie à une valeur souhaitée (ou la suivre) en dépit des perturbations extérieures.
- **Suivi** : Faire en sorte qu'une sortie suive précisément une entrée de référence variable dans le temps.
- **Optimisation** : Maximiser ou minimiser certaines performances du système, telles que l'efficacité énergétique ou la stabilité.

4. Caractéristiques des systèmes linéaires

4.1. Description

La réponse d'un système linéaire à une somme d'entrées est égale à la somme des réponses individuelles à chaque entrée.

• **Formule :**

Si $x_1(t)$ produit une sortie $y_1(t)$ et $x_2(t)$ produit $y_2(t)$, alors pour une entrée $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, la sortie est $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$

4.2. Homogénéité :

- **Description** : Si une entrée est multipliée par un scalaire, la sortie est également multipliée par ce même scalaire.
- **Formule** : Si x(t) produit une sortie y(t), alors ax(t) produit ay(t) , où a est un scalaire.

4.3. Stabilité :

- **Description** : Un système linéaire est stable si ses réponses restent bornées pour des entrées bornées.
- **Exemples** : Les systèmes stables ne produisent pas de réponses infinies (ou divergentes) en réponse à des perturbations.

4.4. Causalité

- **Description** : Un système est causale si sa sortie à un moment donné ne dépend que des valeurs actuelles et passées de l'entrée, et non des valeurs futures.
- **Importance** : La causalité est essentielle pour les systèmes qui interagissent avec le temps réel.

4.5. Linéarité

- **Description** : Les relations entre les entrées et les sorties sont linéaires, ce qui signifie qu'elles peuvent être décrites par des équations linéaires.
- **Représentation** : Les systèmes linéaires peuvent souvent être représentés par des fonctions de transfert.

4.6. Fonction de Transfert

- **Description** : La fonction de transfert H(p) est utilisée pour décrire le comportement d'un système linéaire dans le domaine de Laplace.

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}$$

où Y(p) est la transformée de Laplace de la sortie et X(p) celle de l'entrée.

5. Nature des signaux d'entrée

Les signaux d'entrée sont des fonctions du temps. Ils seront dits aléatoires ou déterministes selon que le hasard intervient ou non dans leur génération [3]*. On s'intéressera dans la suite qu'aux signaux déterministes causaux, c'est-à-dire nuls pour $t < 0$

Les signaux les plus utilisés dans l'étude des systèmes asservis sont :

5.1. Rampe unité :

$$r(t) = \begin{Bmatrix} 0 \; si \; t < 0 \\ t \; si \; t > 0 \end{Bmatrix}$$

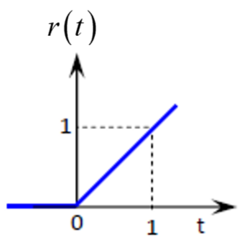


Fig. 02. Rampe (échelon de vitesse)

5.2. Échelon unité r(t) ou fonction de Heaviside :

$$r(t) = \begin{Bmatrix} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t > 0 \end{Bmatrix}$$

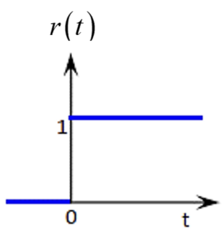


Fig. 03. Rampe (échelon de vitesse)

5.3. Impulsion unité δ(t) ou distribution du Dirac

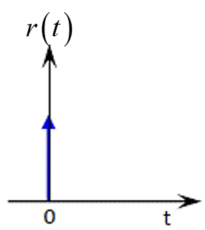


Fig. 04. Impulsion de Dirac

6. Classification des systèmes de commande automatique linéaire

Les systèmes de commande linéaire peuvent être classés selon différents critères.

6.1. Classification par type de boucle

6.1.1. Systèmes à boucle ouverte :

Dans un système à boucle ouverte, la commande est appliquée sans tenir compte de la sortie. Le système fonctionne uniquement sur la base de l'entrée de commande prédéfinie.

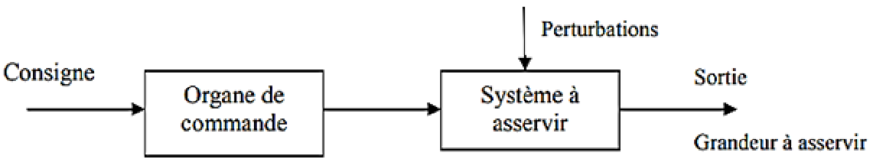


Fig . 05. Schéma d'un système de commande en boucle ouverte

Caractéristique d'un système asservi linéaire en BO :

1) Réalisation pratique généralement facile et moins couteuse ;

2) Précision faible, risque d'instabilité (erreur entre l'entrée et la sortie)

3) Rapidité moins rapide que SBF.

6.1.2. Systèmes à boucle fermée (Rétroaction) :

Dans un système à boucle fermée, la commande est ajustée en fonction de la différence entre la sortie réelle et la sortie désirée. C'est un système de régulation basé sur la rétroaction.

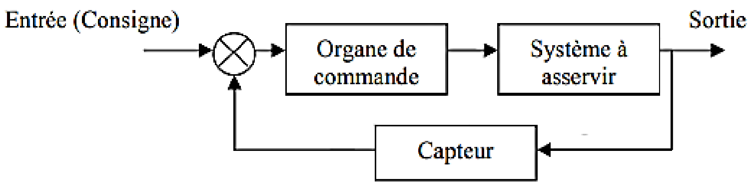


Fig . 06. Schéma d'un système de commande en boucle fermée

Caractéristique d'un système asservi linéaire en BF :

1) Réalisation pratique plus difficile (système plus complexe) ;

2) Plus précis ;

3) Plus rapide mais risque d'oscillations.

6.2. Classification par nature du système

6.2.1. Systèmes Continus :

Ces systèmes traitent des signaux continus dans le temps. Les équations différentielles linéaires sont utilisées pour modéliser de tels systèmes.

Systèmes à signaux continus : les signaux d'entrée, de sortie et la commande sont continus

Exemple :

Régulation de la température, contrôle de la vitesse d'un moteur.

6.2.2. Systèmes Discrets :

Les systèmes discrets traitent des signaux à intervalles de temps discrets. Ils sont souvent modélisés par des équations aux différences.

Systèmes à signaux discrets : les signaux sont échantillonnés et numériques.

Exemple :

Systèmes numériques de commande utilisant des microprocesseurs.

6.3. Classification par méthode de commande

6.3.1. Systèmes de commande PID (Proportionnelle-Intégrale-Dérivée) :

La commande PID est une méthode de régulation très courante où la com-mande est calculée en fonction d'une combinaison proportionnelle, intégrale et dérivée de l'erreur.

Exemple :

Contrôle de la vitesse dans les systèmes mécaniques.

6.3.2. Systèmes de commande à États :

Dans cette approche, le système est modélisé en termes de ses états internes, et la commande est conçue pour réguler ces états.

Exemple :

Contrôle des systèmes électriques utilisant des observateurs d'état.

6.3.3. Systèmes de commande optimale :

Ces systèmes sont conçus pour optimiser une certaine fonction de performance, telle que minimiser l'énergie consommée tout en maintenant la stabilité du système.

Exemple :

Contrôle optimal des trajectoires de robots.

6.4. Classification par domaine d'application

6.4.1. Systèmes mécaniques :

Commande de position, de vitesse, et de force dans les systèmes mécaniques tels que les robots, les véhicules, et les machines-outils.

6.4.2. Systèmes électriques :

Régulation de la tension, du courant, et de la fréquence dans les réseaux élec-triques et les dispositifs électroniques.

6.4.3. Systèmes thermiques :

Commande de la température et du flux de chaleur dans les systèmes de chauf-fage, de ventilation, et de climatisation.

6.5. Classification par le nombre d'entrées/sorties

- Systèmes à une entrée / une sortie **(SISO)**
- Systèmes à plusieurs entrées / plusieurs sorties **(MIMO)**

6.6. Système causal – non causal

6.6.1. Systèmes de commande automatique linéaires causaux

Un système de commande automatique linéaire est dit causal lorsque sa sortie y(t) à l'instant t dépend uniquement des valeurs passées et présentes de l'entrée x(t), mais pas des valeurs futures. Cela signifie que la sortie à l'instant t ne dépend pas des valeurs de l'entrée aux instants futurs $t + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$.

Les systèmes causaux sont physiquement réalisables car ils ne nécessitent pas de connaissance du futur pour produire la sortie.

6.6.2. Systèmes de commande automatique linéaires non causaux

Un système de commande automatique linéaire est dit non causal lorsque sa sortie y(t) à l'instant t dépend des valeurs futures de l'entrée $x(t+\Delta t)$, avec $\Delta t > 0$, en plus des valeurs passées et présentes.

Les systèmes non causaux ne sont pas physiquement réalisables car ils nécessitent la connaissance du futur pour produire la sortie.

Cependant, les systèmes non causaux peuvent être utilisés dans certaines applications spécifiques, comme le filtrage des signaux audio ou vidéo, où l'on peut se permettre un certain retard de la sortie par rapport à l'entrée.

6.7. Selon la nature du processus

6.7.1. Systèmes statiques :

Un système statique est un système dont la réponse à une excitation est instantanée (la sortie dépend uniquement de l'entrée actuelle).

Exemple :

Une résistance pure R est un système statique car le courant qui la traverse suit la tension appliquée à ses bornes. Entrée et sortie sont liées par une relation simple :

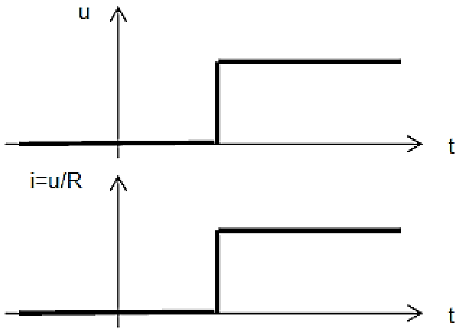


Fig. 07. Système statique

La relation mathématique qui lie entrée et sortie, , est indépendante du temps.

On dit encore qu'un système statique n'a pas de **mémoire.**

6.7.2. Systèmes dynamiques ou à mémoire :

Un système dynamique est un système dont la réponse à une excitation dépend à la fois de celle-ci et de ce qui s'est passé avant.

Exemple :

Considérons le circuit intégrateur ci-dessous :

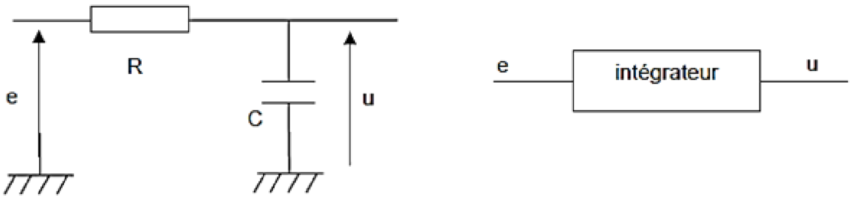


Fig. 08. Système dynamique

Où $e = RC\frac{du}{dt} + u$. La relation liant u et e est cette fois plus complexe puisque u dépend de e mais aussi d'elle-même $(dérivée \frac{du}{dt})$.

C'est la caractéristique d'un système dynamique ou encore à mémoire.

La sortie dépend de l'entrée et des états passés du système

6.8. Système stable/instable

Dans le contexte des systèmes, un système stable est un système qui, après une perturbation, revient à son état d'équilibre initial ou à un nouvel état d'équilibre stable. Autrement dit, un système stable tend à revenir à un état stable après avoir été déplacé de sa position d'équilibre.

Un système instable, en revanche, est un système qui, après une perturbation, s'éloigne de son état d'équilibre initial et ne revient pas à un état stable ou converge vers un nouvel état d'équilibre instable. Cela signifie que le système peut amplifier les perturbations et s'éloigner progressivement de son état d'équilibre initial.

La stabilité d'un système asservi dépend de plusieurs facteurs, tels que la conception du contrôleur, les caractéristiques du système, les marges de stabilité et les paramètres de réglage du contrôleur. Des méthodes d'analyse et de conception spécifiques, telles que l'analyse de réponse fréquentielle, l'analyse de stabilité de Nyquist, l'analyse de stabilité de Bode et les critères de stabilité de Routh-Hurwitz, peuvent être utilisées pour évaluer et garantir la stabilité d'un système asservi.

6.9. Conclusion

La théorie des systèmes de commande automatique linéaire est fondamentale pour le développement de nombreux dispositifs et systèmes modernes. Une compréhension approfondie de la classification et des principes de base permet de concevoir des systèmes robustes et efficaces, capables de fonctionner de manière autonome et précise dans divers environnements industriels et technologiques.

CHAPITRE II : Transformée de Laplace

II

1. Introduction

La transformée de Laplace est une méthode mathématique puissante utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Elle permet de convertir une équation différentielle dans le domaine temporel en une équation algébrique dans le domaine de Laplace, ce qui facilite grandement la résolution [4]*.

2. Formulation mathématique

Soit f(x) une fonction réelle de la variable réelle t, définie pour toute valeur de , sauf éventuellement pour certaines valeurs, en nombre fini dans tout intervalle fini, et nulle pour t<0.

La transformée Laplace de f(t) est définie par l'égalité : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)} . f(t)\,dt$

p étant une variable complexe.

On dit que F(p) est la transformée de f(t) et que f(t) est l'original de F(p).

Pour résoudre les équations différentielles grâce à la transformée de Laplace, il est nécessaire de savoir effectuer le passage de f(t) à F(p) mais aussi de F(p) a f(t).

On note : $f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$ ou aussi $F(p)=TL\ f(t)$.

Exemple 01 :

La figure 1 représente la fonction échelon unitaire u(t) ou Heaviside :

$$u(t)=\begin{Bmatrix} 0\ si\ t<0 \\ 1\ si\ t>0 \end{Bmatrix}$$

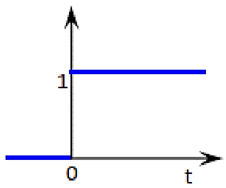


Fig. 01. Rampe (échelon de vitesse)

Exemple 02 :

Soit à calculer $L\{f^{'}(t)\}$

En utilisant l'intégration par partie, on aura : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)}.\ f'(t)dt$

Si la condition initiale est nulle f(0)=0 on trouve : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)}.\ f'(t)dt=pF(p)$

De même pour la dérivée seconde : $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{(-pt)}.\ f'(t)dt=p^2 F(p)-pf(0)-f'(0)$

De même, si toutes les conditions initiales sont nulles $f(0)=f^{'}(0)=f^{'}{'}(0)=0$, alors : $L\{f^n(t)\}=p^n F(p)$

2.1. Propriétés et théorèmes

Les propriétés de la TL sont réunies dans le tableau ci-après :

Propriété	$f(t)$	$F(p)$
Linéarité	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(p)+bF_2(p)$
Dérivation	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
Intégration	$\int f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
Retard	$f(t-\theta)$	$e^{-\theta p}\cdot F(p)$
Changement d'échelle	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$

A ces propriétés, on doit joindre les théorèmes suivants :

$$\textit{Théorème de la valeur initiale} \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(x)=\lim_{p\to\infty}\{pF(p)\}$$

$$\textit{Théorème de la valeur finale} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(x)=\lim_{p\to 0}\{pF(p)\}$$

Ce résultat n'est valable que si n'a aucun pôle (racine du dénominateur) dans le demi-plan droit du plan complexe et aucun pôle sur l'axe imaginaire, à l'exception du pôle simple à l'origine [5].*

2.2. Table du transformée de Laplace

$f(t)$	$F(p)$	*Remarque*
$\delta(t)$	1	
$u(t)=1$	$\frac{1}{p}$	$p>0$
$t\cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$p>0$
$t^2\cdot u(t)$	$\frac{2}{p^3}$	$p>0$
$t^n\cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n\in\mathbb{N}$ *et* $p>0$
$e^{-at}f(t)\cdot u(t)$	$F(p+a)$	$a\in\mathbb{R}$
$e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	*Réel* $(p+a)>0$
$t^n e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$n\in\mathbb{N}$ *et* $(p+a)>0$
$e^{-at}\sin(wt)\cdot u(t)$	$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$	$(p+a)>0$
$e^{-at}\cos(wt)\cdot u(t)$	$\frac{p}{(p+a)^2+w^2}$	$(p+a)>0$
$\left[1-\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1 e^{\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{\frac{t}{\tau_2}}\right)\right]$	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$p>0$
$1-\frac{e^{-m\cdot w_0\cdot t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left((w_0\sqrt{1-m^2})\cdot t-\varphi\right)$ $\varphi=-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)$	$\frac{1}{p\left[1+2m\frac{p}{w_0}+\left(\frac{p}{w_0}\right)^2\right]}$	$m<0$
$1-\frac{e^{-m\cdot w_0\cdot t}}{\sqrt{1-m^2}}\cos\left((w_0\sqrt{1-m^2})\cdot t-\varphi\right)$ $\varphi=\arctan\left(\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\right)$	$\frac{1}{p\left[1+2m\frac{p}{w_0}+\left(\frac{p}{w_0}\right)^2\right]}$	$m<0$

3. Transformée Inverse de Laplace

On peut exprimer la Transformée inverse, en utilisant les intégrales de Fourrier et de Melin-Fourrier.

Si F(p) est la Transformée de Laplace d'une fonction f(t) , on a :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt}F(p)dp$$

Où c est une constante, appelée abscisse de convergence.

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, F(p) est immédiatement reconnaissable dans la table,
- soit, lorsque la fonction n'apparaît pas dans la table, décomposer en fractions partielles et écrire en termes de fonctions simples de p pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

A noter que cette manière simple de trouver la Transformée inverse est basée sur le fait qu'il existe une correspondance unique entre la fonction temporelle et sa transformée inverse de Laplace du fait de la continuité de la fonction temporelle.

Remarque :

Dans le domaine de la théorie du contrôle, F(p) est fréquemment mise sous la forme : $F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$

Avec A(p) et B(p) des polynômes en p, et degré de B(p) ≤ degré de A(p)

3.1. Si F(p) ne contient que des pôles distincts

F(p) peut, alors, être décomposé en une somme de fractions partielles :

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{a_1}{p+p_1}+\frac{a_2}{p+p_2}+...+\frac{a_n}{p+p_n}$$

Avec : $a_i=[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_i)]_{p=-p_i}$ a_i : constante appelée résidu au pôle p = p_i.

Exemple 01 :

Trouver la Transformée Inverse de $F(p)=\frac{p+3}{(p+2)(p+1)}$. 2 pôles distincts : p = –1 , p = –2

$F(p)=\frac{a_1}{p+1}+\frac{a_2}{p+2}$ avec : a_1 = 2, a_2 = -1 , donc F(p) devient $F(p)=\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p+2}$

⇨ $f(t)=2e^{-t}-e^{-t}$.

Remarque :

Dans le cas où le degré de B(p) > degré de A(p) dans $F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}$ il faut alors diviser le numérateur par dénominateur, ensuite appliquer la méthode des fractions partielles.

Exemple 02 :

Trouver la Transformée Inverse de $G(p)=\frac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+2)(p+1)}$

En divisant le numérateur par le dénominateur, on obtient : $G(p)=p+2+F(p)$

3.2. Si F(p) contient des pôles multiples :

Soit p_1 le pôle multiple de F(p) , r étant l'indice de multiplicité de ce pôle.

$F(p)=\frac{(B(p))}{(A(p))}$, Avec $A(p)=(p+p_1)^r(p+p_{(r+1)})(p+p_{(r+2)})\ldots\ldots(p+p_n)$

Alors F(p) s'écrit : $F(p)=\frac{(B(p))}{(A(p))}=\frac{b_r}{(p+p_1)^r}+\frac{b_{(r-1)}}{(p+p_1)^{(r-1)}}+\ldots\ldots+\frac{b_1}{((p+p_1))}+\frac{`a_{(r+1)}}{(p+p_{(r+1)})}+\frac{`a_{(r+2)}}{(p+p_{(r+2)})}+\ldots\ldots+\frac{`a_n}{(p+p_n)}$

Exemple :

Trouver la Transformée Inverse de $F(p)=\frac{(p^2+2p+3)}{(p+1)^3}$

$F(p)=\frac{b_3}{(p+1)^1}+\frac{b_2}{(p+1)^2}+\frac{b_1}{(p+1)^3}$

Avec : $b_3 = 2$, $b_2 = 0$, $b_1 = 1$,

donc F(p) devient : $F(p)=\frac{2}{(p+1)^3}+\frac{1}{(p+1)^1}$

La fonction inverse de F(p) est $f(t)=(t^2+1)e^{-t}$

3.3. Si F(p) contient des pôles complexes conjugués :

$F(p)=\frac{(B(p))}{(A(p))}=\frac{(`a_1 p+`a_2)}{((p+p_1)(p+p_2))}+\frac{`a_3}{((p+p_3))}+\ldots\ldots+\frac{`a_n}{((p+p_n))}$

Avec a_1 et a_2 les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(a_1 p+a_2)_{(p=-p_1)}=[\frac{(B(p))}{(A(p))}(p+p_1)(p+p_2)]_{(p=-p_1\, ou\, p=-p_2)}$

Exemple :

Trouver la Transformée Inverse de $F(p)=\frac{(p+1)}{(p(p^2+p+1))}$

On a : $p^2+p+1=0$ pour $p=-0{,}5\mp j0{,}86$

donc : $F(p)=\frac{(`a_1 p+`a_2)}{((p+0{,}5+j0{,}86)(p+0{,}5-j0{,}86))}+\frac{`a}{p}$

Après des calcule mathématique on trouve $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$

donc F(p) s'écrit : $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{-p}{p^2+p+1}$

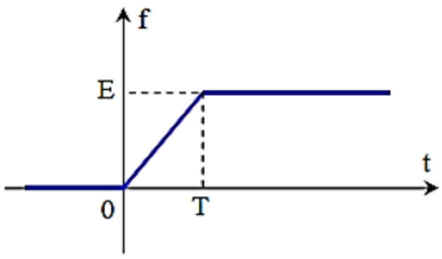
Ce qui donne pour $f(t)=1-e^{-0{,}5t}\cos(0{,}86t)+\frac{0{,}5}{0{,}86}e^{-0{,}5t}\sin(0{,}86t)$

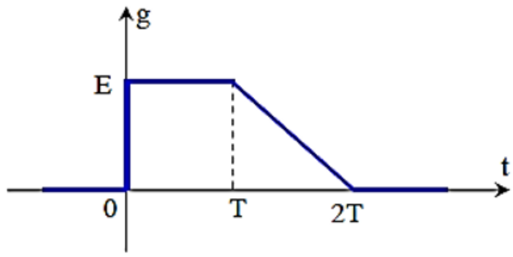
4. Exercices :

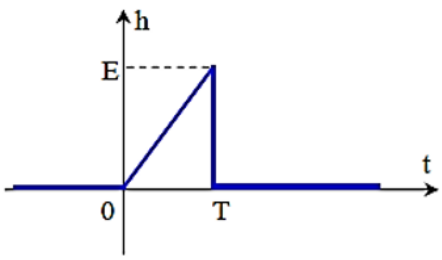
1. Calculez-les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :

- $f(x)=4\left(1-e^{-0.1t}\right)$
- $f(t)=e^{-at}\sin wt\cdot u(t)$
- $f(t)=\dfrac{t^2}{2}$
- $f(t)=t\cdot e^{-at}u(t)$
- $f(x)=e^{-at}$
- $f(t)=\cos wt$
- $f(t)=t^5e^{2t}$
- $f(t)=e^{-0.5t}u(t-2)$

2. Trouvez les fonctions temporelles des signaux ci-dessous en déduire leurs transformé de Laplace.







3. Calculez les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :

a) $F(p)=\dfrac{5p+16}{(p+2)^2(p+5)}$, b) $F(p)=\dfrac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2}$

c) $F(p)=\dfrac{p(p+2)}{p^2+2p+2}$, d) $F(p)=\dfrac{5(p+2)}{p^2(p+1)(p+3)}$, III

CHAPITRE III : Représentation des systèmes par équations différentielles

1. Introduction

La modélisation des systèmes dynamiques à l'aide des équations différentielles est une méthode fondamentale en ingénierie des systèmes et en contrôle automatique. Cette représentation permet de décrire la relation entre les entrées et les sorties d'un système en fonction du temps, en tenant compte de ses caractéristiques internes [6] [*].

Les équations différentielles sont particulièrement utiles pour modéliser les systèmes mécaniques, électriques, thermiques, et autres systèmes physiques. Ce cours présente les principes de base et les méthodes pour modéliser ces systèmes à l'aide d'équations différentielles linéaires.

2. Concepts de base des équations différentielles

2.1. Définition d'une équation différentielle

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction inconnue à ses dérivées. Dans le contexte des systèmes dynamiques, cette fonction inconnue représente généralement une variable d'état du système, comme la position, la vitesse ou le courant, et ses dérivées représentent les changements au cours du temps [7] [*].

Exemple général :

$$a_n \frac{(d^n y(t))}{(dt^n)} + a_{(n-1)} \frac{(d^{(n-1)} y(t))}{(dt^{(n-1)})} + ...+ a_1 dy \frac{(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{(d^m u(t))}{(dt^m)} + ... + b_0 u(t)$$

Ou :

y(t) : est la sortie du système,

u(t) : est l'entrée du système,

a_0 , a_1 , ... a_n , et b_0 , b_1 , ... b_m sont des coefficients constants.

3. Représentation des systèmes dynamiques par équations différentielles :

3.1. Systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT) :

Un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) est un système pour lequel les coefficients des équations différentielles ne dépendent pas du temps.

La réponse d'un tel système est entièrement déterminée par ses propriétés et par son entrée.

3.2. Solution d'une équation différentielle :

La solution d'une équation différentielle est une fonction qui satisfait l'équa-tion pour des conditions initiales données. La solution peut être composée de deux parties :

- **Solution homogène** (solution de l'équation homogène associée sans entrée u(t) .
- **Solution particulière** (solution qui dépend de l'entrée .

La Transformée de Laplace est souvent utilisée pour résoudre les équations différentielles dans le domaine de la fréquence. En prenant la transformée de La-place de l'équation différentielle, elle se transforme en une équation algébrique facile à résoudre[8]*.

3.3. Fonction de transfert :

La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du système, en supposant des conditions initiales nulles. Elle représente la relation entre l'entrée et la sortie dans le domaine de Laplace.

Exemple 01 : Modélisation de la dynamique d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur :

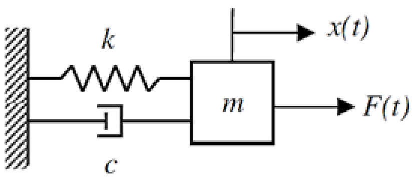


Figure1. Modélisations d'un système masse-ressort-amortisseur.

Dans un référentiel galiléen, l'accélération subie par un corps de masse est proportionnelle à la résultante des forces extérieures exercée sur cette masse, et inversement proportionnelle a .

On se souvient plus généralement de cette loi sous la forme : $\sum F_{ext} = m\ddot{x}$

Les relations de comportement du ressort et de l'amortisseur s'écrivent : $f_{ressoet} = -kx$; $f_{amort} = -c\dot{x}$

On obtient donc les équations de mouvement suivantes : $m\frac{(d^2 x(t))}{(dt^2)} + c\frac{(d\,y(t))}{(dt)} + k\,x(t) = F(t)$

Où :

- x(t) : est la position de la masse,
- m : est la masse,
- b : est le coefficient d'amortissement,
- k : est la constante de raideur du ressort,

- F(t) : est la force appliquée.

Soit en variable de Laplace : $m\,p^2 X(p)+cpX(p)+kX(p)=F(p)$

Exemple 02 : Systèmes électriques (circuit RLC)

Pour un circuit RLC en série,

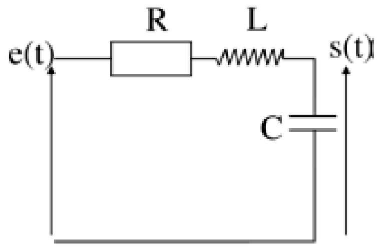


Figure2. Circuit RLC série.

La loi de Kirchhoff donne : $L\frac{(d^2 i(t))}{(dt^2)}+R\frac{(d\,i(t))}{(dt)}+\frac{1}{C}i(t)=s(t)$

Où :

- i(t) : est le courant,
- L : est l'inductance,
- R : est la résistance,
- C : est la capacité du condensateur,
- s(t) : est la tension appliquée.

Soit en variable de Laplace : $L\,p^2 I(p)+RpI(p)+\frac{1}{C}I(p)=S(p)$

Exemple 03 : Moteur à courant continu

Vu de l'extérieur, la machine peut être représentée par la mise en série d'une résistance R, d'une inductance L et d'une f.e.m à vide donnée par la relation , Ev = k Ω si Ω est la vitesse de rotation.

Nous supposerons que l'ensemble fixé à l'arbre de la machine est de moment d'inertie J et que le moment du couple de frottement est C=f j (frottement visqueux).

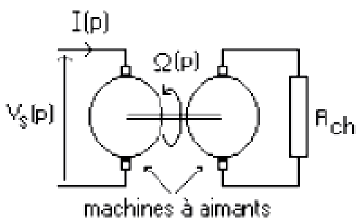


Fig. 3 . moteur à courant continu

Équation électrique : $V_e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+K\,\Omega(t)$

Soit en variable de Laplace : $V_e(p)=RI(p)+LpI(p)+K\,\Omega(p)$

Équation mécanique : $j\frac{d\,\Omega(t)}{dt}=ki(t)-f\,\Omega(t)-C_{ch}(t)$

Soit en variable de Laplace : $Jp\,\Omega(p)=kI(p)-f\,\Omega(p)-C_{ch}(p)$

On peut écrire alors :

$$\Omega(p)=\frac{k}{f+Jp}I(p)-\frac{1}{f+Jp}C_{ch}(p)$$

$$I(p)=\frac{1}{R+Lp}V_e(p)-\frac{k}{R+Lp}\Omega(p)$$

Bibliographie

B. Bergeon, AUTOMATIQUE : Systèmes linéaires analogiques, IUT Bordeaux 1, GEII, septembre 2007.

Frédéric Gouaisbaut, Automatique des systèmes linéaires, Université Paul Sabatier, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, 2007.

Eric Magarotto, Cours de Régulation, Université de Caen, Département Génie Chimique et Procédés, Version septembre 2004.

Eric Ostertag, Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande, Ellipses / Editions marketing S.A. 2004, ISBN 2-7298-2013-2.

Maurice Rivoire, Jean Louis Ferrier et Jean Groleau, Exercices d'automatiques : Signaux et systèmes, Edition Chihab–Eyrolles 1994.

Marek Zelazny, Fouad Giri et Taïeb Bennani, Systèmes asservis : Commande et régulation, Tome 1, Editions Eyrolles 1993, ISBN 2-212-09569-4.

Joseph J. Distefano, Allen R. Stubberud et Ivan J. Williams, Systèmes asservis : Cours et problèmes, Série Schaum, McGraw–Hill Inc, ISBN : 0–07–017047–9, 2ème édition, Paris 1990.

Michel ETIQUE, Régulation automatique (REG), Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du canton de Vaud (HEIG-Vd), Département d'électricité et d'informatique Filière Génie Electrique, octobre 2005.