

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique Maurice Audin - Oran



Département de Génie Mécanique

Spécialité : Systèmes Energétiques

Polycopie pour la quatrième année Ingénieur

Intitulé :

GAZODYNAMIQUE

Présenté par : Mr BOUSBAA Hamza

Aujourd'hui, la dynamique des fluides compressibles et incompressibles est un domaine de recherche très actif avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus. Ce document résulte de quelque année d'enseignement au niveau de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Oran. Son objectif essentiel est de présenter sous une forme rigoureuse et pédagogique, les connaissances de base sur le domaine des écoulements compressibles et mettre en exergue l'importance de ce sujet dans le contexte des applications d'ingénierie courantes et notamment celles liées directement à l'aéronautique. Cela signifie que l'étudiant devrait acquérir une connaissance générale sur les équations de base qui régissent les phénomènes, qu'elles soient de conservation de masse, de quantité de mouvement ou d'énergie ainsi que des relations thermodynamiques et ce, afin de prédire l'évolution des paramètres physiques.

Ce document s'adresse plus particulièrement aux étudiants de la quatrième année ingénieur en génie mécanique, option énergétique mais peut être également à toute personne qui désire comprendre de près ou de loin la gazodynamique sur les plans théoriques et technologiques. Cependant, un prés-requis de connaissances sur la thermodynamique et la mécanique des fluides leur est nécessaire.

Enfin, nous serons reconnaissants à tous ceux qui voudront nous faire part de leurs critiques ou leurs conseils. Je vous souhaite une bonne lecture !

| | |
|--|----|
| 1.1. Introduction | 6 |
| 1.1.1 Définitions | 6 |
| 1.1.2 Le phénomène de compressibilité | 6 |
| 1.1.3 Hypothèses Fondamentales | 7 |
| I.2. Equations de l'écoulement unidimensionnel de fluide compressible | 7 |
| I. 2.1 L'équation de continuité | 8 |
| I.2.2 L'équation de conservation de la quantité de mouvement | 9 |
| I.2.3 L'équation de conservation de l'énergie | 11 |
| I.2.4 L'équation d'état | 11 |
| I. 2.5 Considérations de l'entropie | 12 |
| I.3. Ecoulement unidimensionnel de fluide compressible | 12 |
| I.3.1. Classification des fluides compressibles | 13 |
| I.3.2 Ecoulement isentropique dan un tube de courant | 13 |
| I.3.3 Les relations différentielles entre P, u, S, ρ | 14 |
| I.3.4 Vitesse du son | 14 |
| I.3.5 Les ondes de Mach | 16 |
| SERIE D'EXERCICE N°01 | 18 |
| SOLUTION SERIE D'EXERCICE N°01 | 19 |
| Chapitre II. Ecoulement Isentropique 1D en Conduit à Section Variable | |
| II.1. Equations gouvernantes de l'écoulement isentropique unidimensionnel avec changement de section | 23 |
| II.1.1. Ecoulement isentropique avec section variable | 23 |
| II.1.2. Conditions d'arrêt | 25 |
| II.1.3. Conditions critiques | 27 |
| II.1.4. Tables et Graphes de l'écoulement isentropique | 27 |
| II.2. Théorème de Rankine-Hugoniot | 28 |
| II.2.1. Relations section et nombre de Mach | 28 |
| II.2.2. Relations différentielles entre p, u et S | 28 |
| SERIE D'EXERCICE N°03 | 30 |
| SOLUTION SERIE D'EXERCICE N°03 | 31 |
| Chapitre III. Etude des tuyères en écoulement isentropique | |
| III.1. Introduction | 33 |
| III.2. Tuyère convergente | 33 |
| III.3. Tuyère convergente-divergente | 36 |
| SERIE D'EXERCICE N°04 | 40 |
| SOLUTION SERIE D'EXERCICE N°04 | 41 |
| Chapitre IV. Ondes de Choc | |
| IV.1. Introduction | 43 |
| IV.2 Ondes de choc droites | 43 |

| | |
|--|----|
| IV.2.1. Relations de l'onde de choc en terme du nombre de Mach | 45 |
| IV.2.2. Tables de l'onde de choc droite | 47 |
| IV.3.3. Relations de l'onde de choc en terme du nombre de Mach | 48 |
| IV.3.5. Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques | 49 |
| SERIE D'EXERCICE N°05 | 51 |
| SOLUTION SERIE D'EXERCICE N°04 | 52 |
| Chapitre V. Ecoulement adiabatique avec frottement (Ecoulement de Fanno) | |
| V.1 Introduction | 54 |
| V.2. Lignes de Fanno | 54 |
| V.3. Les équations de l'écoulement de Fanno | 55 |
| V.4. Relations de nombre de Mach | 56 |
| V.5. Rapports de propriétés | 58 |
| V.6. Tables de calcul pour les courbes de Fanno | 59 |
| SERIE D'EXERCICE N°06 | 60 |
| SOLUTION SERIE D'EXERCICE N°06 | 61 |
| Chapitre VI. Ecoulement avec Transfert de chaleur et sans frottement (Ecoulement de Rayleigh) | |
| VI.1. Introduction | 63 |
| VI.2. Equation de base | 63 |
| VI.3. Conditions de stagnation | 68 |
| VI.4. Tables de calcul | 69 |
| SERIE D'EXERCICE N°07 | 70 |
| SOLUTION SERIE D'EXERCICE N°07 | 71 |
| Annexes | |
| Table I : Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ($\gamma = 1.4$). | 73 |
| Table II : Ecoulement à onde de choc normale/oblique d'un gaz parfait ($\gamma = 1.4$). | 74 |
| Table III : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Fanno) | 76 |
| Table IV : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh). | 77 |
| Références | 79 |

Chapitre I

Introduction à la Gazodynamique

s'occupe du mouvement de l'air et d'autres fluides gazeux, et des forces réagissant sur un corps en mouvement relatif.

L'objectif de ce cours est d'expliquer de tels phénomènes et les décrire en utilisant les équations fondamentales suivantes :

- équation de continuité.
- équations de quantité de mouvement.
- équation de l'énergie.
- équation d'état des gaz.

En résolvant simultanément les équations citées ci-dessus pour quatre inconnues ; pression, densité (masse volumique), température et la vitesse d'écoulement (p, ρ, T, u). Toutefois la théorie des écoulements compressibles est assez compliquée, c'est la raison pour laquelle on suppose la réversibilité et l'adiabaticité de l'écoulement.

I.1.2 Le phénomène de compressibilité

La compressibilité d'un fluide est une mesure de la variation de sa densité qui peut survenir suite à un changement de pression. Les gaz sont généralement compressibles alors que la majorité des liquides manifestent une compressibilité négligeable. Dans un écoulement de fluide, il y a des changements de pression résultant par exemple d'une variation de la vitesse de l'écoulement.

Il existe des situations pratiques où les variations de densité et de température sont négligeables. La mécanique des fluides incompressibles traite les écoulements où l'influence de la variation de la pression et de la vitesse est si négligeable qu'elle n'affecte pas ou peu la densité et la température : l'écoulement peut être considéré comme incompressible.

Pratiquement, la variation de la densité et de la température peut être si importante qu'elle induise des modifications essentielles des caractéristiques de l'écoulement. Dans de tels cas, il est indispensable d'étudier la thermodynamique de l'écoulement simultanément avec sa dynamique. Cette étude est connue sous le nom de *mécanique des fluides compressibles* ou *gazodynamique*.

Les applications de la gazodynamique sont innombrables. Cette dernière joue un rôle essentiel dans la conception des avions et des projectiles rapides, ses notions sont importantes dans plusieurs dispositifs d'ingénierie. Parmi ses applications :

- ✓ Les turbines à gaz et à vapeur : l'écoulement au travers des aubes et des passages inter aubes est compressible.
- ✓ Les moteurs thermiques alternatifs : l'écoulement à travers les soupapes et dans les conduites d'aspiration et de refoulement doit être considéré comme compressible.
- ✓ Le transport du gaz naturel : les effets de la compressibilité sont importants dans le calcul et le dimensionnement des gazoducs.
- ✓ Les chambres de combustion.

I.1.3 Hypothèses Fondamentales

Les phénomènes d'écoulements gazeux sont complexes et variés, une recherche d'une solution exacte demande une théorie considérable. Dans le but de traiter des problèmes d'ingénierie, il est nécessaire d'adopter des hypothèses simplificatrices. Parmi ces considérations :

1. Le gaz est continu : le gaz doit être considéré comme un milieu continu. Cette hypothèse est invalide lorsque la pression et la densité sont faibles, comme est le cas dans des moteurs spatiaux opérant à haute altitude et dans les écoulements à densité faible (le vide).
2. Il n'y a pas de réactions chimiques dans l'écoulement gazeux : les réactions chimiques induisent des changements dans la composition du gaz et des transferts énergétiques au sein du gaz lui-même et avec son environnement. La combustion est un exemple typique des écoulements réactifs. De tels cas peuvent se produire lorsque les variations de la température et de la pression sont importantes.
3. Le gaz est parfait :

a. La loi des gaz parfaits :
$$\frac{p}{\rho} = rT = \frac{R}{M}T \quad (\text{I.1})$$

b. Les chaleurs massiques à pression et à volume constants sont constantes et :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad \text{et} \quad r = C_p - C_v \quad (\text{I.2})$$

4. Les effets de gravité sont négligeables : cette hypothèse est justifiée pour les écoulements gazeux.
5. Les effets de viscosité sont négligeables.

Le champ de l'écoulement est totalement décrit lorsqu'on connaît en tous points les variables suivantes :

- Le vecteur vitesse, u .
- La pression, p .
- La masse volumique, ρ .
- La température, T .

Pour décrire le champ de l'écoulement, quatre équations exprimées en fonction des quatre dernières variables sont considérées. Ces équations sont dérivées à partir des principes suivants :

- ✓ La conservation de la masse (équation de continuité).
- ✓ La conservation de la quantité de mouvement (loi de Newton).
- ✓ La conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique).

I.2. Equations de l'écoulement unidimensionnel de fluide compressible

Beaucoup d'écoulements de gaz qui peuvent exister dans le monde de l'ingénieur peuvent être assumés comme unidimensionnels ; le gaz se meut suivant une seule direction et une seule composante du vecteur vitesse est considérée. On sait qu'un écoulement stationnaire est un écoulement dans lequel il n'y a pas de changements de ses propriétés en fonction du temps. Les équations de l'écoulement unidimensionnel sont applicables à des écoulements dans une

conduite droite, elles donnent une assez bonne précision dans le cas des conduites à section variable et ce lorsqu'une seule direction est prédominante.

I. 2.1 L'équation de continuité

En l'absence de sources et de puits, le taux de matière entrant dans un volume de contrôle est égal au taux qui le quitte :

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \dot{m}_2 \\ \rho_1 S_1 u_1 &= \rho_2 S_2 u_2 \end{aligned} \quad (I.3)$$

Ou sous forme différentielle :

$$\rho S u = (\rho + d\rho)(S + dS)(u + du)$$

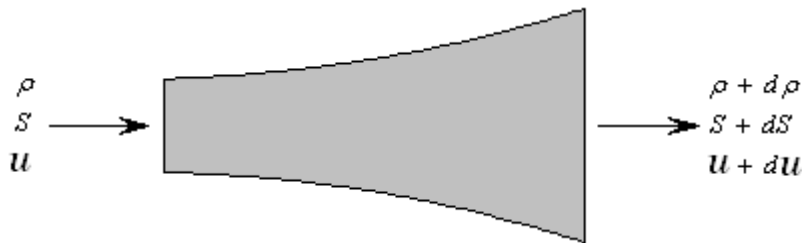


Fig.I.1. Volume de contrôle.

En négligeant les ordres supérieurs :

$$u S d\rho + \rho S du + \rho u dS = 0$$

Ou :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0 \quad (I.4)$$

Cette équation lie les changements différentiels de la masse volumique, de la section et de la vitesse. Si la masse volumique est assumée constante, la variation de la section et de la vitesse sont de signes opposés.

Note : Il existe plusieurs méthodes pour la démonstration de l'équation de continuité.

Démonstration de l'équation de continuité

L'équation de continuité est obtenue en appliquant le théorème de transport et loi de divergence (Ostrogradsky) ;

- Le théorème de transport : $\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} ds$ (I.5)

- La loi de divergence : $\int_S f \cdot \vec{n} ds = \int_V \vec{\nabla} f dV$ (I.6)

Première méthode :

$$m = \int_V \rho dV \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} ds &= \int_V \vec{\nabla} \rho \vec{u} dV \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \rho \vec{u} dV \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (I.7)$$

En régime permanent : $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} ds \Rightarrow \rho \cdot u \cdot S = \text{cost}$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} m &= \int_V \rho dV \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= \int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V \rho \frac{d(dV)}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V \rho \frac{d}{dt} (dxdydz) \\ &= \int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V \rho \left[\frac{d}{dt} (dx) \right] dydz + \int_V \rho \left[\frac{d}{dt} (dy) \right] dx dz + \int_V \rho \left[\frac{d}{dt} (dz) \right] dxdy \\ &= \int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V \rho [du_x] dydz + \int_V \rho [du_y] dx dz + \int_V \rho [du_z] dxdy \\ &= \int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V \rho \left[\frac{du_x}{dx} \right] dxdydz + \int_V \rho \left[\frac{du_y}{dy} \right] dxdydz + \int_V \rho \left[\frac{du_z}{dz} \right] dxdydz \\ &= \int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V \rho \text{div} \vec{u} dV \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{u} = 0 \end{aligned} \quad (I.8)$$

I.2.2 L'équation de conservation de la quantité de mouvement (Equation d'Euler)

L'équation d'Euler est obtenue en appliquant le principe de la conservation de la quantité de mouvement à un volume de contrôle de petite longueur x . L'écoulement étant stationnaire.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Dérivée temporelle de la quantité} \\ \text{de mouvement de la particule fluide} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{La somme des forces exercées sur} \\ \text{cette particules} \end{array} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \sum d\vec{F} \quad (I.9)$$

Suivant le théorème de transport :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV &= \int_V \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} ds \\ &= \int_V \left(\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) dV + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} ds \end{aligned}$$

On a ;

$$\int_S (\rho \vec{u} \vec{u} \vec{n}) ds = \int_V \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \vec{u}) dV \text{ et } \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \vec{u}) = \vec{u} \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{u}) + \rho \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u}$$

$$\text{Donc, } \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \vec{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{u} \right) dV + \int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} \right) dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{u} = 0 \text{ Equation de continuité}$$

Pour les forces exercées sur le fluide :

$$d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad} p} dV \text{ force de pression}$$

$$d\vec{F}_V = -\vec{f}_V dV = \rho g dV \text{ force de gravité}$$

$$d\vec{F}_v = \int_S \nabla \vec{\sigma} \vec{n} ds \text{ force de viscosité (contrainte visqueuses)}$$

Puisque les forces de gravité et de viscosité sont négligeables, seules sont considérées les forces de pression.

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} \right) dV = - \int \vec{\nabla} p dV \rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p$$

Si l'écoulement stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} \frac{u^2}{2}$ (irrotationnelle)

$$\rho \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} + \vec{\nabla} p = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho \frac{du^2}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow u du + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{I.10})$$

$$\text{Ou bien : } \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C \quad (\text{I.11})$$

Telle que C est une constante. Pour résoudre cette équation, il faut connaître l'expression de ρ . Si l'on considère que le fluide est incompressible, alors :

$$\rho \frac{u^2}{2} + p = C \quad (\text{I.12})$$

Qui est l'équation de Bernoulli.

Relation générale de Bernoulli :

Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie entre deux points (entrée/sortie), il est valable pour les écoulements incompressibles.

- **Pour un écoulement incompressible sans échange de travail et chaleur**

Lorsqu'on a un écoulement d'un fluide parfait entre deux points, où il n'y a aucune machines (pompe, turbine, compresseur...) entre ces points, la relation de Bernoulli s'écrit sous la forme suivante :

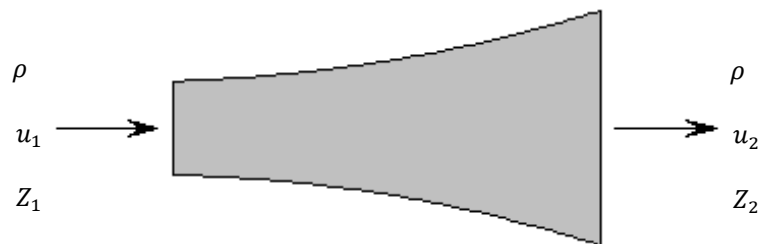


Fig.I.2. Volume de contrôle sans échange.

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g Z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g Z_2 + p_2 \quad (\text{I.13})$$

- Pour un écoulement incompressible isentropique avec un échange de travail

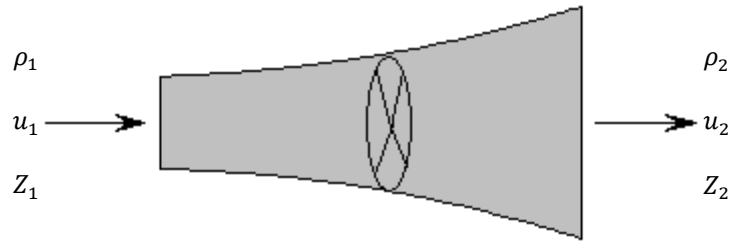


Fig.I.3. Volume de contrôle avec échange de travail.

$$\frac{1}{2}u_1^2 + gZ_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}u_2^2 + gZ_2 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{P_{net}}{\dot{m}} \quad (\text{I.14})$$

Avec ; $\frac{P_{net}}{\dot{m}} = w_u$

P_{net} : La puissance nette

\dot{m} : Le débit massique

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{\dot{m}} = w_u \quad (\text{I.15})$$

I.2.3 L'équation de conservation de l'énergie

Pour un écoulement stationnaire d'un gaz qui entre dans un volume de contrôle avec une vitesse u_1 et une enthalpie h_1 et sort avec une vitesse u_2 et une enthalpie h_2 , l'équation de conservation de l'énergie annonce comme suit:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} + q + w$$

Où q représente la chaleur massique transmise et w le travail massique échangé. Si on assume que le travail est nul, l'écoulement est adiabatique et le gaz est parfait :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad C_p T + \frac{u^2}{2} = \text{Cost}$$

Sous la forme différentielle :

$$C_p dT + u du = 0 \quad (\text{I.16})$$

Si l'écoulement n'est pas adiabatique : $C_p dT + u du = dq \quad (\text{I.17})$

Cette équation montre qu'un apport de chaleur peut induire des changements de vitesse et de température.

I.2.4 L'équation d'état

La majorité des calculs des écoulements compressibles sont effectuées pour un gaz parfait (c.-à-d. idéal, chaleurs spécifiques constantes), ayant l'équation d'état :

$$p = \rho r T \quad \text{avec} \quad r = \frac{R}{M_{gaz}}$$

où r : est la constante du gaz, R est la constante universelle des gaz ($R = 8.314 \text{ J/mol.K}$)

Ainsi pour l'air (supposé comme gaz parfait), on a $M_{air} = 28.96$ donc, $r = 287 \text{ J/kg.K}$,

$$C_v = \frac{r}{\gamma - 1} = 718 \text{ J/kg.K} ; \quad C_p = \frac{r\gamma}{\gamma - 1} = 1005 \text{ J/kg.K}$$

Lorsqu'on applique l'équation d'état entre deux points, on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \quad (\text{I.18})$$

$$\text{Sous forme différentielle : } \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (\text{I.19})$$

Cette équation lie les changements de pression, de température et de densité.

I.2.5 Considérations de l'entropie

L'étude d'un écoulement de fluide compressible met en jeu la notion d'entropie. La variation d'entropie entre deux points de l'écoulement est donnée par :

$$dS = \frac{\delta q}{T} = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p}$$

Ou :

$$S_2 - S_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - r \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\frac{S_2 - S_1}{C_p} = \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \quad (\text{I.20})$$

S'il n'y a pas de changements d'entropie :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma$$

Si l'on considère cette variation sous forme différentielle :

$$dS = C_p \ln\left(\frac{dT}{T}\right) - r \ln\left(\frac{dp}{p}\right) \quad \text{Ou} \quad \frac{dS}{C_p} = \ln\left(\frac{dT}{T}\right) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln\left(\frac{dp}{p}\right) \quad (\text{I.21})$$

Si l'écoulement est isentropique :

$$C_p \frac{dT}{T} = r \frac{dp}{p} \quad \text{Ou} \quad C_p dT = \frac{dp}{\rho}$$

alors : $C_p dT + u du = 0 \rightarrow \frac{dp}{\rho} + u du = 0 \quad (\text{I.22})$

I.3. Ecoulement unidimensionnel de fluide compressible

I.3.1. Classification des fluides compressibles

Les effets de la compressibilité deviennent importants avec l'augmentation de la vitesse de l'écoulement. Dans ce qui suit une attention particulière sera donnée au fait que ce n'est pas l'augmentation de la vitesse qui induit l'importance des effets de la compressibilité mais plutôt le rapport de cette vitesse à celle du son qui en sera déterminant. Ce rapport est connu sous le nom de nombre de Mach.

Pour étudier n'importe quel système il faut tout d'abord le définir. Dans le cas des fluides gazeux il faut connaître le type d'écoulement, c'est pour ça il faut déterminer le nombre de Mach :

$$M = \frac{\text{Vitesse de l'écoulement}}{\text{Vitesse locale du son}} = \frac{u}{a} \quad (\text{I.23})$$

Telle que u est la vitesse du fluide au point considéré et a la vitesse locale du son. Pour classer les écoulements :

- Si $u < a$, $M < 0.3$ l'écoulement est incompressible.
- Si $u < a$, $M < 1$, l'écoulement est dit subsonique.
- Si $u = a$, $M = 1$, l'écoulement est dit sonique ou critique.
- Si $u > a$, $M > 1$, l'écoulement est dit supersonique.
- Si $u \gg a$, $M \gg 1$, l'écoulement est dit hypersonique.

Comme il sera indiqué ultérieurement, la vitesse du son dans un gaz parfait dépend essentiellement de la nature de l'écoulement. Pour un écoulement isentropique, elle est donnée par :

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T} \quad (\text{I.24})$$

I.3.2 Ecoulement isentropique dans un tube de courant

La multiplication de l'équation d'Euler par $\frac{u}{p}$ le facteur donne :

$$\begin{aligned} \left\{ u du + \frac{dp}{\rho} \right\} \frac{u}{p} &= 0 \\ \frac{u^2}{p} du + \frac{u dp}{\rho p} &= 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\rho \frac{u^2}{p} \frac{du}{u} = -\gamma \frac{u^2}{\gamma \frac{p}{\rho}} \frac{du}{u} = -\gamma \frac{u^2}{a^2} \frac{du}{u} = -\gamma M^2 \frac{du}{u} \\ \frac{dp}{p} &= -\gamma M^2 \frac{du}{u} \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Cette équation montre qu'un changement fractionnel de la pression induit un changement fractionnel de la vitesse.

La multiplication de l'équation de l'énergie par le facteur $\frac{u}{T}$ donne :

$$\begin{aligned} \left\{ u du + C_p dT \right\} \frac{u}{T} &= 0, \text{ qui donne :} \\ \frac{dT}{T} = -\frac{1}{C_p} \frac{u^2}{T} \frac{du}{u} &= -\frac{\gamma r}{C_p \gamma r T} \frac{u^2}{u} \frac{du}{u} = -\gamma \frac{(C_p - C_v)}{C_p} \frac{u^2}{a^2} \frac{du}{u} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{du}{u} \\ \frac{dT}{T} &= -(\gamma - 1) M^2 \frac{du}{u} \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

De même, un changement fractionnel de température induit par un changement fractionnel de vitesse dépend du carré du nombre de Mach.

D'après l'équation d'état :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{dp}{\rho} \Leftrightarrow \frac{dp}{\rho} = -\gamma M^2 \frac{du}{u} + (\gamma - 1) M^2 \frac{du}{u} = -M^2 \frac{du}{u}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad (I.27)$$

Un changement fractionnel de densité induit par un changement fractionnel de vitesse est proportionnel au carré du nombre de Mach.

I.3.3 Les relations différentielles entre P, u, S, ρ

D'après l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0 \Leftrightarrow (1 - M^2) \frac{du}{u} = -\frac{dS}{S}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{(1-M^2)} \frac{dS}{S} \quad (I.27)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2}{(1-M^2)} \frac{dS}{S} \quad (I.29)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{(1-M^2)} \frac{dS}{S} \quad (I.30)$$

I.3.4 Vitesse du son

Le nombre de Mach est important dans la détermination des caractéristiques des écoulements à grande vitesse. Pour le calculer, il faut connaître la vitesse locale du son.

La vitesse du son est la vitesse de propagation de la perturbation qui se transmet entre les particules d'un fluide. cette propagation se développe sous forme d'onde de compression.

Dans le but d'analyser l'écoulement à travers l'onde et de déterminer la vitesse a .

On suppose qu'on a une section uniforme et une onde sonore plane se déplace dans un fluide avec un écoulement stationnaire. Le changement différentiel de pression à travers l'onde est dp et les changements de température et de densité correspondants sont respectivement dT et $d\rho$. L'onde de pression provoque également un changement de vitesse comme illustré sur la figure ci-contre.

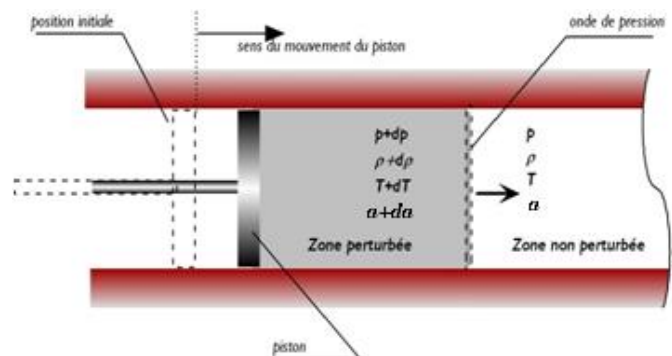


Fig.I.4. Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement dans une conduite de section constante.

En considérant l'équation de continuité :

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 : $a = -\rho \frac{da}{d\rho}$

L'équation de quantité de mouvement donne :

$$\frac{d}{dt}(mu) = \sum F$$

$$\frac{d}{dt}(mu) = u \frac{dm}{dt} + m \frac{du}{dt} = m \dot{u} \quad \text{Parce que } \frac{du}{dt} = 0 \text{ Ecoulement stationnaire}$$

Avec ; $m = \rho u S$

$$(\rho + d\rho)(a + da)^2 - \rho a^2 = -(p + dp) - (-p)$$

$$\frac{da}{d\rho} = -\frac{\frac{dp}{d\rho} + a^2}{2\rho a}$$

D'après ses équations ; $a^2 = \frac{dp}{d\rho} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ (I.31)

Cette relation valable pour tous les fluides (liquide ou gaz) et la même pour les solides.

Démonstration de la vitesse de son :

Suivant le premier principe de la thermodynamique :

$$dq = dU + pdv \text{ et } dq = Tds \Rightarrow Tds = dU + pdv$$

Et après les relations de Maxwell : $dU = C_v dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - p \right] dv$

Donc,

$$Tds = C_v \left[\frac{dp - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho}{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho} \right] - \frac{T}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial T} d\rho$$

Si le processus est isentropique $ds=0$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T + \frac{T}{C_v \rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho^2$$

On a $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T + \frac{T}{C_v \rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho^2}$ (I.32)

Pour un gaz parfait : $p = \rho r T \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = rT$ et $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho = \rho r$

On suppose que les changements différentiels de pression, de température et de densité résultant de l'onde de pression isentropique.

$$a = \sqrt{rT + \frac{T}{C_v \rho^2} (\rho r)^2} = \sqrt{\gamma r T}$$

La vitesse locale du son dans un gaz dépend donc de la nature de celui-ci et de la température locale.

| Gaz | Masse molaire | $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ | Vitesse du son à 0°C |
|---|---------------|----------------------------|----------------------|
| Air | 28.960 | 1.404 | 331 |
| Argon (Ar) | 39.940 | 1.667 | 308 |
| Dioxyde de Carbone (CO ₂) | 44.010 | 1.300 | 258 |
| Fréon 12 (CCl ₂ F ₂) | 120.900 | 1.139 | 146 |
| Hélium (He) | 4.003 | 1.667 | 970 |
| Hydrogène (H ₂) | 2.016 | 1.407 | 1270 |
| Xénon (Xe) | 131.300 | 1.667 | 170 |

Tableau I.1. Vitesse locale du son à la température 0°C dans quelques gaz

| | Substance | a [m/s] |
|-----------------|-----------------|-----------|
| <u>Gaz</u> | H ₂ | 1294 |
| | He | 1000 |
| | Air | 340 |
| | Ar | 317 |
| | CO ₂ | 266 |
| | CH ₄ | 185 |
| <u>Liquides</u> | Glycérine | 1860 |
| | Eau | 1490 |
| | Mercure | 1450 |
| | Ethyle | 1200 |
| <u>Solides</u> | Aluminium | 5150 |
| | Acier | 5060 |
| | Glace | 3200 |

Tableau .I.2. Vitesse locale du son à la température 15.5°C et 1atm.

Remarque : Dans le vide la vitesse du son est nulle $a_{vide} = 0$

I.3.5 Les ondes de Mach

La présence d'un corps dans un milieu compressible provoque continuellement une succession d'onde sonore dans toutes les directions. Si le corps se déplace avec une vitesse u inférieure à la vitesse de l'onde de son (figure 1-a). Quand u est inférieure à a (figure 1-b) ; c.-à-d. $M < 1$, les fronts d'onde se propagent donc à la vitesse $a-u$ en amont, mais à $a+u$ en aval de l'écoulement.

Par conséquent, l'intervalle entre les fronts d'ondes est plus dense en amont qu'en aval. Quand $u = a$, c.-à-d. $M = 1$, la vitesse de propagation ($u-a$) sera nulle, et le son se propage seulement en aval de l'écoulement (figure 1-c), en produisant une onde appelée onde de Mach normale à la direction de l'écoulement. Si un observateur est situé en amont de l'écoulement, il ne peut pas entendre le corps s'approchant.

Si $u > a$, c.-à-d. $M > 1$, les fronts d'ondes cessent de se propager en amont (figure 1-d), mais elles continuent de se propager en aval. L'enveloppe de ces ondes forme le cône de Mach, et le son est confiné dans ce cône. L'observateur ne peut entendre les perturbations supersoniques seulement s'il se trouve dans le cône de Mach (zone d'action), et la zone en dehors du cône est appelée zone de silence.

L'angle au sommet du cône de Mach est 2β , calculé comme suit :

$$\sin(\beta) = \frac{a}{u} = \frac{1}{M} \quad (\text{I.33})$$

Cet angle est appelé angle de mach. Plus que le nombre de Mach est élevé, plus le cône est pointu, par exemple ; $\beta = 30^\circ$ à $M = 2.0$ et $\beta = 11.5^\circ$ à $M = 5.0$. Pour le cas limite de l'écoulement sonique, $M = 1$; $\beta = 90^\circ$, le cône de mach deviendra un plan déplaçant avec la particule ; ce qui est en agrément avec la figure (1-c).

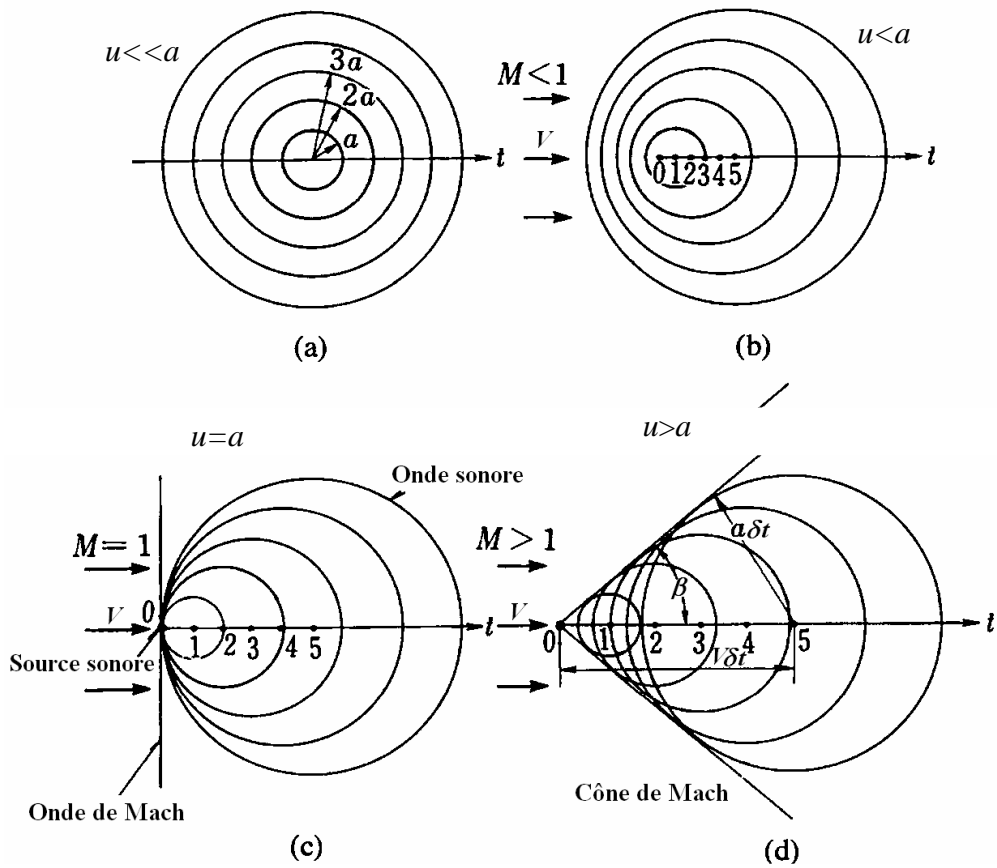


Fig. I.5. Nombre de Mach et les propagations des ondes sonores : (a) repos ;
 (b) subsonique ($M < 1$) ; (c) sonique ($M = 1$) ; (d) supersonique ($M > 1$).

SERIE D'EXERCICE N°01

Exemple 1 :

L'air entre dans une enceinte avec une vitesse de 100m/s et la quitte avec une vitesse de 200m/s. Si l'écoulement est adiabatique, déterminer la différence de températures de l'air de l'entrée à la sortie.

Exemple 2 :

L'air de température 25°C s'écoule à une vitesse de 500m/s. une onde de choc se produit réduisant la vitesse de l'écoulement à 300m/s. En assumant que l'écoulement à travers cette onde est adiabatique, déterminer la température de l'air en aval de l'onde.

Exemple 3 :

L'air, s'échappant à travers une valve d'un pneu, est à une température de 15°C. En assumant que l'air à l'intérieur du pneu à une température d'ambiance de 30°C, déterminer la vitesse de l'air à la sortie de la valve. le processus peut être assumé comme adiabatique.

Exemple 4 :

Un gaz de masse molaire égale à 4Kg/kmol et un rapport de chaleurs massiques $\gamma=1.67$ s'écoule dans un conduit à section variable. Dans une section du conduit, la température est de 10°C et la vitesse 180m/s. Dans une autre section, la température est de -10°C. Quelle serait la vitesse dans cette dernière section, si l'écoulement est adiabatique.

Exemple 5 :

Dans une section d'un conduit circulaire à travers lequel l'air s'écoule, la pression est de 250 kPa, la température 35°C, la vitesse 250m/s et le diamètre 0.2 m. Si à partir de cette section, le diamètre décroît avec un taux de 0.1 m/m, déterminer dp/dx , du/dx et $d\rho/dx$ pour :

- ✓ Un écoulement incompressible.
- ✓ Un écoulement compressible

Exemple 6 :

Quelle est la forme de la relation qui lie la pression à la vitesse entre deux points de l'écoulement, si celui-ci est :

- ✓ isotherme
- ✓ isentropique

REPONSES SERIE D'EXERCICE N°01

Exemple 1 :

$$\Delta T = 14.92K$$

Exemple 2 :

$$T_2 = 104.6 K$$

Exemple 3 :

$$u_2 = 173.63 m/s$$

Exemple 4 :

$$u_2 = 490 m/s$$

Exemple 5 :

Pour un fluide incompressible, $\frac{d\rho}{dx} = 0$, $\frac{du}{dx} = -300 \frac{m}{s}$, $\frac{dp}{dx} = 60.2 \frac{kPa}{m}$

Pour un fluide compressible, $\frac{d\rho}{dx} \neq 0$

$$\frac{du}{dx} = -467.3 \frac{m/s}{m}, \quad \frac{d\rho}{dx} = -0.839 \frac{kg/m^3}{m}, \quad \frac{dp}{dx} = -93.7 \frac{kPa}{m}$$

Exemple 6 :

- ✓ Pour un écoulement isotherme : $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = rT \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$
- ✓ Pour un écoulement est isentropique : $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$

SERIE D'EXERCICE N°02

Exemple 1 :

Calculer la vitesse du son à la température 288 K dans l'hydrogène et l'hélium. Sous quelle condition, la vitesse du son dans l'hydrogène égale-t-elle celle dans l'hélium. Trouver la vitesse du son dans l'hélium à 20 °C et 600 °C.

Exemple 2 :

Une onde faible de pression (une onde de son) à travers laquelle l'augmentation de pression est 30 Pa se propage dans l'air à une température 30 °C et sous une pression 101 kPa. Trouver la variation de densité, de température et de vitesse à travers l'onde.

Exemple 3 :

- ✓ Un avion vole à 2000 km/h à une altitude où règne la température -50 °C. A quel Mach l'avion vole-t-il?
- ✓ Un avion peut voler à une vitesse de 800 km/h au niveau de la mer où la température est 15 °C. Si cet avion vole à ce même nombre de Mach à une altitude où la température est -44°C. Trouver la vitesse à laquelle l'avion vole dans ce cas.

Exemple 4 :

La section d'un tunnel supersonique est de forme d'un carré de cote 1.22 m. Le nombre de Mach dans une section de test est de 3.5, la température est de -100 °C et la pression 20 kPa. Calculer le débit masse.

Exemple 5 :

Les vitesses de croisière et les altitudes de vol typiques pour trois avions commerciaux sont :

| TYPE | Vitesse [km/h] | Altitude [m] |
|------------|----------------|--------------|
| Dash 8 | 500 | 4750 |
| Boeing 747 | 978 | 9150 |
| Concorde | 2340 | 16600 |

Trouver les nombres de Mach de ces trois avions en assumant ces conditions de croisière. Utiliser les conditions d'atmosphère standard.

Exemple 6 :

Un gaz de masse molaire $44 \frac{kg}{kmol}$ et un rapport de chaleurs spécifiques 1.67 s'écoule à travers un tunnel supersonique. La température du gaz dans le tunnel est 10 °C. Une photographie de l'écoulement montre des ondes faibles émanant des aspérités de la paroi et traversent l'écoulement à un angle de 45° par rapport à la direction de l'écoulement. Déterminer le nombre de Mach et la vitesse de l'écoulement.

Exemple 7 :

Un observateur terrestre se rend compte qu'un avion volant horizontalement à une altitude de 5000 m traverse une distance de 12 km de la verticale des lieux lorsqu'il entend pour la première fois le son de l'engin. Déterminer la vitesse de l'avion.

REPONSES SERIE D'EXERCICE N°02

Exemple 1 :

$$a_{H_2} = 1294.33 \text{ m/s} , \quad a_{He} = 998.69 \text{ m/s} , \quad \frac{T_{He}}{T_{H_2}} = 1.67$$

$$\text{à } 20 \text{ °C } a_{He} = 1007.33 \text{ m/s}$$

$$\text{à } 600 \text{ °C } a_{He} = 1305.51 \text{ m/s}$$

Exemple 2 :

$$d\rho = 0.264 \text{ kg/m}^3 , \quad dT = 25.71 \text{ K} , \quad du = 74.03 \text{ m/s}$$

Exemple 3 :

$$1- M = 1.856 \quad 2- M = 0.6535 , \quad u = 713.62 \text{ km/h}$$

Exemple 4 :

$$u = 922.77 \text{ km/h} , \quad \rho = 0.403 \text{ kg/m}^3 , \quad \dot{m} = 553.5 \text{ kg/s}$$

Exemple 5 :

$$\text{Dash 8 : } M = 0.431$$

$$\text{Boeing 747 : } M = 0.879$$

$$\text{Concorde : } M = 2.204$$

Exemple 6 :

$$M = 1.414 , \quad u = 211.34 \text{ m/s}$$

Exemple 7 :

$$T = 271.9 \text{ K} , \quad u = 859.6 \text{ m/s}$$

Chapitre II

Écoulement Isentropique 1D en Conduit à Section Variable

II.1. Equations gouvernantes de l'écoulement isentropique unidimensionnel avec changement de section

II.1.1. Ecoulement isentropique dans une section variable

Plusieurs écoulements d'intérêt pratique peuvent être décrits en les assumant comme stationnaires, unidimensionnels et isentropiques. Toutefois, un écoulement réel n'est jamais totalement isentropique. Par exemple, dans un écoulement interne les zones où les effets de viscosité et de transfert de chaleur sont prédominants, sont restreintes au niveau des parois, comme illustré sur la figure (fig II.1). Les zones où l'écoulement externe peut être considéré comme isentropique.

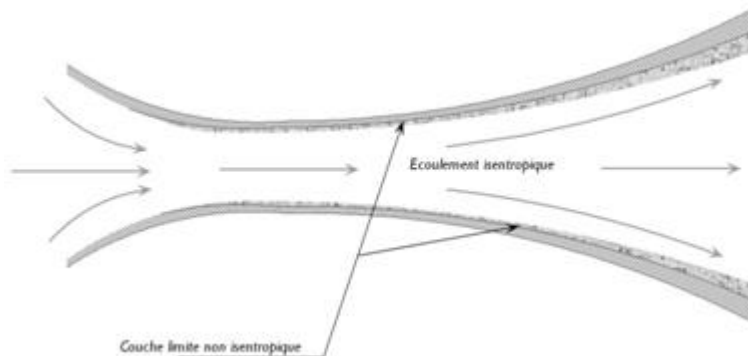
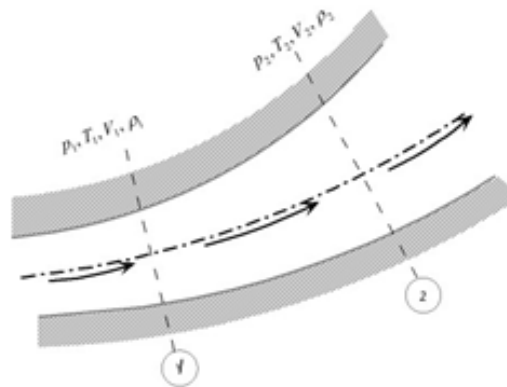


Fig.II.1. Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement dans une conduite de section variable.

Lorsque les effets non isentropiques deviennent importants, il est souvent possible de calculer l'écoulement en l'assumant comme isentropique et appliquer une correction à l'aide de facteurs empiriques pour tenir compte de ces effets. Cette approche a été utilisée dans le passé dans la conception des tuyères.

Pour un écoulement isentropique, il a été démontré que :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C$$



Suivant l'équation de l'énergie entre deux points :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$\frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad \text{Avec } T = \frac{p}{r\rho}$$

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right] \quad \text{pour un écoulement isentropique } \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \Rightarrow \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

$$\text{On a; } \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (\text{II.1})$$

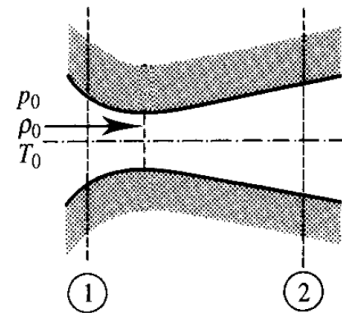
Cette équation permet de calculer la vitesse dans une section quelconque du canal en connaissant les pressions.

Equation de Barré de Saint Venant : c'est un cas particulier de l'équation (II.1).

Cette équation donne la vitesse du gaz dans une section variable à condition de connaître les conditions initiales (pression, masse volumique et température).

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_0 = 0 \\ p_1 = p_0 \\ u_2 = u \\ p_2 = p \end{array} \right\} -\frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$



$$u = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (\text{II.2})$$

Si la pression interne régnant dans un réservoir est beaucoup plus grande que la pression externe $p_0 \gg p$

$$\frac{p}{p_0} \rightarrow 0 \quad \text{donc ;} \quad u_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} r T_0} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} = 2.22 a_0 \quad (\text{II.3})$$

Pour un gaz donné la vitesse maximale dépend uniquement de la température interne (condition d'arrêt).

Les caractéristiques de l'écoulement isentropique :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$\text{Donc ; } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{u_1^2}{2C_p T_1}}{1 + \frac{u_2^2}{2C_p T_2}} = \frac{1 + \frac{u_1^2}{2\frac{\gamma r}{\gamma-1} T_1}}{1 + \frac{u_2^2}{2\frac{\gamma r}{\gamma-1} T_2}} = \frac{1 + \frac{u_1^2}{2\frac{a_1^2}{\gamma-1}}}{1 + \frac{u_2^2}{2\frac{a_2^2}{\gamma-1}}} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \quad (\text{II.4})$$

En utilisant les relations de l'isentrope :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{II.6})$$

Ces équations sont suffisantes pour déterminer les caractéristiques de l'écoulement isentropique.

II.1.2. Conditions d'arrêt

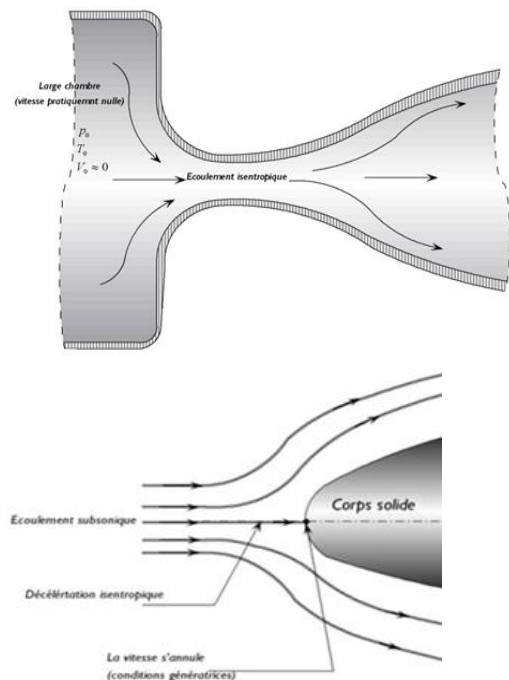
Dans un écoulement isentropique, les conditions sont associées au point où la vitesse de l'écoulement est nulle. Par exemple dans un réservoir de grandes dimensions où la vitesse est pratiquement nulle, et à partir duquel, un canal à section variable est alimenté. On appelle que les conditions qui y règnent, sont des conditions d'arrêt ou de stagnation ou génératrices. dans le reste de ce document, ces conditions seront appelés conditions d'arrêt et seront représentés par l'indice 0.

Les conditions d'arrêt existent aussi en chaque point de l'écoulement où la vitesse s'annule. Elles existent effectivement au bord d'attaque d'un corps submergé par un écoulement de gaz.

Si on applique l'équation d'énergie pour un écoulement unidimensionnel isentropique, on peut écrire :

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \Rightarrow \frac{a_0^2}{\gamma-1} = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2}$$

Avec : a_0 : la vitesse du son aux conditions d'arrêt (au réservoir).



a : la vitesse du son dans un endroit bien déterminé du canal.

$$\text{On a ; } M = \frac{u}{a}$$

Donc,

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{II.9})$$

Ces formules sont applicables dans les écoulements compressibles entre le point d'arrêt et un point quelconque de fluide au sein de canal.

Effet de compressibilité : Comparaison entre fluide compressible/incompressible :

Pour un fluide incompressible, suivant le théorème de *Bernoulli* et avec $\Delta Z = 0$, on a :

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 \Rightarrow p_0 - p = \frac{1}{2} \rho u^2 \Rightarrow \frac{p_0 - p}{\frac{\rho u^2}{2}} = 1 \quad (\text{II.10})$$

Pour un fluide compressible et un écoulement isentropique :

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II.11})$$

en effectuant un développement de *Taylor*, on a:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3$$

$$\text{Si ; } n = \frac{\gamma}{\gamma-1} \quad \text{et} \quad n = \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 \Rightarrow p_0 - p = p \frac{\gamma}{2} M^2 \left[1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4\right]$$

$$\text{On a : } p \frac{\gamma}{2} M^2 = p \frac{\gamma}{2} \frac{u^2}{\gamma r T} = \frac{\rho u^2}{2}$$

$$p_0 - p = \frac{\rho u^2}{2} \left[1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4\right] \Rightarrow \frac{p_0 - p}{\frac{\rho u^2}{2}} = 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4$$

$$\text{Pour l'air on a } \gamma = 1.4 \quad \text{donc,} \quad \frac{p_0 - p}{\frac{\rho u^2}{2}} = 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} \quad (\text{II.12})$$

| M | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{p_0 - p}{\frac{\rho u^2}{2}}$ | 1.003 | 1.010 | 1.023 | 1.041 | 1.064 | 1.093 | 1.129 | 1.170 |

On constate donc que la pression d'arrêt p_0 augmente par l'effet de compressibilité, c-à-d $M \uparrow$
 $p_0 \uparrow$

Nous remarquons bien effet de compressibilité après $M=0.3$

II.1.3. Conditions critiques

Si l'écoulement se décélère ou s'accélère isentropiquement jusqu'à atteindre un état critique caractérisé par un nombre de Mach unité ($M=1$), les conditions qui règnent dans ce dernier cas sont dites conditions critiques.

$$\frac{T_0}{T_*} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{p_0}{p_*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{II.15})$$

Les relations qui existent entre les conditions d'arrêt et les conditions critiques peuvent être générées en affectant à $M = 1$ et $\gamma = 1.4$ dans ces dernières équations une valeur nulle, ainsi :

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0.8333 \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.5283 \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.6339 \quad (\text{II.18})$$

$$\frac{a_*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} = 0.9129 \quad (\text{II.19})$$

II.1.4. Tables et Graphes de l'écoulement isentropique

Les équations de l'écoulement isentropique unidimensionnel sont facilement à résoudre à l'aide d'un calculateur. Ainsi, il existe des tables et graphes dans la littérature représentant en fonction du nombre de Mach les rapports $\frac{p_0}{p}$, $\frac{T_0}{T}$, $\frac{\rho_0}{\rho}$ et ce pour un rapport de chaleurs massiques γ .

La forme typique d'une table comporte les colonnes suivantes :

| M | $\frac{p_0}{p}$ | $\frac{T_0}{T}$ | $\frac{\rho_0}{\rho}$ | $\frac{a_0}{a}$ | $\frac{S}{S_*}$ |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|
|-----|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|

II.2. Théorème de Rankine-Hugoniot

II.2.1. Relations section et nombre de Mach

Si on applique l'équation de continuité entre ces deux sections on obtient :

$$\rho_1 S_1 u_1 = \rho_2 S_2 u_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2}{u_1} \quad (\text{II.20})$$

Pour un écoulement isentropique : $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

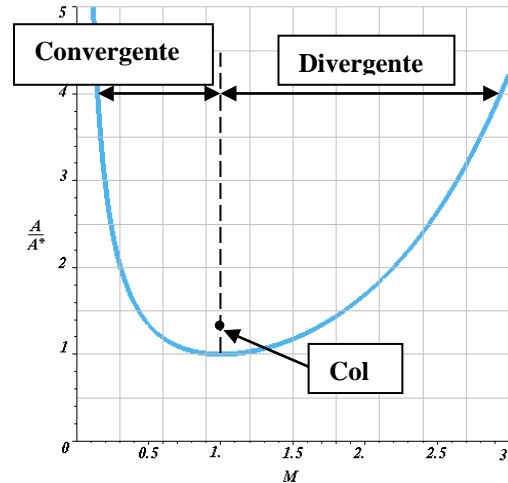
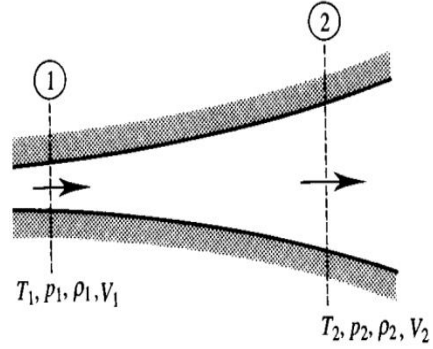
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\text{On a ; } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\text{Si } M_2=1 \Rightarrow \frac{S}{S_*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{II.21})$$

Le graphe ci-contre de l'expression précédente montre l'évolution de $\frac{S}{S_*}$ pour un écoulement d'air ($\gamma = 1.4$) monodimensionnel et isentropique dans un canal à section variable, convergente divergente est la section la plus petit est appelée col et dans lequel l'écoulement est sonique.

$$\frac{S}{S_*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2 + 0.4M^2}{2.4}\right)^3 \quad (\text{II.22})$$



II.2.2. Relations différentielles entre p , u et S

Écoulement incompressible :

$$\text{Suivant l'équation de continuité : } u_1 S_1 = u_2 S_2 \Rightarrow u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2} \quad (\text{II.23})$$

$$\text{Suivant Bernoulli : } \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 \Rightarrow \Delta p = -\frac{1}{2} \rho \Delta u^2 \quad (\text{II.24})$$

Dans un écoulement incompressible, la vitesse et la section varient en sens inverse ainsi que la vitesse et la pression.

Écoulement compressible :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0$$

$$\frac{dp}{\rho} + u du = 0$$

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \Rightarrow dp = a^2 d\rho$$

$$u du = -a^2 \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u}{a^2} dV = -\frac{v^2}{a^2} \frac{du}{u} = -M^2 \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0 \Rightarrow \frac{dS}{S} = M^2 \frac{du}{u} - \frac{du}{u} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{dS}{S} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{dp}{\rho} + u du = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{dp}{\rho} = -\frac{1}{a^2 M^2} \frac{dp}{\rho} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \quad (\text{II.24})$$

| Ecoulement | | | | |
|--------------------|--------------------|-------------|----------------------|-------------|
| Propriétés | Subsonique $M < 1$ | | Supersonique $M > 1$ | |
| Section | $dS < 0$ | $dS > 0$ | $dS < 0$ | $dS > 0$ |
| Vitesse | $du > 0$ | $du < 0$ | $du < 0$ | $du > 0$ |
| densité | $d\rho < 0$ | $d\rho > 0$ | $d\rho > 0$ | $d\rho < 0$ |
| Pression | $dp < 0$ | $dp > 0$ | $dp > 0$ | $dp < 0$ |
| Température | $dT < 0$ | $dT > 0$ | $dT > 0$ | $dT < 0$ |

SERIE D'EXERCICE N°03

Exemple 1 :

Les gaz d'échappement d'une fusée peuvent être assumés comme un gaz parfait ayant un rapport de chaleurs spécifiques $\gamma=1,3$ et une masse molaire de 32 g/mol . Ces gaz sont éjectés à travers un canal à une section variable. Dans un point du canal où la section est de 0.2 m^2 , la pression, la température et le nombre de mach sont respectivement 1500 kPa , 800 °C et 0.2 . En un autre point, la pression est 80 kPa , déterminer le nombre de Mach, la température et la section du canal. Assumer un écoulement isentropique unidimensionnel.

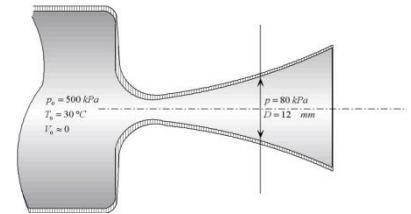
Exemple 2 :

Un gaz est contenu dans un grand réservoir où règnent une pression 300 kPa et une température 50 °C . Le gaz se détend à partir de ces conditions dans un canal à une section variable jusqu'à ce qu'il atteigne un nombre de Mach égal à 1. Quelle serait la vitesse limite pouvant être générée en détendant le gaz dans une tuyère.

- ✓ L'air
- ✓ L'hélium.

Exemple 3 :

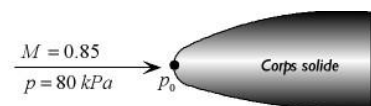
Un gaz de masse molaire $39.9 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ et un rapport de chaleurs spécifiques $\gamma = 1.67$ se transvase dans une tuyère à partir d'une large chambre où la pression est de 500 kPa , la température de 30 °C et la vitesse pratiquement nulle. En assumant un écoulement isentropique unidimensionnel :



- a) Si la pression dans une section donnée est de 80 kPa , déterminer le nombre de Mach, la température et la vitesse.
- b) Si la tuyère est de section circulaire de diamètre 12 mm à la section précédente, déterminer le débit masse.

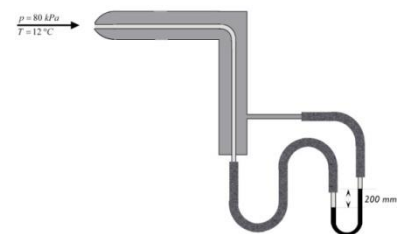
Exemple 4 :

L'air s'écoule à travers un corps. L'air en amont du corps s'écoule à $M = 0.85$ et une pression statique de 80 kPa . Trouver la pression maximale agissant sur la surface du corps.



Exemple 5 :

Un tube de Pitot double est placé dans un écoulement subsonique d'air. La pression statique et la température d'air sont respectivement 80 kPa et 12 °C . La dénivellation indiquée est de 200 mm de mercure. Déterminer la vitesse de l'écoulement et le nombre de Mach.



Exemple 6 :

Un gaz est contenu dans un grand réservoir où règnent une pression 300 kPa et une température 50 °C . Le gaz se détend à partir de ces conditions dans un canal à une section variable jusqu'à ce qu'il atteigne un nombre de Mach égal à 1. Déterminer la pression, la température et la vitesse en ce point s'il s'agit de :

- ✓ L'air
- ✓ L'hélium.

Exemple 7 :

L'air s'écoule dans un canal à une section variable à partir d'un grand réservoir où règne une pression d'arrêt de 300 kPa et une température de 40 °C. Si la pression en une section, section 2 est de 200 kPa, trouver avec les tables la température et la vitesse. Si le nombre de Mach en une autre section est de 1.5, trouver la pression, la température et la vitesse. Assumer l'écoulement isentropique unidimensionnel.

REPONSES SERIE D'EXERCICE N°03**Exemple 1 :**

$$M_2 = 2.55 , T_2 = 546.33K , S_2 = 0.208$$

Exemple 2 :

Pour l'air : $u_1 = 804 \text{ m/s}$

Pour l'hélium : $u_1 = 2348 \text{ m/s}$

Exemple 3 :

$$M_1 = 1.8$$

$$T_1 = 145.26 \text{ K}$$

$$u_1 = 404.55 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = 0.121 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Exemple 4 :

$$p_0 = 128.3 \text{ kPa}$$

Exemple 5 :

$$u = 222.71 \text{ m/s} , M = 0.658$$

Exemple 6 :

Pour l'air : $T_* = 269.16 \text{ K} , p_* = 158.48 \text{ kPa} , u = 328 \text{ m/s}$

Pour l'hélium : $T_* = 242.21 \text{ K} , p_* = 146.12 \text{ kPa} , u = 915.9 \text{ m/s}$

Exemple 7 :

$$M = 0.78 , T = 279 \text{ K} , u = 336.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$M = 1.5 , p = 81.7 \text{ kPa} , T = 216 \text{ K}$$

Chapitre III

Etude des tuyères en écoulement
isentropique

III.1. introduction

Une tuyère est une conduite qui permet l'accélération d'un écoulement afin de générer une force de poussée. Pour ce faire, le dispositif relie un réservoir (où la vitesse est nulle) à pression p_0 , à un environnement à pression ambiante p_b . L'écoulement a lieu dès que la pression p_b est inférieure à la pression p_0 dans le réservoir.

Le taux de détente, $NPR = p_0/p_b$ caractérise le phénomène. En fait, il faut que $NPR > 1$ pour garantir un écoulement.

NPR: Nozzle Pressure Ratio

III.2. Tuyère convergente

Soit une tuyère convergente alimentée par un grand réservoir, dans lequel on assume des conditions d'arrêts, débouchant dans un milieu où la pression est p . La vitesse u est donnée par :

Pour un écoulement incompressible :

En comparaison avec un écoulement de fluide incompressible :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$u = \sqrt{2 \frac{p_0 - p}{\rho_0}}$$

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho_0 S u = \rho_0 S \sqrt{2 \frac{p_0 - p}{\rho_0}} = S \sqrt{2 \rho_0^2 \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)} \\ &= S \sqrt{2 \rho_0 p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)} \end{aligned}$$

$$\dot{m} = S \sqrt{2 \rho_0 p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{m}}{S} = \sqrt{2 \rho_0 p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)} \quad (III.1)$$

$$\dot{m} \text{ maximal} \Rightarrow \frac{p}{p_0} \rightarrow 0 \quad (p_0 \gg p)$$

$$\dot{m} = 0 \Rightarrow \frac{p}{p_0} = 1 \Rightarrow p_0 = p$$

Pour un écoulement compressible :

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

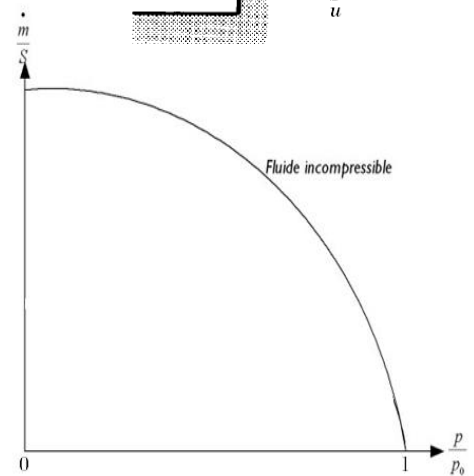
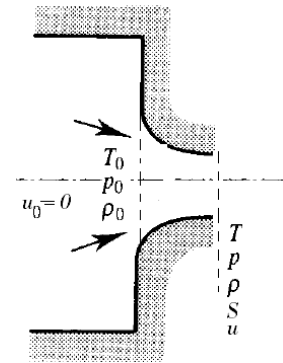


Fig.III.1. Variation du débit pour un fluide incompressible

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \rho S u = \rho S \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} S \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \\
\dot{m} &= \rho_0 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}} S \sqrt{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \frac{p_0}{r T_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} r T_0 S \sqrt{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \\
\dot{m} &= \frac{p_0}{T_0} \sqrt{T_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{r^2(\gamma-1)}} r S \sqrt{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \underbrace{\frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{r(\gamma-1)}} S}_{A} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}}_{\sqrt{X}} \\
\dot{m} &= \underbrace{\frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{r(\gamma-1)}} S}_{A} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}}_{\sqrt{X}} \\
\frac{\dot{m}}{S} &= \underbrace{\frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{r(\gamma-1)}}}_{A} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}}_{\sqrt{X}} \tag{III.2}
\end{aligned}$$

Le débit est maximal si X est maximal. En faisant $\frac{dX}{dp} = 0$, on trouve que le débit est maximal quand : $p = p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ qui est la pression sonique. Le débit maximal est atteint lorsque les conditions en aval de la tuyère sont des conditions critiques.

- Si $\frac{p}{p_0} \geq \frac{p^*}{p_0}$, le débit est compris entre 0 et la valeur du débit maximal.
- Si $\frac{p}{p_0} < \frac{p^*}{p_0}$, on constate expérimentalement qu'il reste constant et égal à la valeur du débit maximal.

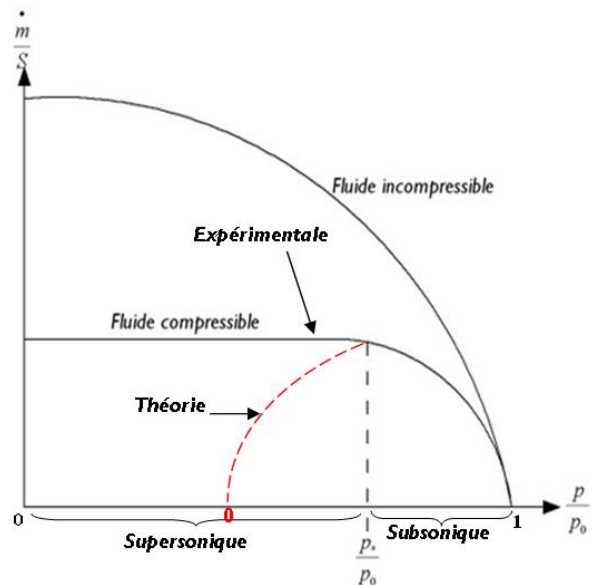


Fig.III.2. Variation du débit pour un fluide compressible et un fluide incompressible

Le graphique (c) illustre le débit adimensionnel \dot{m} / \dot{m}_{max} en fonction de la pression dimensionnelle p_b/p_0 . Évidemment, si la pression est la même partout, il n'y a pas d'écoulement. Si l'on diminue p_b , un débit croissant a lieu et, lorsque $p_b = p_c = p^*$, on atteint le débit maximal.

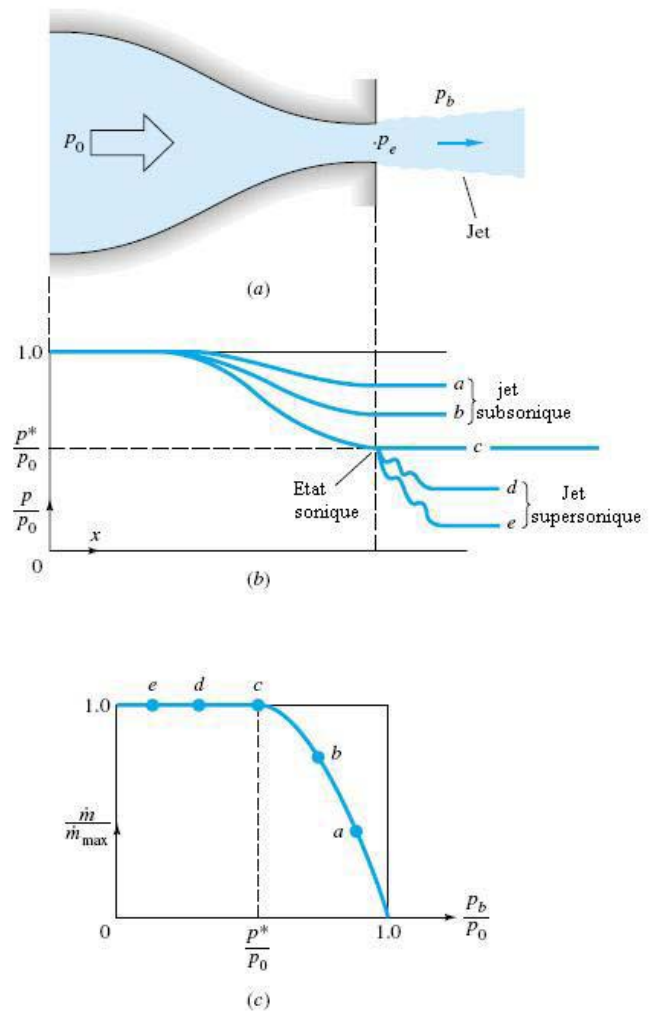


Fig.III.3. Tuyère convergente : (a) Géométrie et pressions caractéristiques de la tuyère ; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval p_b ; (c) débit massique.

- Si on considère des valeurs de p_b comme dans le cas *a* et *b* (figure 3b), la pression au col est supérieure à la pression critique p^* . L'écoulement au sein de la tuyère convergente est subsonique et un jet sort à la pression $p_e = p_b$. Le débit massique de l'écoulement isentropique subsonique est inférieur à la valeur du débit maximal \dot{m}_{max} (figure 3c).
- Si la pression p_b est égale à p^* (le cas *c*) au col. L'écoulement au col sera sonique, et le jet aussi ($p_e = p_b$), et le débit massique de l'écoulement sera maximal. L'écoulement en amont du col est subsonique.
- Finalement, si la pression en arrière continue à diminuer, soit $p_b < p^*$, (ou bien si la pression p_0 augmente), comme les cas *d* et *e*, l'écoulement demeure bloqué et le nombre de Mach M ne peut pas excéder 1. Par contre, la pression p_c devient supérieure à p_b . Ce phénomène donne lieu à un jet sous-détendu. Dans ce cas, la pression de sortie p_c s'ajuste jusqu'à la pression ambiante p_b au moyen d'ondes de détente (interprétés comme un éventail) qui sont accrochées à la lèvre de la tuyère. L'expansion jusqu'à la pression ambiante se poursuit ensuite en aval de la section de sortie de la tuyère. Jet sous-détendu, $p_c > p_b$. Mathématiquement parlant, le débit

massique donné précédemment voit sa valeur se réduire dans les cas *d* et *e* (théoriquement), l'écoulement sera non-isentropique à cause des ondes de choc qui apparaissent en rendant le phénomène irréversible.

Calcul de débit maximal en fonction des paramètres critiques :

$$\dot{m} = \rho_* S_* u_*$$

$$\rho_* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \frac{p_0}{r T_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$V_* = a_* = \sqrt{\gamma r T_*} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} r T_0}$$

$$\dot{m} = S_* \frac{p_0}{r T_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} r T_0} = S_* \frac{p_0}{r T_0} \sqrt{\left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}} \frac{2}{\gamma + 1} \gamma r T_0}$$

$$= S_* \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \underbrace{\sqrt{\frac{\gamma}{r} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}}_K$$

$$\dot{m} = S_* \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \underbrace{\sqrt{\frac{\gamma}{r} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}}_{K=Cte} \quad (\text{III.3})$$

Si la vitesse du son est atteinte au col, le débit massique est proportionnel à la pression d'arrêt inversement proportionnel à la racine carrée de la température d'arrêt.

III.3. Tuyère convergente-divergente

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval, voir la fig.III.2) formée par un convergent suivi d'un divergent, bien que de ondes de choc oblique peuvent y apparaître, on ne regardera que les chocs droits.

Le principe de fonctionnement d'une tuyère de Laval repose sur les propriétés des gaz lorsqu'ils circulent avec des vitesses subsonique et supersonique. Lorsqu'un gaz circule à une vitesse subsonique dans un tuyau dont le diamètre se rétrécit, sa vitesse augmente. La vitesse du gaz ne peut toutefois pas dépasser celle du son (Mach 1). En effet en régime d'écoulement supersonique (vitesse supérieure à la vitesse du son) le comportement du gaz s'inverse : pour que sa vitesse augmente, il faut que le diamètre du tuyau augmente. Pour accélérer un gaz à des vitesses supersoniques, il faut donc qu'il circule d'abord dans une section de tuyau convergente jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse Mach 1 et à partir du col, le gaz doit progresser dans un tuyau de diamètre croissant (le divergent) pour que la vitesse continue à augmenter.

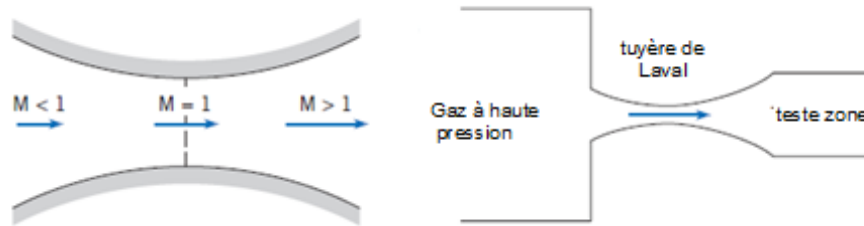


Fig.III.4. Schéma d'une tuyère de Laval

La tuyère de Laval se compose de deux parties :

- ✓ La section convergente, c'est la partie qui se rétrécit dans le sens de l'écoulement du gaz.
- ✓ La section divergente, c'est la partie où le diamètre s'accroît progressivement.

A noter que la connexion entre les deux parties est appelé col.

La fig.III.5 nous montre l'évolution de la pression (p), de la vitesse (u) et de la température (T) tout au long des sections d'une tuyère de Laval. La température et la pression chute pendant la progression du gaz dans la tuyère au moment où sa vitesse augmente jusqu'à la phase supersonique au delà du col.

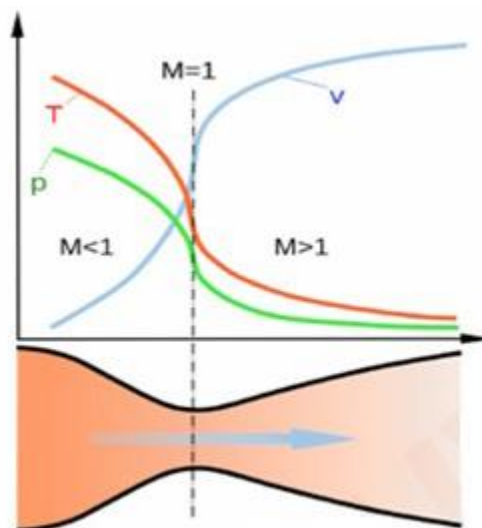


Fig.III.5. Variation de T, P, V le long de la tuyère de Laval

Pour analyser Les régimes des écoulements considérant la tuyère de Laval montrée dans la fig. 2.6, on retrouvera plusieurs catégories d'écoulement en fonction de la valeur du taux de détente (NPR).

- Si la pression en aval p_b est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère et éventuellement des ondes de choc.
- **Écoulement subsonique** : Pour les cas A et B (fig.6b), la pression p_b n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère de Laval. La distribution de pression est

calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est $p_b=p_e$ et le jet est subsonique.

- **Écoulement sonique :** Pour le cas C, le rapport des sections est $\frac{S_e}{S_{col}}$ exactement égal à $\frac{S_e}{S_*}$ pour un nombre de Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (fig.6c). l'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et $p_b=p_e$.
- **Tuyère adaptée :** Cette fois considérons le cas H. ici p_b est tel que $\frac{p_e}{p_0}$ correspond exactement au rapport $\frac{S_e}{S_*}$ d'un nombre de Mach supersonique à la sortie. L'écoulement dans l'ensemble de la tuyère est isentropique et dans le divergent entièrement supersonique, y compris le jet à la sortie ($p_b=p_e$).

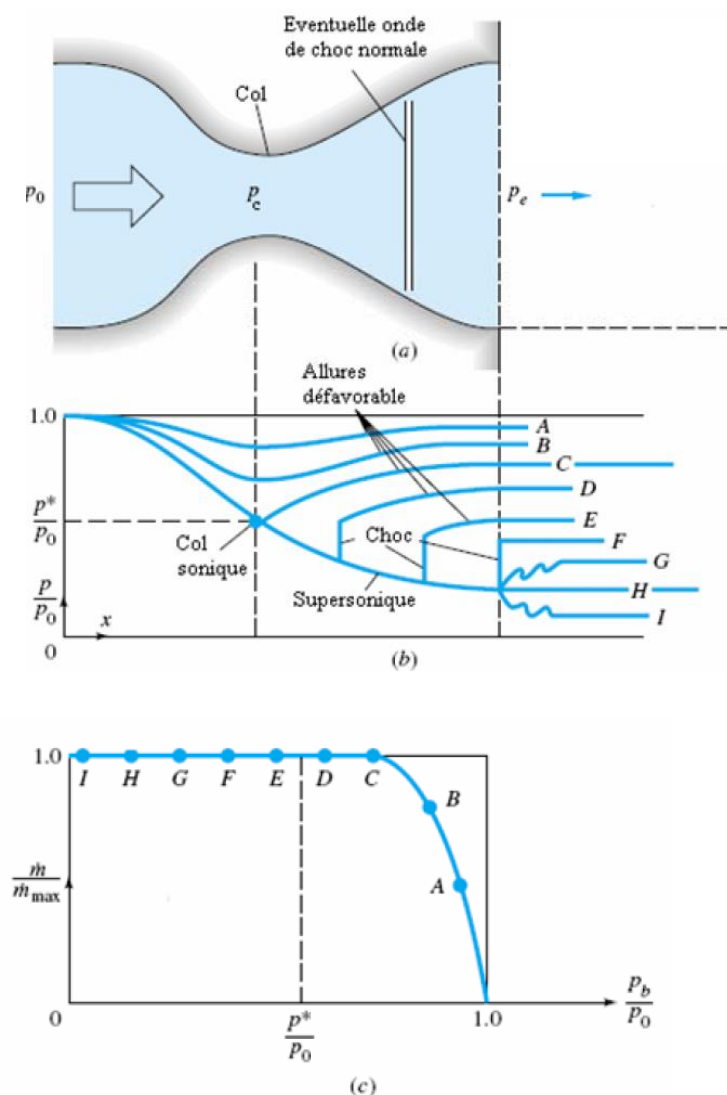


Fig.III.6. Tuyère convergente-divergente : (a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval p_b ; (c) débit massique.

- **Écoulement Subsonique-Supersonique- Subsonique** : Supposons dans ce cas que p_b se trouve entre les cas C et H , qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions p_b des cas D à F ont lieu (figure 4b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure 4c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère.
- **Tuyère en sur-expansion** : Dans le cas G , l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'à atteindre la pression p_b .
- **Tuyère en sous-expansion** : Finalement dans le cas I , p_b est inférieure à celle du cas H , mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

SERIE D'EXERCICE N°04

Exemple 1 :

Une tuyère convergente opérant en régime permanent a un col d'aire 6 cm^2 . La pression et la température génératrice sont respectivement de : 120 kPa et 400 K . Le rapport de chaleurs spécifiques $\gamma=1,4$ et assumer encore que l'écoulement est isentropique et unidimensionnel. Déterminer la pression à la sortie et le débit massique dans deux cas :

1. $P_b=90 \text{ kPa}$
2. $P_b=45 \text{ kPa}$.

Exemple 2 :

Une tuyère convergente-divergente opérant en régime permanent a un col d'aire 3 cm^2 et une surface de sortie de 6 cm^2 . L'air entre dans la tuyère à 8 bars , 400 K et un mach $0,2$ et s'écoule dans toute la tuyère. Si l'écoulement est accéléré dans toute la tuyère et le divergent opère en tant que tuyère supersonique, déterminer :

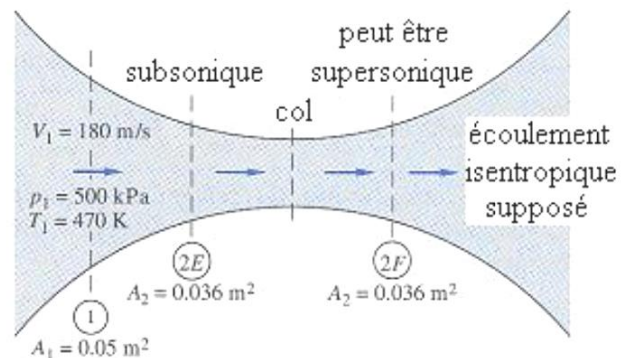
1. le débit masse
2. le mach, la pression et la température à la sortie.

Exemple 3 :

L'air à la pression P_0 et à la température T_0 s'écoule de façon isentropique dans une tuyère à partir d'un grand réservoir de stockage. À section 1 : $S_1= 0,05 \text{ m}^2$ et $u_1 = 180 \text{ m/s}$, $p_1 = 500 \text{ kPa}$, et $T_1 = 470 \text{ K}$. Déterminer :

1. La température T_0 , la pression P_0 et le nombre de Mach M_1 .
2. La surface au col S_* et le débit massique.
Si la section 2, $S_2 = 0,036 \text{ m}^2$,
3. Calculez M_2 et p_2 pour l'écoulement
 - (a) subsonique
 - (b) supersonique.

Donnée : $\gamma = 1,4$.



Exemple 4 :

Une tuyère convergente-divergente est alimentée avec l'air comprimé au repos sous une pression de 20 bars et une température de $300 \text{ }^\circ\text{C}$. Le milieu, dans lequel débouche le divergent, est à une pression de 2 bars . L'écoulement dans la tuyère est supposé isentropique, on demande de déterminer :

1. la pression, la température et la vitesse au col ;
2. le diamètre que doit posséder le col pour que le débit soit 15 kg/s ;
3. le diamètre que doit posséder la section de sortie pour que l'air y arrive avec une pression de 2 bars ;
4. la température de l'air dans la section déterminée.

REPONSES SERIE D'EXERCICE N°04

Exemple 1 :

$$\text{Si } p_b = 90\text{kPa} \rightarrow p_b > p_* \rightarrow p_e = p_b \rightarrow M = 0.654$$

$$\text{Si } p_b = 45\text{kPa} \rightarrow p_b < p_* \rightarrow p_e = p_* = 63.4\text{kPa} \rightarrow \dot{m} = \dot{m}_{max} = 0.145\text{kg/s}$$

Exemple 2 :

$$\dot{m} = 0.484\text{ kg/s}$$

$$M_1 = 2.2, \quad T_1 = 204.87\text{K}, \quad p_1 = 76.93\text{kPa}$$

Exemple 3 :

$$T_0 = 486\text{K}, \quad p_0 = 561.34\text{K}, \quad M_1 = 0.414$$

$$S_* = 0.0323\text{m}^2, \quad \dot{m}_{max} = 33.4\text{ kg/s}$$

$$M_2 = 0.6758, \quad p_2 = 419\text{kPa}, \quad M_1 = 1.4, \quad p_2 = 171.4\text{kPa}$$

Exemple 4 :

$$p_* = 1056\text{bar}, \quad T_* = 477.5\text{K}$$

$$D_* = 0.075\text{m}$$

$$D_2 = 0.104\text{m}, \quad M_2 = 2.157$$

Chapitre IV

Ondes de Choc

IV.1. Introduction

Dans un écoulement subsonique, l'onde de son a pour mission de créer une perturbation qui prévient les particules fluide de la présence d'un corps en aval. Si on admit que l'écoulement possède une vitesse supérieure à celle de la vitesse de l'onde de son, la perturbation a plus de temps de prévenir la particule de l'existence de l'obstacle et un phénomène de compression se produit à proximité de l'obstacle.

Effectivement, dans les écoulements supersoniques, il est prouvé expérimentalement qu'une discontinuité des paramètres de l'écoulement peut surgir dans une section extrêmement fixe de cet écoulement et qui entraîne augmentation de l'entropie et donc irréversible. Cette discontinuité appelé onde de choc entraîne les changements brusque de tout les paramètres de l'écoulement.

On distingue deux types d'onde de choc : Une onde de choc droite, faisant un angle droit avec la direction de l'écoulement et une autre oblique dans le reste, faisant un angle oblique avec la direction de l'écoulement fig. (IV.1). Les relations de l'onde de choc oblique peuvent être déduites de celles de l'onde droite.

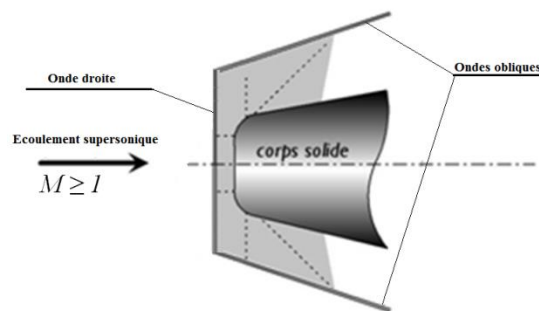


Fig.IV.1. onde de choc à profils variés

Les ondes de choc se produisent, par exemple, lors de l'aspiration dans les engins supersoniques, dans les conduits de refoulement des moteurs alternatifs.....

IV.2 Ondes de choc droites

Les relations de l'onde de choc droite stationnaire sont obtenues en appliquant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie à un volume de contrôle de section transversale.

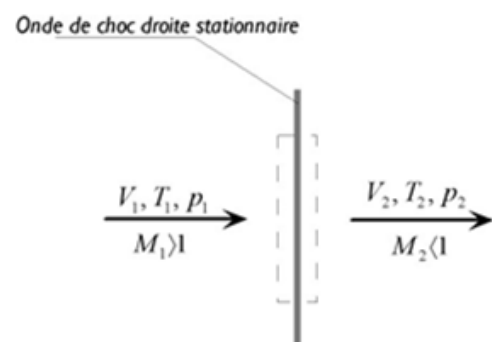


Fig. IV.2. Evolution à travers une onde de choc droite

La conservation de la masse donne :

$$\dot{m} = \rho_1 u_1 S = \rho_2 u_2 S \Rightarrow \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (\text{IV.1})$$

Du moment où il n'y a que les forces de pression qui agissent sur le volume de contrôle :

$$(p_1 - p_2)S = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p_1 - p_2) = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1) \\ (p_1 - p_2) = \rho_2 u_2 (u_2 - u_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 u_2 - u_1^2 = \frac{p_1 - p_2}{\rho_1} \\ u_2^2 - u_2 u_1 = \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \end{cases}$$

Ou bien encore :

$$u_2^2 - u_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{IV.2})$$

Enfin, en appliquant le principe de la conservation de l'énergie :

$$\frac{u_1^2}{2} + C_p T_1 = \frac{u_2^2}{2} + C_p T_2 = C_p T_0 \Rightarrow u_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = u_2^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$$

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \quad (\text{IV.3})$$

En réarrangeant cette dernière relation :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (\text{IV.4})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{p_2}{p_1} + 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_2}{p_1}} \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_2}{p_1}}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_1}{p_2}} \quad (\text{IV.6})$$

Cet ensemble de relations qui expriment la variation de température, de pression, de densité et de vitesse à travers une onde de choc droite stationnaire porte le nom de *Rankine-Hugoniot*.

La considération de la variation de l'entropie à travers une onde de choc est très importante :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \Rightarrow s_2 - s_1 = (C_v + r) \ln \left(\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{r} = \left(\frac{1}{\gamma-1} + 1 \right) \ln \left(\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \right) - \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \Rightarrow \frac{s_2 - s_1}{r} = \ln \left(\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{r} = \ln \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right]$$

$$\frac{s_2 - s_1}{r} = \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{p_2+1}{p_1} + 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{p_2}{p_1} + 1} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \quad (\text{IV.7})$$

Les équations (3)-(5) montrent que la température et la densité augmentent alors que la vitesse diminue.

L'écoulement à travers une onde de choc est adiabatique, la température génératrice ne change pas.

Si en prend l'exemple de la tuyère de Laval, l'écoulement est illustré par la figure, fig.3. Du gaz s'écoule d'un réservoir où règne la pression p_{01} , la vitesse est pratiquement nulle, il se détend pour atteindre un nombre de Mach est égale à 1 au col, il se produit une onde de choc droite. En aval de l'onde, l'écoulement est isentropiquement décéléré jusqu'à l'atteinte d'une vitesse nulle dans un deuxième réservoir où la pression est p_{02} .

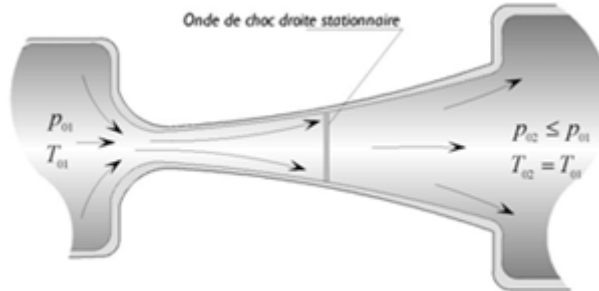


Fig. IV.3. Onde de choc droite entre deux réservoirs.

En considérant la variation d'entre l'état initial et l'état final :

$$s_{02} - s_{01} = C_p \ln \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right) - r \ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)$$

La température génératrice ne varie à travers une onde de choc :

$$s_{02} - s_{01} = -r \ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right) \Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} = \exp \left(-\frac{s_{02} - s_{01}}{r} \right) \quad (\text{IV.8})$$

IV.2.1. Relations de l'onde de choc en terme du nombre de Mach

La conservation de la masse donne :

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \Leftrightarrow u_2 = \rho_1 \frac{u_1}{a_1} = \rho_2 \frac{u_2 a_2}{a_2 a_1} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1 a_1}{M_2 a_2} \quad (\text{IV.9})$$

La conservation de la quantité de mouvement donne :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

Or :

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \Leftrightarrow p = \frac{\rho}{\gamma} a^2$$

$$\left[\frac{\rho_1}{\gamma} a_1^2 + \rho_1 u_1^2 = \frac{\rho_2}{\gamma} a_2^2 + \rho_2 u_2^2 \right] / \left[\frac{a_1^2}{\gamma} \right] \Leftrightarrow \rho_1 + \gamma \rho_1 M_1^2 = \rho_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 + \gamma \rho_2 M_2^2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \quad (IV.10)$$

L'équation de l'énergie donne :

$$\left[u_1^2 + \left(\frac{2}{\gamma-1} \right) a_1^2 = u_2^2 + \left(\frac{2}{\gamma-1} \right) a_2^2 \right] / \left[\frac{2a_1^2}{\gamma-1} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_1^2 + 1 = \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_2^2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2$$

Qui peut être réarrangée :

$$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{(\gamma-1)M_2^2 + 2} \quad (IV.11)$$

En éliminant $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ entre (Equ 9) et (Equ 10) :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 = \frac{M_1}{M_2} \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)$$

En combinant avec (Equ IV.11), on peut obtenir le nombre de Mach en aval en fonction de celui en amont :

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \quad (IV.12)$$

On peut déduire que :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)} \quad (IV.13)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \quad (IV.14)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)][2 + (\gamma-1)M_1^2]}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \quad (IV.15)$$

Pour l'air $\gamma = 1.4$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + 5}{7M_1^2 - 1} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{7M_1^2 - 1}{6} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{6M_1^2}{5 + M_1^2} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{(M_1^2 + 5)(7M_1^2 - 1)}{36M_1^2}$$

IV.2.2. Tables de l'onde de choc droite

Les relations données dans la section précédente permettent de dresser des tables et des graphes représentant tous les rapports gazodynamique à travers une onde de choc pour un rapport de chaleurs spécifiques donné.

La forme typique d'une table comporte les colonnes suivantes :

| M_1 | M_2 | $\frac{p_2}{p_1}$ | $\frac{T_2}{T_1}$ | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{a_2}{a_1}$ | $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ | $\frac{p_{02}}{p_1}$ |
|-------|-------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|----------------------|
|-------|-------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|----------------------|

IV.3. Ondes de choc obliques

IV.3.1 Introduction

Les ondes de choc peuvent se former à angle oblique σ par rapport à l'écoulement supersonique. Ce type d'ondes dévie l'écoulement d'un angle δ (angle de déflexion), contrairement aux ondes de choc normales, pour lesquelles l'écoulement aval ne change pas sa direction. Un choc oblique est causé essentiellement par la nécessité d'un écoulement de tourner selon un certain angle. Exemple, les ondes de chocs obliques se forment à la proximité du nez d'un avion militaire. La géométrie de l'écoulement considéré est illustrée dans la figure (IV.4). Comme dans la section précédente des ondes de choc normales l'état 1 dénote les conditions en amont et l'état 2 dénote celles en aval.

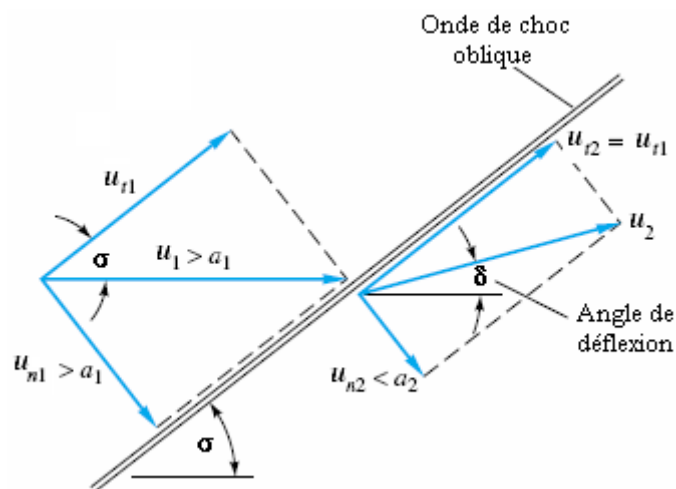


Fig. IV.4. Géométrie d'un écoulement à onde de choc oblique.

L'angle de choc oblique a une valeur σ , et la vitesse de l'écoulement en aval u_2 change de direction d'un angle δ qui est fonction de σ et les conditions de l'état 1. Par contre, l'écoulement en aval de l'onde de choc oblique peut être supersonique, sonique ou subsonique tout dépend des conditions de l'écoulement et de l'angle de choc σ .

IV.3.2. Equations de base

Il est préférable d'étudier l'écoulement à choc oblique en lui décomposant en deux composantes normale et tangentielle par rapport à l'onde, (voir figure IV.4). Pour un volume de contrôle très mince, on peut écrire les relations *Rankine-Hugoniot*, sachant que S_1 et S_2 les sections de part et d'autre de l'onde :

La conservation de la masse donne :

$$\rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2} \quad (\text{IV.16})$$

La projection normale de l'équation de quantité de mouvement est :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 u_{n2}^2 - \rho_1 u_{n1}^2 \quad (\text{IV.17})$$

La projection tangentielle de l'équation de quantité de mouvement est :

$$\rho_1 u_{n1} (u_{t2} - u_{t1}) = 0 \quad (\text{IV.18})$$

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie :

$$C_p T_1 + \frac{u_{n1}^2}{2} + \frac{u_{t1}^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_{n2}^2}{2} + \frac{u_{t2}^2}{2} = C_p T_0$$

D'après l'équation (3) on peut déduire qu'il y'en a pas de variation de la vitesse tangentielle à travers un choc oblique :

$$u_{t2} = u_{t1} = u_t \quad (\text{IV.19})$$

Pour les nombres de Mach :

$$M_{n1} = \frac{u_{n1}}{a_1} = \frac{u_1}{a_1} \sin \sigma = M_1 \sin \sigma \quad (\text{IV.20a})$$

$$M_{n2} = \frac{u_{n2}}{a_2} = \frac{u_2}{a_2} \sin(\sigma - \delta) = M_2 \sin(\sigma - \delta) \quad (\text{IV.20b})$$

IV.3.3. Relations de l'onde de choc en terme du nombre de Mach

Pour un gaz parfait ($\gamma = \text{Const}$), et avec M_1 remplacé par M_{n1} :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma+1} [2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)] \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \delta)} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} = \frac{u_{n1}}{u_{n2}} \quad (\text{IV.22})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma] \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \sigma} \quad (\text{IV.23})$$

La température génératrice ne varie à travers une onde de choc : $T_{01} = T_{02}$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{IV.24})$$

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma - 1)} \quad (\text{IV.25})$$

IV.3.5. Adaptations des tables du choc normal aux chocs obliques

Les tables (II) représentant les relations des ondes de choc normal peuvent être adaptées aux calculs des ondes de choc obliques en introduisant l'angle σ . Une onde de choc oblique avec un nombre de Mach amont M_1 peut, par une transformation appropriée, être réduite à une onde de choc normale avec un nombre de Mach amont de $M_1 \sin \sigma$ et le nombre de Mach en aval $M_2 \sin(\sigma - \delta)$.

La forme typique d'une table comporte les colonnes suivantes :

| M_1 | M_2 | $\frac{p_2}{p_1}$ | $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}$ | $\frac{T_2}{T_1}$ | $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ | $\frac{a_2^*}{a_1^*}$ |
|-------------------|-----------------------------|---------------------------|---|-------------------|-------------------------|-----------------------|
| $M_1 \sin \sigma$ | $M_2 \sin(\sigma - \delta)$ | $= \frac{u_{1n}}{u_{2n}}$ | | | | |

Une famille complète de solutions des ondes de choc obliques peut être tracée ou calculée d'après les équations (20-25). En utilisant une relation trigonométrique pour $\tan(\sigma - \delta)$, cela peut être réécrit de cette forme :

$$\tan \delta = \frac{2 \cot \sigma (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2} \quad (\text{IV.26})$$

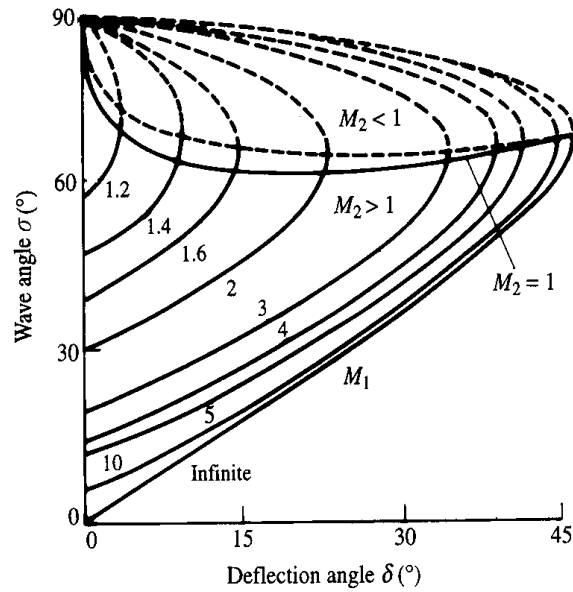


Fig. IV.5. Angles de choc σ en fonction de déflexion du choc oblique δ pour divers nombre de Mach, $\gamma = 1.4$.

Donc, toutes les solutions possibles de l'équation (IV.26) pour $\gamma = 1.4$ sont tracées dans le graphe de la figure (IV.5). Pour les déflexions $\delta < \delta_{max}$ il y'a deux solutions : un choc faible (σ petit) et un choc fort (σ grand). La ligne en tirets est ajoutée au graphique pour montrer où M_2 est exactement sonique.

Pour les déflexions nulles $\delta = 0$, la famille de chocs faibles satisfait la relation :

$$\sigma = \text{Arcsin} \frac{1}{M} \quad (\text{IV.27})$$

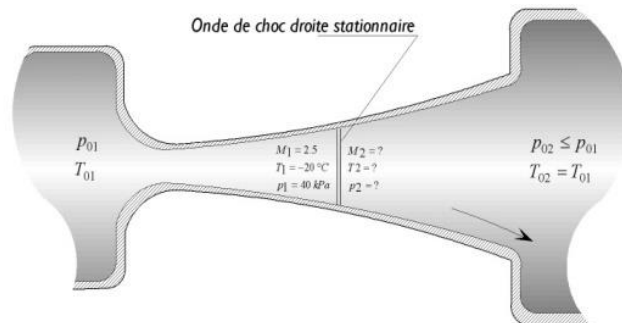
SERIE D'EXERCICE N°05

Exemple 1

Une onde de choc droite prend naissance en un point d'écoulement d'air où la pression est 30 kPa et la température -30 °C . Si le rapport de compression à travers l'onde est de 2.7, trouver la pression, la température en aval de l'onde et les deux vitesses et les nombres de Mach en amont et en aval de l'onde.

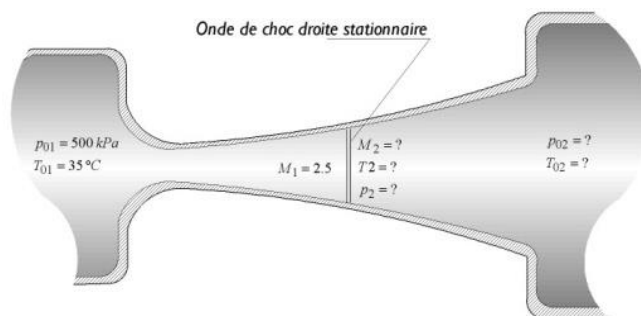
Exemple 2

Un gaz de masse molaire 39.9 et un rapport de chaleurs massiques 1.67 se transvase dans une tuyère. Une onde de choc se produit en une section de l'écoulement où le nombre de Mach est 2.5, la pression 40 kPa et la température -20 °C . Déterminer le nombre de Mach, la pression et la température en aval de l'onde.



Exemple 3

L'air est éjecté d'un grand réservoir où règnent une pression de 500 kPa et une température de 35 °C à travers un conduit de section variable. Une onde de choc se produit en une section où le Mach est de 2.5. Déterminer la pression et la température juste en aval de l'onde. Ensuite, l'écoulement débouche dans un autre grand réservoir. Déterminer la pression et la température dans cet autre réservoir. Considérer l'écoulement comme unidimensionnel isentropique sauf au niveau de l'onde.



REPONSES SERIE D'EXERCICE N°05

Exemple 1 :

$$p_2 = 81kPa , T_2 = 331.9K , u_1 = 489.9m/s , M_1 = 1.568 , u_2 = 247.8m/s , M_2 = 0.668$$

Exemple 2 :

$$M_2 = 0.553 , T_2 = 710K , p_2 = 303K$$

Exemple 3 :

$$M_1 = 2.5 \rightarrow p_1 = 22.25kPa , T_1 = 136.87K$$

$$M_1 = 2.5 \rightarrow M_2 = 0.513 \quad p_2 = 208.4kPa , T_2 = 292.6K$$

$$M_2 = 0.513 \rightarrow p_{02} = 249.4kPa , T_{02} = 308K$$

Chapitre V

Écoulement adiabatique avec frottement
(Écoulement de Fanno)

V.1 Introduction

Les parties précédentes ont montré l'effet du changement de section sur un écoulement compressible en négligeant le transfert de chaleur et le frottement. Dans ce chapitre on considère l'effet de frottement et on néglige le changement de section ainsi que le transfert de chaleur.

V.2. Lignes de Fanno

Considérons un écoulement unidimensionnel et stationnaire d'un gaz parfait avec une chaleur spécifique constante, à travers une conduite de section constante avec des parois adiabatiques et aucun travail externe, et supposons que les différences d'élévation produisent des changements négligeables par rapport aux effets de frottement. Un tel l'écoulement est appelé l'écoulement de *Fanno*. Le frottement de la paroi (due à la viscosité) est le principal facteur entraînant des changements dans les propriétés des fluides, pour l'écoulement compressible adiabatique à travers des conduits de surface constante.

Les suppositions de base sont :

1. Ecoulement unidimensionnel, stationnaire et adiabatique
2. Gaz parfait avec des chaleurs spécifiques constantes
3. Conduite à section droite constante
4. Travail mécanique et changements d'énergie potentielle négligeables
5. Contrainte de cisaillement près de la paroi corrélée par un facteur de frottement de *Darcy*.

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = Cte \quad (V.1)$$

Suivant l'équation de continuité on a :

$$S_1 = S_2 \rightarrow \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = G = Cte \quad (V.2)$$

L'équation de ligne de Fanno en fonction de l'enthalpie et la densité s'exprime de la manière suivante :

$$h = h_0 - \frac{G^2}{2\rho^2} = cte \quad (V.3)$$

Cette relation est représentée graphiquement sur la figure V.1, pour une seule valeur de h_0 et pour plusieurs valeurs de G .

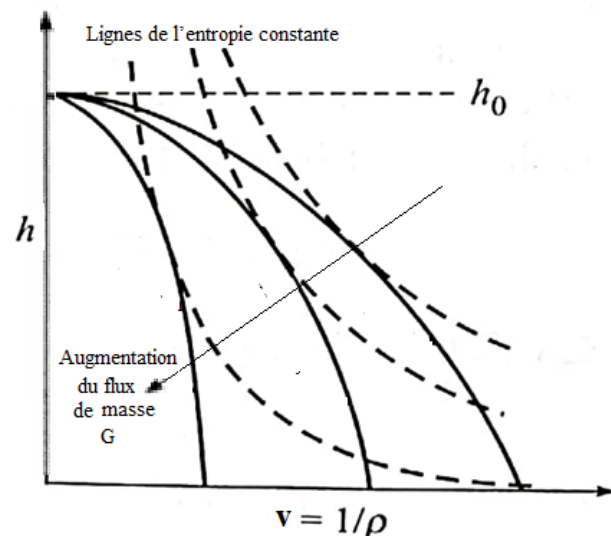


Fig.V.1 lignes de Fanno

V.3. Les équations de l'écoulement de Fanno

Le but ici est d'exprimer sous forme analytique les variations des caractéristiques d'écoulement sur la longueur d'un conduit de surface constante. Cela nécessite l'introduction de l'équation de quantité de mouvement, avec un terme représentant les forces de frottement. Considérons le volume de contrôle élémentaire de la conduite de section S et la longueur dx dans la figure (V.2). La section est constante, mais d'autres propriétés de l'écoulement (p, ρ, T, h, u) peuvent varier avec x .

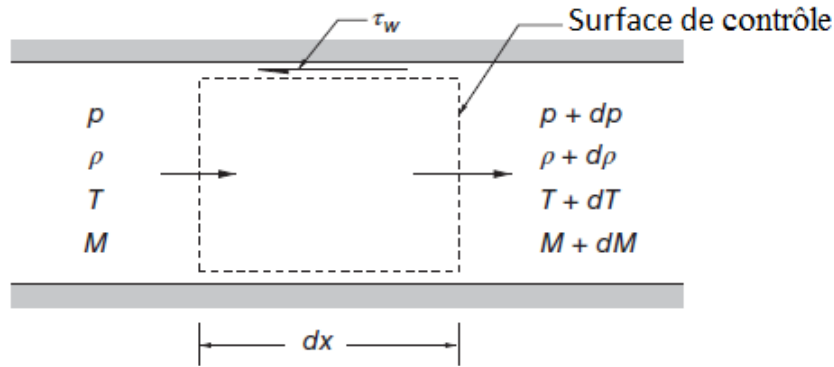


Fig.V.2. Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec frottement dans une conduite de section constante.

L'application des trois lois de conservation à ce volume de contrôle donne trois équations différentielles suivantes :

- **La conservation de la masse donne :**

$$\rho u = Cte \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (\text{V.4})$$

- **La conservation de quantité de mouvement donne :**

$$\dot{m}[(u + du) - u] = -(p + dp)S - pS - \tau_w \pi D_h dx$$

$$\Rightarrow dp + \frac{4\tau_w dx}{D} + \rho u du = 0 \quad (\text{V.5})$$

Avec D_h : le diamètre hydraulique, qui peut être défini de la manière suivante:

$$D_h = \frac{4 \cdot S}{\text{périmètre}} \quad (\text{V.6})$$

On peut facilement montrer que $D_h = D$ pour un conduit circulaire de diamètre D .

- **La conservation d'énergie donne :**

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T_0 \quad \Rightarrow \quad u du + C_p dT \quad (\text{V.7})$$

Pour des raisons de fermeture, la résolution de ces équations nécessite deux relations complémentaires.

$$\text{Pour un gaz parfait : } p = \rho r T \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{V.8})$$

Pour éliminer τ_w présent dans l'équation (V.5), on suppose que la contrainte de cisaillement à la paroi est corrélée par un coefficient de frottement local de Darcy f

$$\tau_w = \frac{1}{8} f \rho u^2 = \frac{1}{8} f \gamma p M^2 \quad (\text{V.9})$$

Où f est calculé en fonction du nombre de Reynolds local et de la rugosité de la paroi en utilisant l'équation de *Colebrook*, ou le diagramme de *Moody*.

V.4. Relations du nombre de Mach

Le phénomène physique provoquant des changements dans les propriétés d'écoulement est le frottement visqueux. Par conséquent, nous choisissons la variable $f \frac{dx}{D}$ comme indépendante. Toutes les équations peuvent être écrites en termes du nombre de Mach $M(x)$ et du coefficient de frottement, en employant la définition du nombre de Mach.

$$u^2 = M^2 \gamma r T \Rightarrow 2 \frac{du}{u} = 2 \frac{dM}{M} + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{1+(\gamma-1)M^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D} \quad (\text{V.10})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D} = -\frac{du}{u} \quad (\text{V.11})$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{d\rho_0}{\rho_0} = -\frac{1}{2} \gamma M^2 f \frac{dx}{D} \quad (\text{V.12})$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D} \quad (\text{V.13})$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \gamma M^2 \frac{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2}{1-M^2} f \frac{dx}{D} \quad (\text{V.14})$$

| | dM | dV | dP | dT | ds |
|---------|------|------|------|------|------|
| $M < 1$ | + | + | - | - | + |
| $M > 1$ | - | - | + | + | + |

Notez que la pression et la densité d'arrêt diminuent le long de la conduite pour l'écoulement soit subsonique ou bien supersonique.

Le paramètre clef ci-dessus est le nombre de Mach. Si l'écoulement d'entrée est subsonique ou supersonique, le nombre de Mach de la conduite a toujours tendance vers $M = 1$, parce que c'est le chemin le long à travers lequel l'entropie augmente, voir la figure V.3. Si la pression et la densité sont calculées des équations précédentes, les résultats peuvent être tracés dans la figure (V.4) en fonction du nombre de Mach pour $\gamma = 1.4$.

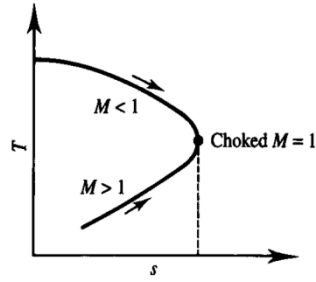


Fig.V.3. Ecoulement adiabatique avec frottement
T en fonction du s

Pour tirer des formules pratiques, nous attaquons d'abord l'équation qui relie le nombre de Mach au frottement. Séparons les variables et intégrons :

$$\int_0^{L^*} \bar{f} \frac{dx}{D} = \int_{M^2}^{1.0} \frac{1-M^2}{\gamma M^4 \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2 \right]} dM^2 \quad (\text{V.15})$$

L'intégration de cette équation d'un nombre de Mach subsonique à un nombre de Mach est égale 1, donner la valeur de L^* comme suit:

$$\frac{\bar{f} L^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \quad (\text{V.16})$$

Où \bar{f} est la valeur moyenne du coefficient de frottement entre 0 et L^* . En pratique, un \bar{f} moyen est toujours supposé. Pour des conduites non circulaires, D est remplacé par le diamètre hydraulique.

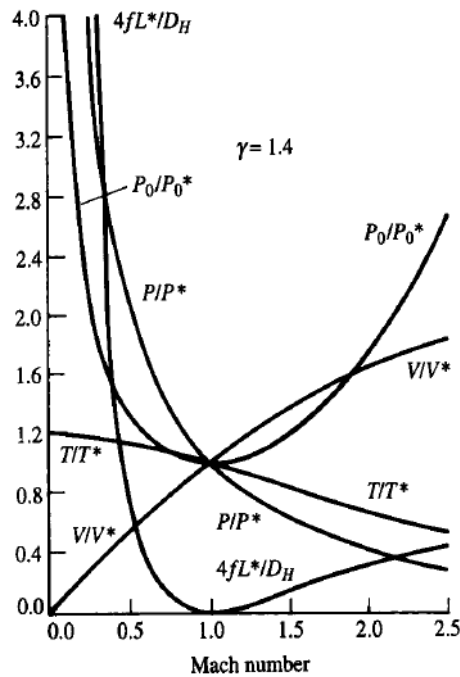


Fig.V.4. Ecoulement adiabatique avec frottement dans un conduit de section constante et $M=1$.

L'équation précédente est tabulée en fonction du nombre de Mach dans la table (III), voir l'annexe. La longueur L^* est la longueur de conduite exigée pour développer un écoulement dans la conduite partant du nombre de Mach M jusqu'au point sonique. Beaucoup de problèmes impliquent les conduites courtes qui ne deviennent jamais soniques, pour lequel la solution emploie les différences des longueurs "maximums", ou soniques tabulées. Par exemple, on donne la longueur ΔL exigée pour se développer de M_1 à M_2 par

$$\bar{f} \frac{\Delta L}{D} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_1 - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D} \right)_2 \quad (\text{V.17})$$

Cela évite le besoin de tabulations séparées pour des conduites courtes.

Il est recommandé que le coefficient de frottement \bar{f} soit estimé à partir du diagramme de *Moody* pour des nombres de Reynolds moyen et le rapport de la rugosité pariétale du conduit.

V.5. Rapports de propriétés

Les formules pour d'autres propriétés d'écoulement le long de la conduite peuvent être dérivées des équations précédentes.

La température totale est constante, on peut écrire le rapport des températures statiques:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \quad (\text{V.18})$$

Cela peut également être exprimé comme :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} \quad (\text{V.19})$$

Le rapport de pression statique :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2}} \quad (\text{V.20})$$

Le rapport de densité statique :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}} \quad (\text{V.21})$$

Le rapport de pression totale :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{V.22})$$

les propriétés soniques p^* , ρ^* , T^* et les propriétés d'arrêts p_0 , et ρ_0 sont les quantités constantes de référence appropriées dans l'écoulement adiabatique dans les conduites. La théorie calcule alors les proportions p/p^* , T/T^* , etc., comme une fonction du nombre de Mach local et l'effet de frottement intégré.

Les résultats intégrés sont :

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2} \quad (\text{V.23})$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2} \quad (\text{V.24})$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{a^2}{a^{*2}} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \quad (\text{V.25})$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{(1/2)(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} \quad (\text{V.26})$$

Toutes ces proportions sont tabulées dans la table (III). Pour calculer les changements entre des points M_1 à M_2 qui ne sont pas soniques, les produits de ces proportions sont employés.

V.6. Tables de calcul pour les courbes de Fanno

A partir des équations précédentes on peut écrire les tableaux de cet écoulement, suivant *Fanno Flow* avec $\gamma = 1,4$.

| M | T/T^* | p/p^* | p_0/p_0^* | ρ^*/ρ | F/F^* | $4 fL_{\max}/D$ |
|------|---------|----------|-------------|---------------|----------|-----------------|
| 0.02 | 1.19990 | 54.77007 | 28.94214 | 0.02191 | 22.83364 | 1778.4498 |
| 0.04 | 1.19962 | 27.38175 | 14.48149 | 0.04381 | 11.43462 | 440.3522 |
| 0.06 | 1.19914 | 18.25085 | 9.66591 | 0.06570 | 7.64285 | 193.0311 |
| 0.08 | 1.19847 | 13.68431 | 7.26161 | 0.08758 | 5.75288 | 106.7182 |
| 0.10 | 1.19760 | 10.94351 | 5.82183 | 0.10944 | 4.62363 | 66.9216 |
| 0.12 | 1.19655 | 9.11559 | 4.86432 | 0.13126 | 3.87473 | 45.4080 |
| 0.14 | 1.19531 | 7.80932 | 4.18240 | 0.15306 | 3.34317 | 32.5113 |
| 0.16 | 1.19389 | 6.82907 | 3.67274 | 0.17482 | 2.94743 | 24.1978 |
| 0.18 | 1.19227 | 6.06618 | 3.27793 | 0.19654 | 2.64223 | 18.5427 |

Tableau.V.1. Ecoulement adiabatique avec frottement, voir l'annexe III.

Exemple 1

Considérez un écoulement d'air à travers un conduit de diamètre intérieur = 0,15 m et de longueur = 30 m. Les conditions de l'écoulement d'entrée sont $M_1 = 0,3$, $p_1 = 1 \text{ atm}$ et $T_1 = 273 \text{ K}$. En supposant que $f = 0,005$, calculez les conditions de l'écoulement à la sortie, M_2 , p_2 , T_2 , et p_{02} .

Exemple 2

Considérez un écoulement d'air à travers un conduit de 5 cm de diamètre. L'air entre à $M = 2,5$ et doit sortir à $M = 1,5$. Quelle longueur de conduit est requise? Quelle longueur de conduit donnerait $M = 1$ à la sortie? Supposons que $f = 0,002$ et que l'écoulement soit adiabatique.

Exemple 3

Considérez un écoulement d'air à travers une pipe circulaire et isolée à un taux de 495 kg/minute. La pression, la température et le nombre de Mach à l'entrée sont : 0,3 MPa, 27°C, et 0,5 respectivement. Le coefficient de frottement pour le pipe est assumé constant et égale 0,005. Si le nombre de Mach à la sortie est de 0,5, déterminer :

- Le diamètre de la pipe.
- La longueur de la pipe.
- La pression et la température de l'air à la sortie.
- La chute de pression de stagnation.

REPONSES SERIE D'EXERCICE N°06

Exemple 1 :

$$M_2 = 0.475, p_2 = 0.713 \text{ atm}, T_2 = 265.8 \text{ K}, p_{02} = 0.728 \text{ atm}$$

Exemple 2 :

$$L = 1.85 \text{ m}, L_1^* = 2.7 \text{ m}$$

Exemple 3 :

$$D = 0.317 \text{ m}, L = 428.75 \text{ m}, p_2 = 87.6 \text{ kPa}, T_2 = 287 \text{ K}, p_{02} - p_{01} = 0.2011 \text{ MPa}$$

Chapitre VI

Écoulement avec Transfert de chaleur et sans frottement (Écoulement de Rayleigh)

VI.1. Introduction

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré l'effet du changement de la section et du frottement sur le processus de l'écoulement du gaz. Dans ce chapitre, nous examinons un écoulement unidimensionnel compressible stationnaire dans un canal à section constante avec l'addition de la chaleur, dans lequel l'effet de frottement est négligé. Cet écoulement est appelé dans la littérature Rayleigh Flow.

Donc, l'écoulement de Rayleigh est un écoulement sans frottement avec transfert de chaleur à travers un canal de section transversale constante. Comme dans l'écoulement de la ligne Fanno, un gaz parfait est supposé. Dans l'écoulement de Rayleigh, le refroidissement peut également être appliqué. L'accélération de la vitesse d'écoulement change la direction lorsque le refroidissement est appliqué. La densité et la pression changent en raison du refroidissement ou du chauffage externe. Contrairement aux deux modèles précédents, le transfert de chaleur peut être dans deux directions pas comme le frottement. Ce fait crée une situation différente par rapport aux deux modèles précédents. Ce modèle s'applique au cas où le transfert de chaleur est important.

VI.2. Equation de base

Pour l'écoulement de gaz à travers un canal à section constante sans frottement, l'équation de quantité de mouvement peut s'écrire comme :

$$p + \rho V^2 = \frac{F}{A} = \text{const.} \quad (\text{VI.1})$$

Par la continuité :

$$\rho V = \frac{\dot{m}}{A} = G = \text{const} \quad (\text{VI.2})$$

Combiner les Eqs. (VI.1) et (VI.2), nous obtenons

$$p + \frac{G^2}{\rho} = \frac{F}{A} \quad (\text{VI.3})$$

Pour des valeurs constantes de G et F/A , Eq. (VI.3) définit une relation unique entre la pression et la densité, appelée **la ligne de Rayleigh**. Puisque l'enthalpie h et l'entropie s sont toutes deux des fonctions de p et ρ , figure VI.1. Eq. (VI.3) peut être utilisé pour représenter une ligne de Rayleigh sur le diagramme $h - s$. En général, la plupart des fluides utilisés en pratique ont des courbes de Rayleigh de la forme générale illustrée à la figure VI.2.

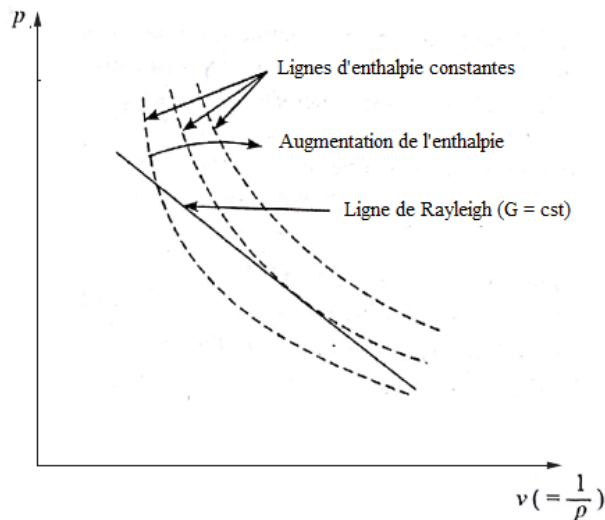


Fig.VI.1 : Courbe de Rayleigh sur le plan p-v

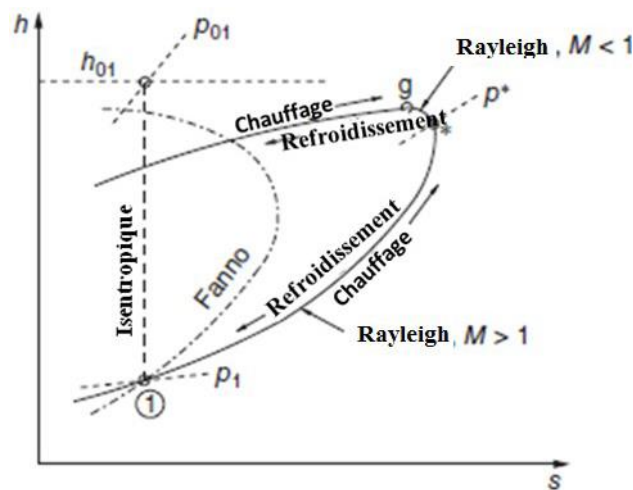


Fig.VI.2 : courbe de Rayleigh sur le plan h-s

La partie de la courbe de Rayleigh au-dessus du point d'entropie maximale correspond généralement au l'écoulement subsonique et la partie au-dessous au l'écoulement supersonique. Le processus de chauffage simple est thermodynamiquement réversible; par conséquent, l'addition de chaleur doit correspondre à une augmentation d'entropie et le rejet de chaleur doit correspondre à une diminution d'entropie (la 2^{ème} loi de la thermodynamique n'a aucune restriction). Par conséquent, le nombre de Mach est augmenté par chauffage et diminué par refroidissement, aux vitesses subsoniques. En revanche, le nombre de Mach est diminué par chauffage et augmenté par refroidissement, aux vitesses supersoniques. Pour l'addition de chaleur à des vitesses subsoniques ou supersoniques, la quantité d'apport de chaleur ne peut pas être supérieure à celle pour laquelle le nombre de Mach sortant est l'unité.

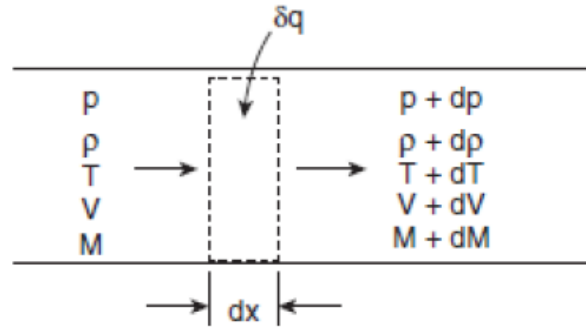


Fig.VI.3 Ecoulement de Rayleigh dans une conduite de section constante

Nous décrivons l'écoulement d'un gaz parfait à travers une conduite à section constante, sans frottement.

Considérer le volume de contrôle illustré à la figure 5.3

Le bilan énergétique sur le volume de contrôle est :

$$Q = C_p(T_{02} - T_{01}) \quad (\text{VI.4})$$

L'équation de la conservation de masse :

$$\rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A = \dot{m} \quad (\text{VI.5})$$

L'équation du moment (5.1) peut être exprimée comme:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = F/A = \text{const} \quad (\text{VI.6})$$

Le terme de moment ρu^2 peut s'écrire en terme de nombre de Mach :

$$\rho V^2 = \frac{p}{RT} V^2 = \frac{\gamma p}{\gamma RT} V^2 = \gamma p \frac{V^2}{a^2} = \gamma p M^2 \quad (\text{VI.7})$$

L'équation du moment devient :

$$p_1 + \gamma p_1 M_1^2 = p_2 + \gamma p_2 M_2^2 \quad (\text{VI.8})$$

$$p_1(1 + \gamma M_1^2) = p_2(1 + \gamma M_2^2)$$

Le rapport de pression peut être exprimé comme :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \quad (\text{VI.9})$$

Pour ne pas dimensionner l'équation, la première section est prise comme section générale et la deuxième section comme section critique. Pour la section générale, la pression est p et la section critique est p^* . Le nombre de mach correspondant aux deux sections est M et 1 respectivement.

D'où l'équation devient:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \quad (\text{VI.10})$$

Le rapport de température :

L'équation d'état des gaz parfait peut en outre aider à obtenir le rapport de température comme:

$$p_1 = \rho_1 R T_1 \quad \text{et} \quad p_2 = \rho_2 R T_2 \quad (\text{VI.11})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} \times \frac{p_2}{p_1}$$

L'équation de la conservation de masse :

$$\rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A = \dot{m} \rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{VI.12})$$

Le rapport des densités peut être exprimé comme :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1 a_1}{M_2 a_2} = \frac{M_1 \sqrt{\gamma R T_1}}{M_2 \sqrt{\gamma R T_2}} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \quad (\text{VI.13})$$

La substitution des équations (VI.11) et (VI.12) dans l'équation (VI.13) donne :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2} \times \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \rightarrow \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{p_1}{p_2} \times \frac{M_1}{M_2} \quad (\text{VI.14})$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \times \left(\frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2}\right)^2$$

En remplaçant la section générale et la section critique à la place des sections 1 et 2, nous obtenons :

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \times \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2}\right)^2 \quad (\text{VI.15})$$

Le rapport de la densité :

De l'équation de gaz parfait Le rapport de densité peut s'écrire :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \times \frac{p_1}{p_2} \quad (\text{VI.16})$$

La substitution des équations (VI.9) et (VI.14) donne :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2}\right) \times \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^2 \times \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \quad (\text{VI.17})$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right) \times \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2$$

En remplaçant la section générale et la section critique à la place des sections 1 et 2, nous obtenons :

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1+\gamma M^2}{M^2(1+\gamma)} \quad (\text{VI.18})$$

La courbe Rayleigh présente deux maximums possibles, un pour $ds/dT = 0$ et le deuxième peut être exprimé comme $dT/ds = \infty$. La deuxième loi est utilisée pour trouver l'expression de dérivée :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - C_p \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{VI.19})$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2/T_1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{C_p} = \ln \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \times \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \quad (\text{VI.20})$$

L'équation du changement d'entropie peut être généralisée en considérant la première section comme section critique et la deuxième section comme section générale.

$$\frac{s - s^*}{C_p} = \ln M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \quad (\text{VI.21})$$

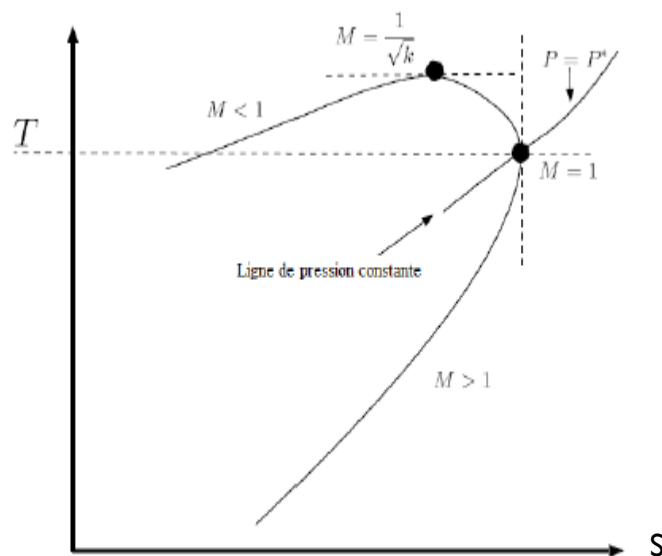


Fig.VI.4 Courbe de Rayleigh dans le diagramme T-s

Sur le diagramme T-s, une famille de courbes peut être dessinée pour une constante donnée. Alors, pour chaque courbe, plusieurs observations peuvent être généralisées. Le point particulier de $M = 1/\gamma^{1/2}$ lorsque de la chaleur supplémentaire est appliquée, la température augmente jusqu'à ce point et ensuite diminue. La transition vers l'écoulement supersonique se produit lorsque la zone change, ce qui est similaire au l'écoulement de *Fanno*. Encore, le choc peut s'expliquer par le fait que l'augmentation de l'énergie doit s'accompagner d'une

augmentation de l'entropie, mais l'entropie de l'écoulement supersonique est plus faible (voir la figure VI.4) et donc ce n'est pas possible (l'entropie maximale à $M = 1$).

La liste complète des effets de simple changement de T_0 sur les propriétés d'écoulement interne de conduite est comme suit :

| | Chauffage | | Refroidissement | |
|----------|------------|--------------|-----------------|--------------|
| | Subsonique | Supersonique | Subsonique | Supersonique |
| T_0 | Augmente | Augmente | Diminue | Diminue |
| M | Augmente | Diminue | Diminue | Augmente |
| p | Diminue | Augmente | Augmente | Diminue |
| ρ | Diminue | Augmente | Augmente | Diminue |
| V | Augmente | Diminue | Diminue | Augmente |
| p_0 | Diminue | Diminue | Augmente | Augmente |
| T | * | Augmente | ** | Diminue |
| Entropie | Augmente | Augmente | Diminue | Diminue |

* Augmente jusqu'à $M = 1/\gamma^{1/2}$ et diminue ensuite.

** Diminue jusqu'à $M = 1/\gamma^{1/2}$ et augmente ensuite.

Suivant ce tableau le paramètre le plus significatif dans cette liste est la pression d'arrêt p_0 , qui diminue toujours pendant le chauffage si l'écoulement est subsonique ou supersonique. Ainsi le chauffage augmente le nombre de Mach d'un écoulement, mais entraîne une perte dans la pression effective.

VI.3. Conditions d'arrêt

Le rapport de pression d'arrêt est obtenu en combinant la relation de pression de stagnation isentropique à deux sections avec le rapport de pression statique entre les deux sections :

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{p_{01}}{p_1} \times \frac{p_1}{p_2} \times \frac{p_2}{p_{02}} \quad (\text{VI.22})$$

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2} \left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Avec les mêmes étapes on obtient le rapport de température de stagnation :

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{T_{01}}{T_1} \times \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_2}{T_{02}} \quad (\text{VI.23})$$

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right] \left(\frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2} \right)^2$$

En remplaçant la section générale et la section critique à la place des sections 01 et 02, des équations précédentes nous obtenons :

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{VI.24})$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = M^2 \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right] \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \right)^2 \quad (\text{VI.25})$$

VI.4. Tables de calcul

A partir des équations précédentes on peut écrire le tableau de cet écoulement avec $\gamma = 1,4$

| M | $\frac{T}{T^*}$ | $\frac{T_0}{T_0^*}$ | $\frac{P}{P^*}$ | $\frac{P_0}{P_0^*}$ | $\frac{\rho^*}{\rho}$ |
|----------|-----------------|---------------------|-----------------|---------------------|-----------------------|
| 0.03000 | 0.00517 | 0.00431 | 2.397 | 1.267 | 0.00216 |
| 0.040000 | 0.00917 | 0.00765 | 2.395 | 1.266 | 0.00383 |
| 0.050000 | 0.014300 | 0.011922 | 2.392 | 1.266 | 0.00598 |
| 0.060000 | 0.020529 | 0.017119 | 2.388 | 1.265 | 0.00860 |
| 0.070000 | 0.027841 | 0.023223 | 2.384 | 1.264 | 0.011680 |
| 0.080000 | 0.036212 | 0.030215 | 2.379 | 1.262 | 0.015224 |
| 0.090000 | 0.045616 | 0.038075 | 2.373 | 1.261 | 0.019222 |
| 0.100000 | 0.056020 | 0.046777 | 2.367 | 1.259 | 0.023669 |
| 0.20000 | 0.20661 | 0.17355 | 2.273 | 1.235 | 0.090909 |

Exemple 1 :

L'air circule dans une conduite à surface constante. La pression et la température de l'air à l'entrée de la conduite sont respectivement de 100 kPa et 10°C et le nombre de Mach d'entrée est de 2,8.

La chaleur est transférée à l'air lorsqu'il circule dans la conduite et, par conséquent, le nombre de Mach à la sortie est de 1,3. Trouvez la pression et la température à la sortie. Si aucune onde de choc ne se produit dans l'écoulement, déterminez la quantité maximale de chaleur qui peut être transférée à l'air par unité de masse d'air. Trouvez également la pression et la température de sortie qui existeraient avec ce taux de transfert de chaleur maximal. Supposons que l'écoulement soit constant, que les effets de le frottement des parois puissent être négligés et que l'air se comporte comme un gaz parfait, ($C_p = 1.007 \text{ kJ/kg}$).

Exemple 2 :

L'air fourni par un réservoir à travers une tuyère convergente entre dans une conduite circulaire sans frottement avec un nombre Mach $M_1 = 0,5$ et une température et une pression de 300K et 300 kPa, respectivement. Une quantité de chaleur de 100 kJ / kg a été ajoutée au l'écoulement. Trouver la vitesse à la sortie. Quelle est la pression de retour? Quel est le changement d'entropie ?

Supposons que la chaleur spécifique de l'air soit de 1,004 kJ / kg·K.

Exemple 3 :

L'air circule dans une conduite à surface constante, avec une vitesse d'entrée de 150m/s, température de 60 °C et une pression de 0.5MN/m².une quantité de chaleur de 180kJ/kg, a été ajoutée au l'écoulement.

Trouver la pression finale, nombre de Mach final, le changement de pression de stagnation et de l'entropie.($C_p = 1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$).

REPONSES SERIE D'EXERCICE N°07

Exemple 1 :

$$p_2 = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} p_1 = \frac{0.7130}{0.2004} \times 100 = 355.8 \text{ kPa}$$

$$T_2 = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} T_1 = \frac{0.8592}{0.3179} \times 283 = 499.2^\circ\text{C}.$$

$$q = 354.3 \text{ kJ/kg}$$

$$p_2 = p^* = \frac{p_1}{p_1/p^*} = \frac{100}{0.2004} = 499 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T^* = \frac{T_1}{T_1/T^*} = \frac{183}{0.3149} = 898.7 \text{ K} = 625.7^\circ\text{C}$$

Exemple 2 :

$$T_2 = 373.3 \text{ K et } V_2 = V_1 \sqrt{\gamma R T_2} = 0.7 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 373.3} = 271.1 \text{ m/s}$$

$$p_2 = p_b = \frac{p_2 p^*}{p^* p_1} \times p_1 = 1.4235 \times \frac{1}{1.7778} \times 300 = 240.2 \text{ kPa.}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{C_p} = \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] = 0.292.$$

Exemple 3 :

$$p_{01} = 0.5 / 0.8907 = 0.5641 \text{ MN/m}^2$$

$$M_2 = 0.63$$

$$p_{01} - p_{02} = 0.5641 - 0.5187 = 0.0427 \text{ MN/m}^2$$

$$s_2 - s_1 = 1.005 \ln 1.489 - 0.287 \ln 0.7942 = 0.4662 \text{ kJ/kgK}$$

Annexes

TABLE I : Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ($\gamma =1.4$).

| M | p/p_0 | ρ/ρ_0 | T/T_0 | A/A^* |
|------|---------|---------------|---------|----------|
| 0.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | ∞ |
| 0.02 | 0.9997 | 0.9998 | 0.9999 | 28.9421 |
| 0.04 | 0.9989 | 0.9992 | 0.9997 | 14.4815 |
| 0.06 | 0.9975 | 0.9982 | 0.9993 | 9.6659 |
| 0.08 | 0.9955 | 0.9968 | 0.9987 | 7.2616 |
| 0.10 | 0.9930 | 0.9950 | 0.9980 | 5.8218 |
| 0.12 | 0.9900 | 0.9928 | 0.9971 | 4.8643 |
| 0.14 | 0.9864 | 0.9903 | 0.9961 | 4.1824 |
| 0.16 | 0.9823 | 0.9873 | 0.9949 | 3.6727 |
| 0.18 | 0.9776 | 0.9840 | 0.9936 | 3.2779 |
| 0.20 | 0.9725 | 0.9803 | 0.9921 | 2.9635 |
| 0.22 | 0.9668 | 0.9762 | 0.9904 | 2.7076 |
| 0.24 | 0.9607 | 0.9718 | 0.9886 | 2.4956 |
| 0.26 | 0.9541 | 0.9670 | 0.9867 | 2.3173 |
| 0.28 | 0.9470 | 0.9619 | 0.9846 | 2.1656 |
| 0.30 | 0.9395 | 0.9564 | 0.9823 | 2.0351 |
| 0.32 | 0.9315 | 0.9506 | 0.9799 | 1.9219 |
| 0.34 | 0.9231 | 0.9445 | 0.9774 | 1.8229 |
| 0.36 | 0.9143 | 0.9380 | 0.9747 | 1.7358 |
| 0.38 | 0.9052 | 0.9313 | 0.9719 | 1.6587 |
| 0.40 | 0.8956 | 0.9243 | 0.9690 | 1.5901 |
| 0.42 | 0.8857 | 0.9170 | 0.9659 | 1.5289 |
| 0.44 | 0.8755 | 0.9094 | 0.9627 | 1.4740 |
| 0.46 | 0.8650 | 0.9016 | 0.9594 | 1.4246 |
| 0.48 | 0.8541 | 0.8935 | 0.9559 | 1.3801 |
| 0.50 | 0.8430 | 0.8852 | 0.9524 | 1.3398 |
| 0.52 | 0.8317 | 0.8766 | 0.9487 | 1.3034 |
| 0.54 | 0.8201 | 0.8679 | 0.9449 | 1.2703 |
| 0.56 | 0.8082 | 0.8589 | 0.9410 | 1.2403 |
| 0.58 | 0.7962 | 0.8498 | 0.9370 | 1.2130 |
| 0.60 | 0.7840 | 0.8405 | 0.9328 | 1.1882 |
| 0.62 | 0.7716 | 0.8310 | 0.9286 | 1.1656 |
| 0.64 | 0.7591 | 0.8213 | 0.9243 | 1.1451 |
| 0.66 | 0.7465 | 0.8115 | 0.9199 | 1.1265 |
| 0.68 | 0.7338 | 0.8016 | 0.9153 | 1.1097 |
| 0.70 | 0.7209 | 0.7916 | 0.9107 | 1.0944 |
| 0.72 | 0.7080 | 0.7814 | 0.9061 | 1.0806 |
| 0.74 | 0.6951 | 0.7712 | 0.9013 | 1.0681 |
| 0.76 | 0.6821 | 0.7609 | 0.8964 | 1.0570 |
| 0.78 | 0.6691 | 0.7505 | 0.8915 | 1.0471 |
| 0.80 | 0.6560 | 0.7400 | 0.8865 | 1.0382 |
| 0.82 | 0.6430 | 0.7295 | 0.8815 | 1.0305 |
| 0.84 | 0.6300 | 0.7189 | 0.8763 | 1.0237 |
| 0.86 | 0.6170 | 0.7083 | 0.8711 | 1.0179 |
| 0.88 | 0.6041 | 0.6977 | 0.8659 | 1.0129 |
| 0.90 | 0.5913 | 0.6870 | 0.8606 | 1.0089 |
| 0.92 | 0.5785 | 0.6764 | 0.8552 | 1.0056 |
| 0.94 | 0.5658 | 0.6658 | 0.8498 | 1.0031 |
| 0.96 | 0.5532 | 0.6551 | 0.8444 | 1.0014 |
| 0.98 | 0.5407 | 0.6445 | 0.8389 | 1.0003 |
| 1.00 | 0.5283 | 0.6339 | 0.8333 | 1.0000 |
| 1.02 | 0.5160 | 0.6234 | 0.8278 | 1.0003 |
| 1.04 | 0.5039 | 0.6129 | 0.8222 | 1.0013 |
| 1.06 | 0.4919 | 0.6024 | 0.8165 | 1.0029 |
| 1.08 | 0.4800 | 0.5920 | 0.8108 | 1.0051 |
| 1.10 | 0.4684 | 0.5817 | 0.8052 | 1.0079 |
| 1.12 | 0.4568 | 0.5714 | 0.7994 | 1.0113 |
| 1.14 | 0.4455 | 0.5612 | 0.7937 | 1.0153 |
| 1.16 | 0.4343 | 0.5511 | 0.7879 | 1.0198 |
| 1.18 | 0.4232 | 0.5411 | 0.7822 | 1.0248 |
| 1.20 | 0.4124 | 0.5311 | 0.7764 | 1.0304 |
| 1.22 | 0.4017 | 0.5213 | 0.7706 | 1.0366 |
| 1.24 | 0.3912 | 0.5115 | 0.7648 | 1.0432 |
| 1.26 | 0.3809 | 0.5019 | 0.7590 | 1.0504 |
| 1.28 | 0.3708 | 0.4923 | 0.7532 | 1.0581 |
| 1.30 | 0.3609 | 0.4829 | 0.7474 | 1.0663 |
| 1.32 | 0.3512 | 0.4736 | 0.7416 | 1.0750 |
| 1.34 | 0.3417 | 0.4644 | 0.7358 | 1.0842 |
| 1.36 | 0.3323 | 0.4553 | 0.7300 | 1.0940 |
| 1.38 | 0.3232 | 0.4463 | 0.7242 | 1.1042 |
| 1.40 | 0.3142 | 0.4374 | 0.7184 | 1.1149 |
| 1.42 | 0.3055 | 0.4287 | 0.7126 | 1.1262 |
| 1.44 | 0.2969 | 0.4201 | 0.7069 | 1.1379 |
| 1.46 | 0.2886 | 0.4116 | 0.7011 | 1.1501 |
| 1.48 | 0.2804 | 0.4032 | 0.6954 | 1.1629 |
| 1.50 | 0.2724 | 0.3950 | 0.6897 | 1.1762 |
| 1.52 | 0.2646 | 0.3869 | 0.6840 | 1.1899 |
| 1.54 | 0.2570 | 0.3789 | 0.6783 | 1.2042 |
| 1.56 | 0.2496 | 0.3710 | 0.6726 | 1.2190 |
| 1.58 | 0.2423 | 0.3633 | 0.6670 | 1.2344 |
| 1.60 | 0.2353 | 0.3557 | 0.6614 | 1.2502 |
| 1.62 | 0.2284 | 0.3483 | 0.6558 | 1.2666 |
| 1.64 | 0.2217 | 0.3409 | 0.6502 | 1.2836 |
| 1.66 | 0.2152 | 0.3337 | 0.6447 | 1.3010 |
| 1.68 | 0.2088 | 0.3266 | 0.6392 | 1.3190 |
| 1.70 | 0.2026 | 0.3197 | 0.6337 | 1.3376 |
| 1.72 | 0.1966 | 0.3129 | 0.6283 | 1.3567 |
| 1.74 | 0.1907 | 0.3062 | 0.6229 | 1.3764 |
| 1.76 | 0.1850 | 0.2996 | 0.6175 | 1.3967 |
| 1.78 | 0.1794 | 0.2931 | 0.6121 | 1.4175 |
| 1.80 | 0.1740 | 0.2868 | 0.6068 | 1.4390 |
| 1.82 | 0.1688 | 0.2806 | 0.6015 | 1.4610 |
| 1.84 | 0.1637 | 0.2745 | 0.5963 | 1.4836 |
| 1.86 | 0.1587 | 0.2686 | 0.5910 | 1.5069 |
| 1.88 | 0.1539 | 0.2627 | 0.5859 | 1.5308 |
| 1.90 | 0.1492 | 0.2570 | 0.5807 | 1.5553 |
| 1.92 | 0.1447 | 0.2514 | 0.5756 | 1.5804 |
| 1.94 | 0.1403 | 0.2459 | 0.5705 | 1.6062 |
| 1.96 | 0.1360 | 0.2405 | 0.5655 | 1.6326 |
| 1.98 | 0.1318 | 0.2352 | 0.5605 | 1.6597 |
| 2.00 | 0.1278 | 0.2300 | 0.5556 | 1.6875 |
| 2.02 | 0.1239 | 0.2250 | 0.5506 | 1.7160 |
| 2.04 | 0.1201 | 0.2200 | 0.5458 | 1.7451 |
| 2.06 | 0.1164 | 0.2152 | 0.5409 | 1.7750 |
| 2.08 | 0.1128 | 0.2104 | 0.5361 | 1.8056 |
| 2.10 | 0.1094 | 0.2058 | 0.5313 | 1.8369 |
| 2.12 | 0.1060 | 0.2013 | 0.5266 | 1.8690 |
| 2.14 | 0.1027 | 0.1968 | 0.5219 | 1.9018 |
| 2.16 | 0.0996 | 0.1925 | 0.5173 | 1.9354 |
| 2.18 | 0.0965 | 0.1882 | 0.5127 | 1.9698 |
| 2.20 | 0.0935 | 0.1841 | 0.5081 | 2.0050 |
| 2.22 | 0.0906 | 0.1800 | 0.5036 | 2.0409 |
| 2.24 | 0.0878 | 0.1760 | 0.4991 | 2.0777 |
| 2.26 | 0.0851 | 0.1721 | 0.4947 | 2.1153 |
| 2.28 | 0.0825 | 0.1683 | 0.4903 | 2.1538 |
| 2.30 | 0.0800 | 0.1646 | 0.4859 | 2.1931 |
| 2.32 | 0.0775 | 0.1609 | 0.4816 | 2.2333 |
| 2.34 | 0.0751 | 0.1574 | 0.4773 | 2.2744 |
| 2.36 | 0.0728 | 0.1539 | 0.4731 | 2.3164 |
| 2.38 | 0.0706 | 0.1505 | 0.4688 | 2.3593 |
| 2.40 | 0.0684 | 0.1472 | 0.4647 | 2.4031 |
| 2.42 | 0.0663 | 0.1439 | 0.4606 | 2.4479 |
| 2.44 | 0.0643 | 0.1408 | 0.4565 | 2.4936 |
| 2.46 | 0.0623 | 0.1377 | 0.4524 | 2.5403 |
| 2.48 | 0.0604 | 0.1346 | 0.4484 | 2.5880 |
| 2.50 | 0.0585 | 0.1317 | 0.4444 | 2.6367 |
| 2.52 | 0.0567 | 0.1288 | 0.4405 | 2.6864 |
| 2.54 | 0.0550 | 0.1260 | 0.4366 | 2.7372 |
| 2.56 | 0.0533 | 0.1232 | 0.4328 | 2.7891 |
| 2.58 | 0.0517 | 0.1205 | 0.4289 | 2.8420 |
| 2.60 | 0.0501 | 0.1179 | 0.4252 | 2.8960 |
| 2.62 | 0.0486 | 0.1153 | 0.4214 | 2.9511 |
| 2.64 | 0.0471 | 0.1128 | 0.4177 | 3.0073 |
| 2.66 | 0.0457 | 0.1103 | 0.4141 | 3.0647 |
| 2.68 | 0.0443 | 0.1079 | 0.4104 | 3.1233 |
| 2.70 | 0.0430 | 0.1056 | 0.4068 | 3.1830 |
| 2.72 | 0.0417 | 0.1033 | 0.4033 | 3.2439 |
| 2.74 | 0.0404 | 0.1010 | 0.3998 | 3.3061 |
| 2.76 | 0.0392 | 0.0989 | 0.3963 | 3.3695 |
| 2.78 | 0.0380 | 0.0967 | 0.3928 | 3.4342 |
| 2.80 | 0.0368 | 0.0946 | 0.3894 | 3.5001 |
| 2.82 | 0.0357 | 0.0926 | 0.3860 | 3.5674 |
| 2.84 | 0.0347 | 0.0906 | 0.3827 | 3.6359 |
| 2.86 | 0.0336 | 0.0886 | 0.3794 | 3.7058 |
| 2.88 | 0.0326 | 0.0867 | 0.3761 | 3.7771 |
| 2.90 | 0.0317 | 0.0849 | 0.3729 | 3.8498 |
| 2.92 | 0.0307 | 0.0831 | 0.3696 | 3.9238 |
| 2.94 | 0.0298 | 0.0813 | 0.3665 | 3.9993 |
| 2.96 | 0.0289 | 0.0796 | 0.3633 | 4.0762 |
| 2.98 | 0.0281 | 0.0779 | 0.3602 | 4.1547 |
| 3.00 | 0.0272 | 0.0762 | 0.3571 | 4.2346 |
| 3.02 | 0.0264 | 0.0746 | 0.3541 | 4.3160 |
| 3.04 | 0.0256 | 0.0730 | 0.3511 | 4.3989 |
| 3.06 | 0.0249 | 0.0715 | 0.3481 | 4.4835 |
| 3.08 | 0.0242 | 0.0700 | 0.3452 | 4.5696 |
| 3.10 | 0.0234 | 0.0685 | 0.3422 | 4.6573 |
| 3.12 | 0.0228 | 0.0671 | 0.3393 | 4.7467 |
| 3.14 | 0.0221 | 0.0657 | 0.3365 | 4.8377 |
| 3.16 | 0.0215 | 0.0643 | 0.3337 | 4.9304 |
| 3.18 | 0.0208 | 0.0630 | 0.3309 | 5.0248 |
| 3.20 | 0.0202 | 0.0617 | 0.3281 | 5.1209 |
| 3.22 | 0.0196 | 0.0604 | 0.3253 | 5.2189 |
| 3.24 | 0.0191 | 0.0591 | 0.3226 | 5.3186 |
| 3.26 | 0.0185 | 0.0579 | 0.3199 | 5.4201 |
| 3.28 | 0.0180 | 0.0567 | 0.3173 | 5.5234 |
| 3.30 | 0.0175 | 0.0555 | 0.3147 | 5.6286 |
| 3.32 | 0.0170 | 0.0544 | 0.3121 | 5.7357 |
| 3.34 | 0.0165 | 0.0533 | 0.3095 | 5.8448 |
| 3.36 | 0.0160 | 0.0522 | 0.3069 | 5.9558 |
| 3.38 | 0.0156 | 0.0511 | 0.3044 | 6.0687 |
| 3.40 | 0.0151 | 0.0501 | 0.3019 | 6.1837 |
| 3.42 | 0.0147 | 0.0491 | 0.2995 | 6.3007 |
| 3.44 | 0.0143 | 0.0481 | 0.2970 | 6.4197 |
| 3.46 | 0.0139 | 0.0471 | 0.2946 | 6.5409 |
| 3.48 | 0.0135 | 0.0462 | 0.2922 | 6.6642 |
| 3.50 | 0.0131 | 0.0452 | 0.2899 | 6.7896 |
| 3.52 | 0.0127 | 0.0443 | 0.2875 | 6.9172 |
| 3.54 | 0.0124 | 0.0434 | 0.2852 | 7.0470 |
| 3.56 | 0.0120 | 0.0426 | 0.2829 | 7.1791 |
| 3.58 | 0.0117 | 0.0417 | 0.2806 | 7.3134 |
| 3.60 | 0.0114 | 0.0409 | 0.2784 | 7.4501 |
| 3.62 | 0.0111 | 0.0401 | 0.2762 | 7.5891 |
| 3.64 | 0.0108 | 0.0393 | 0.2740 | 7.7304 |
| 3.66 | 0.0105 | 0.0385 | 0.2718 | 7.8742 |
| 3.68 | 0.0102 | 0.0378 | 0.2697 | 8.0204 |
| 3.70 | 0.0099 | 0.0370 | 0.2675 | 8.1690 |
| 3.72 | 0.0096 | 0.0363 | 0.2654 | 8.3202 |
| 3.74 | 0.0094 | 0.0356 | 0.2633 | 8.4739 |
| 3.76 | 0.0091 | 0.0349 | 0.2613 | 8.6302 |
| 3.78 | 0.0089 | 0.0342 | 0.2592 | 8.7891 |
| 3.80 | 0.0086 | 0.0335 | 0.2572 | 8.9506 |
| 3.82 | 0.0084 | 0.0329 | 0.2552 | 9.1147 |
| 3.84 | 0.0082 | 0.0323 | 0.2532 | 9.2816 |
| 3.86 | 0.0080 | 0.0316 | 0.2513 | 9.4513 |
| 3.88 | 0.0077 | 0.0310 | 0.2493 | 9.6237 |
| 3.90 | 0.0075 | 0.0304 | 0.2474 | 9.7989 |
| 3.92 | 0.0073 | 0.0299 | 0.2455 | 9.9770 |
| 3.94 | 0.0071 | 0.0293 | 0.2436 | 10.1580 |
| 3.96 | 0.0069 | 0.0287 | 0.2418 | 10.3419 |
| 3.98 | 0.0068 | 0.0282 | 0.2399 | 10.5288 |
| 4.00 | 0.0066 | 0.0277 | 0.2381 | 10.7187 |
| 4.02 | 0.0064 | 0.0271 | 0.2363 | 10.9117 |
| 4.04 | 0.0062 | 0.0266 | 0.2345 | 11.1077 |
| 4.06 | 0.0061 | 0.0261 | 0.2327 | 11.3068 |
| 4.08 | 0.0059 | 0.0256 | 0.2310 | 11.5091 |
| 4.10 | 0.0058 | 0.0252 | 0.2293 | 11.7146 |
| 4.12 | 0.0056 | 0.0247 | 0.2275 | 11.9234 |
| 4.14 | 0.0055 | 0.0242 | 0.2258 | 12.1354 |
| 4.16 | 0.0053 | 0.0238 | 0.2242 | 12.3508 |
| 4.18 | 0.0052 | 0.0234 | 0.2225 | 12.5695 |
| 4.2 | | | | |

TABLE II : Ecoulement à onde de choc normale d'un gaz parfait ($\gamma=1.4$).

| M_1 | M_2 | p_2 / p_1 | ρ_2 / ρ_1 V_1 / V_2 | T_2 / T_1 | p_{02} / p_{01} | A_2^* / A_1^* | $\frac{\Delta s}{R}$ | M_1 | M_2 | p_2 / p_1 | ρ_2 / ρ_1 V_1 / V_2 V_{n1} / V_{n2} | T_2 / T_1 | p_{02} / p_{01} | A_2^* / A_1^* | $\frac{\Delta s}{R}$ |
|-------------------|-----------------------------|-------------|----------------------------------|-------------|-------------------|-----------------|----------------------|-------------------|-----------------------------|-------------|---|-------------|-------------------|-----------------|----------------------|
| $M_1 \sin \sigma$ | $M_2 \sin(\sigma - \delta)$ | | | | | | | $M_1 \sin \sigma$ | $M_2 \sin(\sigma - \delta)$ | | | | | | |
| 1.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.000 | 1.96 | 0.5844 | 4.3152 | 2.6069 | 1.6553 | 0.7395 | 1.3522 | 0.302 |
| 1.02 | 0.9805 | 1.0471 | 1.0334 | 1.0132 | 1.0000 | 1.0000 | 0.000 | 1.98 | 0.5808 | 4.4071 | 2.6369 | 1.6713 | 0.7302 | 1.3695 | 0.314 |
| 1.04 | 0.9620 | 1.0952 | 1.0671 | 1.0263 | 0.9999 | 1.0001 | 0.000 | 2.00 | 0.5774 | 4.5000 | 2.6667 | 1.6875 | 0.7209 | 1.3872 | 0.327 |
| 1.06 | 0.9444 | 1.1442 | 1.1009 | 1.0393 | 0.9998 | 1.0002 | 0.000 | 2.02 | 0.5740 | 4.5938 | 2.6962 | 1.7038 | 0.7115 | 1.4054 | 0.340 |
| 1.08 | 0.9277 | 1.1941 | 1.1349 | 1.0522 | 0.9994 | 1.0006 | 0.001 | 2.04 | 0.5707 | 4.6885 | 2.7255 | 1.7203 | 0.7022 | 1.4241 | 0.354 |
| 1.10 | 0.9118 | 1.2450 | 1.1691 | 1.0649 | 0.9989 | 1.0011 | 0.001 | 2.06 | 0.5675 | 4.7842 | 2.7545 | 1.7369 | 0.6928 | 1.4433 | 0.367 |
| 1.12 | 0.8966 | 1.2968 | 1.2034 | 1.0776 | 0.9982 | 1.0018 | 0.002 | 2.08 | 0.5643 | 4.8808 | 2.7833 | 1.7536 | 0.6835 | 1.4630 | 0.381 |
| 1.14 | 0.8820 | 1.3495 | 1.2378 | 1.0903 | 0.9973 | 1.0027 | 0.003 | 2.10 | 0.5613 | 4.9783 | 2.8119 | 1.7704 | 0.6742 | 1.4832 | 0.394 |
| 1.16 | 0.8682 | 1.4032 | 1.2723 | 1.1029 | 0.9961 | 1.0040 | 0.004 | 2.12 | 0.5583 | 5.0768 | 2.8402 | 1.7875 | 0.6649 | 1.5039 | 0.408 |
| 1.18 | 0.8549 | 1.4578 | 1.3069 | 1.1154 | 0.9946 | 1.0055 | 0.005 | 2.14 | 0.5554 | 5.1762 | 2.8683 | 1.8046 | 0.6557 | 1.5252 | 0.422 |
| 1.20 | 0.8422 | 1.5133 | 1.3416 | 1.1280 | 0.9928 | 1.0073 | 0.007 | 2.16 | 0.5525 | 5.2765 | 2.8962 | 1.8219 | 0.6464 | 1.5469 | 0.436 |
| 1.22 | 0.8300 | 1.5698 | 1.3764 | 1.1405 | 0.9907 | 1.0094 | 0.009 | 2.18 | 0.5498 | 5.3778 | 2.9238 | 1.8393 | 0.6373 | 1.5692 | 0.451 |
| 1.24 | 0.8183 | 1.6272 | 1.4112 | 1.1531 | 0.9884 | 1.0118 | 0.012 | 2.20 | 0.5471 | 5.4800 | 2.9512 | 1.8569 | 0.6281 | 1.5920 | 0.465 |
| 1.26 | 0.8071 | 1.6855 | 1.4460 | 1.1657 | 0.9857 | 1.0145 | 0.014 | 2.22 | 0.5444 | 5.5831 | 2.9784 | 1.8746 | 0.6191 | 1.6154 | 0.480 |
| 1.28 | 0.7963 | 1.7448 | 1.4808 | 1.1783 | 0.9827 | 1.0176 | 0.017 | 2.24 | 0.5418 | 5.6872 | 3.0053 | 1.8924 | 0.6100 | 1.6393 | 0.494 |
| 1.30 | 0.7860 | 1.8050 | 1.5157 | 1.1909 | 0.9794 | 1.0211 | 0.021 | 2.26 | 0.5393 | 5.7922 | 3.0319 | 1.9104 | 0.6011 | 1.6638 | 0.509 |
| 1.32 | 0.7760 | 1.8661 | 1.5505 | 1.2035 | 0.9758 | 1.0249 | 0.025 | 2.28 | 0.5368 | 5.8981 | 3.0584 | 1.9285 | 0.5921 | 1.6888 | 0.524 |
| 1.34 | 0.7664 | 1.9282 | 1.5854 | 1.2162 | 0.9718 | 1.0290 | 0.029 | 2.30 | 0.5344 | 6.0050 | 3.0845 | 1.9468 | 0.5833 | 1.7144 | 0.539 |
| 1.36 | 0.7572 | 1.9912 | 1.6202 | 1.2290 | 0.9676 | 1.0335 | 0.033 | 2.32 | 0.5321 | 6.1128 | 3.1105 | 1.9652 | 0.5745 | 1.7406 | 0.554 |
| 1.38 | 0.7483 | 2.0551 | 1.6549 | 1.2418 | 0.9630 | 1.0384 | 0.038 | 2.34 | 0.5297 | 6.2215 | 3.1362 | 1.9838 | 0.5658 | 1.7674 | 0.569 |
| 1.40 | 0.7397 | 2.1200 | 1.6897 | 1.2547 | 0.9582 | 1.0436 | 0.043 | 2.36 | 0.5275 | 6.3312 | 3.1617 | 2.0025 | 0.5572 | 1.7948 | 0.585 |
| 1.42 | 0.7314 | 2.1858 | 1.7243 | 1.2676 | 0.9531 | 1.0492 | 0.048 | 2.38 | 0.5253 | 6.4418 | 3.1869 | 2.0213 | 0.5486 | 1.8227 | 0.600 |
| 1.44 | 0.7235 | 2.2525 | 1.7589 | 1.2807 | 0.9476 | 1.0552 | 0.054 | 2.40 | 0.5231 | 6.5533 | 3.2119 | 2.0403 | 0.5401 | 1.8514 | 0.616 |
| 1.46 | 0.7157 | 2.3202 | 1.7934 | 1.2938 | 0.9420 | 1.0616 | 0.060 | 2.42 | 0.5210 | 6.6658 | 3.2367 | 2.0595 | 0.5317 | 1.8806 | 0.632 |
| 1.48 | 0.7083 | 2.3888 | 1.8278 | 1.3069 | 0.9360 | 1.0684 | 0.066 | 2.44 | 0.5189 | 6.7792 | 3.2612 | 2.0788 | 0.5234 | 1.9105 | 0.647 |
| 1.50 | 0.7011 | 2.4583 | 1.8621 | 1.3202 | 0.9298 | 1.0755 | 0.073 | 2.46 | 0.5169 | 6.8935 | 3.2855 | 2.0982 | 0.5152 | 1.9410 | 0.663 |
| 1.52 | 0.6941 | 2.5288 | 1.8963 | 1.3336 | 0.9233 | 1.0830 | 0.080 | 2.48 | 0.5149 | 7.0088 | 3.3095 | 2.1178 | 0.5071 | 1.9721 | 0.679 |
| 1.54 | 0.6874 | 2.6002 | 1.9303 | 1.3470 | 0.9166 | 1.0910 | 0.087 | 2.50 | 0.5130 | 7.1250 | 3.3333 | 2.1375 | 0.4990 | 2.0039 | 0.695 |
| 1.56 | 0.6809 | 2.6725 | 1.9643 | 1.3606 | 0.9097 | 1.0993 | 0.095 | 2.52 | 0.5111 | 7.2421 | 3.3569 | 2.1574 | 0.4911 | 2.0364 | 0.711 |
| 1.58 | 0.6746 | 2.7458 | 1.9981 | 1.3742 | 0.9026 | 1.1080 | 0.103 | 2.54 | 0.5092 | 7.3602 | 3.3803 | 2.1774 | 0.4832 | 2.0696 | 0.727 |
| 1.60 | 0.6684 | 2.8200 | 2.0317 | 1.3880 | 0.8952 | 1.1171 | 0.111 | 2.56 | 0.5074 | 7.4792 | 3.4034 | 2.1976 | 0.4754 | 2.1035 | 0.744 |
| 1.62 | 0.6625 | 2.8951 | 2.0653 | 1.4018 | 0.8877 | 1.1266 | 0.119 | 2.58 | 0.5056 | 7.5991 | 3.4263 | 2.2179 | 0.4677 | 2.1380 | 0.760 |
| 1.64 | 0.6568 | 2.9712 | 2.0986 | 1.4158 | 0.8799 | 1.1365 | 0.128 | 2.60 | 0.5039 | 7.7200 | 3.4490 | 2.2383 | 0.4601 | 2.1733 | 0.776 |
| 1.66 | 0.6512 | 3.0482 | 2.1318 | 1.4299 | 0.8720 | 1.1468 | 0.137 | 2.62 | 0.5022 | 7.8418 | 3.4714 | 2.2590 | 0.4526 | 2.2093 | 0.793 |
| 1.68 | 0.6458 | 3.1261 | 2.1649 | 1.4440 | 0.8639 | 1.1575 | 0.146 | 2.64 | 0.5005 | 7.9645 | 3.4936 | 2.2797 | 0.4452 | 2.2461 | 0.809 |
| 1.70 | 0.6405 | 3.2050 | 2.1977 | 1.4583 | 0.8557 | 1.1686 | 0.156 | 2.66 | 0.4988 | 8.0882 | 3.5156 | 2.3006 | 0.4379 | 2.2835 | 0.826 |
| 1.72 | 0.6355 | 3.2848 | 2.2304 | 1.4727 | 0.8474 | 1.1801 | 0.166 | 2.68 | 0.4972 | 8.2128 | 3.5374 | 2.3217 | 0.4307 | 2.3218 | 0.842 |
| 1.74 | 0.6305 | 3.3655 | 2.2629 | 1.4873 | 0.8389 | 1.1921 | 0.176 | 2.70 | 0.4956 | 8.3383 | 3.5590 | 2.3429 | 0.4236 | 2.3608 | 0.859 |
| 1.76 | 0.6257 | 3.4472 | 2.2952 | 1.5019 | 0.8302 | 1.2045 | 0.186 | 2.72 | 0.4941 | 8.4648 | 3.5803 | 2.3642 | 0.4166 | 2.4005 | 0.876 |
| 1.78 | 0.6210 | 3.5298 | 2.3273 | 1.5167 | 0.8215 | 1.2173 | 0.197 | 2.74 | 0.4926 | 8.5922 | 3.6015 | 2.3858 | 0.4097 | 2.4411 | 0.892 |
| 1.80 | 0.6165 | 3.6133 | 2.3592 | 1.5316 | 0.8127 | 1.2305 | 0.207 | 2.76 | 0.4911 | 8.7205 | 3.6224 | 2.4074 | 0.4028 | 2.4825 | 0.909 |
| 1.82 | 0.6121 | 3.6978 | 2.3909 | 1.5466 | 0.8038 | 1.2441 | 0.218 | 2.78 | 0.4896 | 8.8498 | 3.6431 | 2.4292 | 0.3961 | 2.5246 | 0.926 |
| 1.84 | 0.6078 | 3.7832 | 2.4224 | 1.5617 | 0.7948 | 1.2582 | 0.230 | 2.80 | 0.4882 | 8.9800 | 3.6635 | 2.4512 | 0.3895 | 2.5676 | 0.943 |
| 1.86 | 0.6036 | 3.8695 | 2.4537 | 1.5770 | 0.7857 | 1.2728 | 0.241 | 2.82 | 0.4868 | 9.1111 | 3.6838 | 2.4733 | 0.3829 | 2.6115 | 0.960 |
| 1.88 | 0.5996 | 3.9568 | 2.4848 | 1.5924 | 0.7765 | 1.2877 | 0.253 | 2.84 | 0.4854 | 9.2432 | 3.7039 | 2.4955 | 0.3765 | 2.6561 | 0.977 |
| 1.90 | 0.5956 | 4.0450 | 2.5157 | 1.6079 | 0.7674 | 1.3032 | 0.265 | 2.86 | 0.4840 | 9.3762 | 3.7238 | 2.5179 | 0.3701 | 2.7017 | 0.994 |
| 1.92 | 0.5918 | 4.1341 | 2.5463 | 1.6236 | 0.7581 | 1.3191 | 0.277 | 2.88 | 0.4827 | 9.5101 | 3.7434 | 2.5405 | 0.3639 | 2.7481 | 1.011 |
| 1.94 | 0.5880 | 4.2242 | 2.5767 | 1.6394 | 0.7488 | 1.3354 | 0.289 | 2.90 | 0.4814 | 9.6450 | 3.7629 | 2.5632 | 0.3577 | 2.7954 | 1.028 |
| | | | | | | | | 2.92 | 0.4801 | 9.7808 | 3.7821 | 2.5861 | 0.3517 | 2.8436 | 1.045 |
| | | | | | | | | 2.94 | 0.4788 | 9.9175 | 3.8012 | 2.6091 | 0.3457 | 2.8927 | 1.062 |
| | | | | | | | | 2.96 | 0.4776 | 10.0552 | 3.8200 | 2.6322 | 0.3398 | 2.9427 | 1.079 |
| | | | | | | | | 2.98 | 0.4764 | 10.1938 | 3.8387 | 2.6555 | 0.3340 | 2.9937 | 1.096 |

| M_1 | M_2 | p_2 / p_1 | ρ_2 / ρ_1 V_1 / V_2 V_{n1} / V_{n2} | T_2 / T_1 | p_{02} / p_{01} | A_2^* / A_1^* | $\frac{\Delta s}{R}$ |
|-------------------|-----------------------------|-------------|---|-------------|-------------------|-----------------|----------------------|
| $M_1 \sin \sigma$ | $M_2 \sin(\sigma - \delta)$ | | | | | | |
| 3.00 | 0.4752 | 10.3333 | 3.8571 | 2.6790 | 0.3283 | 3.0456 | 1.114 |
| 3.02 | 0.4740 | 10.4738 | 3.8754 | 2.7026 | 0.3227 | 3.0985 | 1.131 |
| 3.04 | 0.4729 | 10.6152 | 3.8935 | 2.7264 | 0.3172 | 3.1523 | 1.148 |
| 3.06 | 0.4717 | 10.7575 | 3.9114 | 2.7503 | 0.3118 | 3.2072 | 1.165 |
| 3.08 | 0.4706 | 10.9008 | 3.9291 | 2.7744 | 0.3065 | 3.2630 | 1.183 |
| 3.10 | 0.4695 | 11.0450 | 3.9466 | 2.7986 | 0.3012 | 3.3199 | 1.200 |
| 3.12 | 0.4685 | 11.1901 | 3.9639 | 2.8230 | 0.2960 | 3.3778 | 1.217 |
| 3.14 | 0.4674 | 11.3362 | 3.9811 | 2.8475 | 0.2910 | 3.4368 | 1.235 |
| 3.16 | 0.4664 | 11.4832 | 3.9981 | 2.8722 | 0.2860 | 3.4969 | 1.252 |
| 3.18 | 0.4654 | 11.6311 | 4.0149 | 2.8970 | 0.2811 | 3.5580 | 1.269 |
| 3.20 | 0.4643 | 11.7800 | 4.0315 | 2.9220 | 0.2762 | 3.6202 | 1.287 |
| 3.22 | 0.4634 | 11.9298 | 4.0479 | 2.9471 | 0.2715 | 3.6835 | 1.304 |
| 3.24 | 0.4624 | 12.0805 | 4.0642 | 2.9724 | 0.2668 | 3.7480 | 1.321 |
| 3.26 | 0.4614 | 12.2322 | 4.0803 | 2.9979 | 0.2622 | 3.8136 | 1.339 |
| 3.28 | 0.4605 | 12.3848 | 4.0963 | 3.0234 | 0.2577 | 3.8803 | 1.356 |
| 3.30 | 0.4596 | 12.5383 | 4.1120 | 3.0492 | 0.2533 | 3.9483 | 1.373 |
| 3.32 | 0.4587 | 12.6928 | 4.1276 | 3.0751 | 0.2489 | 4.0174 | 1.391 |
| 3.34 | 0.4578 | 12.8482 | 4.1431 | 3.1011 | 0.2446 | 4.0877 | 1.408 |
| 3.36 | 0.4569 | 13.0045 | 4.1583 | 3.1273 | 0.2404 | 4.1593 | 1.425 |
| 3.38 | 0.4560 | 13.1618 | 4.1734 | 3.1537 | 0.2363 | 4.2321 | 1.443 |
| 3.40 | 0.4552 | 13.3200 | 4.1884 | 3.1802 | 0.2322 | 4.3061 | 1.460 |
| 3.42 | 0.4544 | 13.4791 | 4.2032 | 3.2069 | 0.2282 | 4.3815 | 1.477 |
| 3.44 | 0.4535 | 13.6392 | 4.2178 | 3.2337 | 0.2243 | 4.4581 | 1.495 |
| 3.46 | 0.4527 | 13.8002 | 4.2323 | 3.2607 | 0.2205 | 4.5361 | 1.512 |
| 3.48 | 0.4519 | 13.9621 | 4.2467 | 3.2878 | 0.2167 | 4.6154 | 1.529 |
| 3.50 | 0.4512 | 14.1250 | 4.2609 | 3.3150 | 0.2129 | 4.6960 | 1.547 |
| 3.52 | 0.4504 | 14.2888 | 4.2749 | 3.3425 | 0.2093 | 4.7780 | 1.564 |
| 3.54 | 0.4496 | 14.4535 | 4.2888 | 3.3701 | 0.2057 | 4.8614 | 1.581 |
| 3.56 | 0.4489 | 14.6192 | 4.3026 | 3.3978 | 0.2022 | 4.9461 | 1.599 |
| 3.58 | 0.4481 | 14.7858 | 4.3162 | 3.4257 | 0.1987 | 5.0323 | 1.616 |
| 3.60 | 0.4474 | 14.9533 | 4.3296 | 3.4537 | 0.1953 | 5.1200 | 1.633 |
| 3.62 | 0.4467 | 15.1218 | 4.3429 | 3.4819 | 0.1920 | 5.2091 | 1.650 |
| 3.64 | 0.4460 | 15.2912 | 4.3561 | 3.5103 | 0.1887 | 5.2997 | 1.668 |
| 3.66 | 0.4453 | 15.4615 | 4.3692 | 3.5388 | 0.1855 | 5.3918 | 1.685 |
| 3.68 | 0.4446 | 15.6328 | 4.3821 | 3.5674 | 0.1823 | 5.4854 | 1.702 |
| 3.70 | 0.4439 | 15.8050 | 4.3949 | 3.5962 | 0.1792 | 5.5805 | 1.719 |
| 3.72 | 0.4433 | 15.9781 | 4.4075 | 3.6252 | 0.1761 | 5.6773 | 1.736 |
| 3.74 | 0.4426 | 16.1522 | 4.4200 | 3.6543 | 0.1731 | 5.7755 | 1.754 |
| 3.76 | 0.4420 | 16.3272 | 4.4324 | 3.6836 | 0.1702 | 5.8754 | 1.771 |
| 3.78 | 0.4414 | 16.5031 | 4.4447 | 3.7130 | 0.1673 | 5.9770 | 1.788 |
| 3.80 | 0.4407 | 16.6800 | 4.4568 | 3.7426 | 0.1645 | 6.0801 | 1.805 |
| 3.82 | 0.4401 | 16.8578 | 4.4688 | 3.7723 | 0.1617 | 6.1849 | 1.822 |
| 3.84 | 0.4395 | 17.0365 | 4.4807 | 3.8022 | 0.1589 | 6.2914 | 1.839 |
| 3.86 | 0.4389 | 17.2162 | 4.4924 | 3.8323 | 0.1563 | 6.3997 | 1.856 |
| 3.88 | 0.4383 | 17.3968 | 4.5041 | 3.8625 | 0.1536 | 6.5096 | 1.873 |
| 3.90 | 0.4377 | 17.5783 | 4.5156 | 3.8928 | 0.1510 | 6.6213 | 1.890 |
| 3.92 | 0.4372 | 17.7608 | 4.5270 | 3.9233 | 0.1485 | 6.7348 | 1.907 |
| 3.94 | 0.4366 | 17.9442 | 4.5383 | 3.9540 | 0.1460 | 6.8500 | 1.924 |
| 3.96 | 0.4360 | 18.1285 | 4.5494 | 3.9848 | 0.1435 | 6.9671 | 1.941 |
| 3.98 | 0.4355 | 18.3138 | 4.5605 | 4.0157 | 0.1411 | 7.0861 | 1.958 |
| 4.00 | 0.4350 | 18.5000 | 4.5714 | 4.0469 | 0.1388 | 7.2069 | 1.975 |
| 4.02 | 0.4344 | 18.6871 | 4.5823 | 4.0781 | 0.1364 | 7.3296 | 1.992 |

| M_1 | M_2 | p_2 / p_1 | ρ_2 / ρ_1 V_1 / V_2 V_{n1} / V_{n2} | T_2 / T_1 | p_{02} / p_{01} | A_2^* / A_1^* | $\frac{\Delta s}{R}$ |
|-------------------|-----------------------------|-------------|---|-------------|-------------------|-----------------|----------------------|
| $M_1 \sin \sigma$ | $M_2 \sin(\sigma - \delta)$ | | | | | | |
| 4.04 | 0.4339 | 18.8752 | 4.5930 | 4.1096 | 0.1342 | 7.4542 | 2.009 |
| 4.06 | 0.4334 | 19.0642 | 4.6036 | 4.1412 | 0.1319 | 7.5807 | 2.026 |
| 4.08 | 0.4329 | 19.2541 | 4.6141 | 4.1729 | 0.1297 | 7.7092 | 2.042 |
| 4.10 | 0.4324 | 19.4450 | 4.6245 | 4.2048 | 0.1276 | 7.8397 | 2.059 |
| 4.12 | 0.4319 | 19.6368 | 4.6348 | 4.2368 | 0.1254 | 7.9721 | 2.076 |
| 4.14 | 0.4314 | 19.8295 | 4.6450 | 4.2690 | 0.1234 | 8.1067 | 2.093 |
| 4.16 | 0.4309 | 20.0232 | 4.6550 | 4.3014 | 0.1213 | 8.2433 | 2.109 |
| 4.18 | 0.4304 | 20.2178 | 4.6650 | 4.3339 | 0.1193 | 8.3819 | 2.126 |
| 4.20 | 0.4299 | 20.4133 | 4.6749 | 4.3666 | 0.1173 | 8.5227 | 2.143 |
| 4.22 | 0.4295 | 20.6098 | 4.6847 | 4.3994 | 0.1154 | 8.6656 | 2.159 |
| 4.24 | 0.4290 | 20.8072 | 4.6944 | 4.4324 | 0.1135 | 8.8107 | 2.176 |
| 4.26 | 0.4286 | 21.0055 | 4.7040 | 4.4655 | 0.1116 | 8.9579 | 2.193 |
| 4.28 | 0.4281 | 21.2048 | 4.7135 | 4.4988 | 0.1098 | 9.1074 | 2.209 |
| 4.30 | 0.4277 | 21.4050 | 4.7229 | 4.5322 | 0.1080 | 9.2591 | 2.226 |
| 4.32 | 0.4272 | 21.6061 | 4.7322 | 4.5658 | 0.1062 | 9.4131 | 2.242 |
| 4.34 | 0.4268 | 21.8082 | 4.7414 | 4.5995 | 0.1045 | 9.5693 | 2.259 |
| 4.36 | 0.4264 | 22.0112 | 4.7505 | 4.6334 | 0.1028 | 9.7279 | 2.275 |
| 4.38 | 0.4260 | 22.2151 | 4.7595 | 4.6675 | 0.1011 | 9.8889 | 2.291 |
| 4.40 | 0.4255 | 22.4200 | 4.7685 | 4.7017 | 0.0995 | 10.0522 | 2.308 |
| 4.42 | 0.4251 | 22.6258 | 4.7773 | 4.7361 | 0.0979 | 10.2179 | 2.324 |
| 4.44 | 0.4247 | 22.8325 | 4.7861 | 4.7706 | 0.0963 | 10.3860 | 2.340 |
| 4.46 | 0.4243 | 23.0402 | 4.7948 | 4.8053 | 0.0947 | 10.5566 | 2.357 |
| 4.48 | 0.4239 | 23.2488 | 4.8034 | 4.8401 | 0.0932 | 10.7297 | 2.373 |
| 4.50 | 0.4236 | 23.4583 | 4.8119 | 4.8751 | 0.0917 | 10.9053 | 2.389 |
| 4.52 | 0.4232 | 23.6688 | 4.8203 | 4.9102 | 0.0902 | 11.0835 | 2.405 |
| 4.54 | 0.4228 | 23.8802 | 4.8287 | 4.9455 | 0.0888 | 11.2642 | 2.422 |
| 4.56 | 0.4224 | 24.0925 | 4.8369 | 4.9810 | 0.0874 | 11.4476 | 2.438 |
| 4.58 | 0.4220 | 24.3058 | 4.8451 | 5.0166 | 0.0860 | 11.6336 | 2.454 |
| 4.60 | 0.4217 | 24.5200 | 4.8532 | 5.0523 | 0.0846 | 11.8222 | 2.470 |
| 4.62 | 0.4213 | 24.7351 | 4.8612 | 5.0882 | 0.0832 | 12.0135 | 2.486 |
| 4.64 | 0.4210 | 24.9512 | 4.8692 | 5.1243 | 0.0819 | 12.2076 | 2.502 |
| 4.66 | 0.4206 | 25.1682 | 4.8771 | 5.1605 | 0.0806 | 12.4044 | 2.518 |
| 4.68 | 0.4203 | 25.3861 | 4.8849 | 5.1969 | 0.0793 | 12.6040 | 2.534 |
| 4.70 | 0.4199 | 25.6050 | 4.8926 | 5.2334 | 0.0781 | 12.8064 | 2.550 |
| 4.72 | 0.4196 | 25.8248 | 4.9002 | 5.2701 | 0.0769 | 13.0117 | 2.566 |
| 4.74 | 0.4192 | 26.0455 | 4.9078 | 5.3070 | 0.0756 | 13.2199 | 2.582 |
| 4.76 | 0.4189 | 26.2672 | 4.9153 | 5.3440 | 0.0745 | 13.4309 | 2.598 |
| 4.78 | 0.4186 | 26.4898 | 4.9227 | 5.3811 | 0.0733 | 13.6449 | 2.613 |
| 4.80 | 0.4183 | 26.7133 | 4.9301 | 5.4184 | 0.0721 | 13.8619 | 2.629 |
| 4.82 | 0.4179 | 26.9378 | 4.9374 | 5.4559 | 0.0710 | 14.0820 | 2.645 |
| 4.84 | 0.4176 | 27.1632 | 4.9446 | 5.4935 | 0.0699 | 14.3050 | 2.661 |
| 4.86 | 0.4173 | 27.3895 | 4.9518 | 5.5313 | 0.0688 | 14.5311 | 2.676 |
| 4.88 | 0.4170 | 27.6168 | 4.9589 | 5.5692 | 0.0677 | 14.7604 | 2.692 |
| 4.90 | 0.4167 | 27.8450 | 4.9659 | 5.6073 | 0.0667 | 14.9928 | 2.708 |
| 4.92 | 0.4164 | 28.0741 | 4.9728 | 5.6455 | 0.0657 | 15.2283 | 2.723 |
| 4.94 | 0.4161 | 28.3042 | 4.9797 | 5.6839 | 0.0647 | 15.4671 | 2.739 |
| 4.96 | 0.4158 | 28.5352 | 4.9865 | 5.7224 | 0.0637 | 15.7092 | 2.754 |
| 4.98 | 0.4155 | 28.7671 | 4.9933 | 5.7611 | 0.0627 | 15.9545 | 2.770 |
| 5.00 | 0.4152 | 29.0000 | 5.0000 | 5.8000 | 0.0617 | 16.2031 | 2.785 |
| ∞ | 0.3780 | ∞ | 6.0000 | ∞ | 0 | ∞ | ∞ |

TABLE III : Ecoulement adiabatique d'un fluide dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Fanno).

| M | $\bar{f}L^*/D$ | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* | M | $\bar{f}L^*/D$ | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* | M | $\bar{f}L^*/D$ | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* |
|------|----------------|---------|---------|--------------------------|-------------|------|----------------|---------|---------|--------------------------|-------------|----------|----------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 0.88 | 0.0218 | 1.1583 | 1.0391 | 1.1148 | 1.0129 | 1.94 | 0.2868 | 0.4265 | 0.6847 | 0.6230 | 1.6062 | 3.00 | 0.5222 | 0.2182 | 0.4286 | 0.5092 | 4.2346 |
| 0.90 | 0.0145 | 1.1291 | 1.0327 | 1.0934 | 1.0089 | 1.96 | 0.2929 | 0.4203 | 0.6786 | 0.6193 | 1.6326 | 3.02 | 0.5252 | 0.2158 | 0.4249 | 0.5080 | 4.3160 |
| 0.92 | 0.0089 | 1.1011 | 1.0263 | 1.0730 | 1.0056 | 1.98 | 0.2990 | 0.4142 | 0.6726 | 0.6158 | 1.6597 | 3.04 | 0.5281 | 0.2135 | 0.4213 | 0.5068 | 4.3989 |
| 0.94 | 0.0048 | 1.0743 | 1.0198 | 1.0535 | 1.0031 | 2.00 | 0.3050 | 0.4082 | 0.6667 | 0.6124 | 1.6875 | 3.06 | 0.5310 | 0.2112 | 0.4177 | 0.5056 | 4.4835 |
| 0.96 | 0.0021 | 1.0485 | 1.0132 | 1.0348 | 1.0014 | 2.02 | 0.3109 | 0.4024 | 0.6608 | 0.6090 | 1.7160 | 3.08 | 0.5339 | 0.2090 | 0.4142 | 0.5045 | 4.5696 |
| 0.98 | 0.0005 | 1.0238 | 1.0066 | 1.0170 | 1.0003 | 2.04 | 0.3168 | 0.3967 | 0.6549 | 0.6057 | 1.7451 | 3.10 | 0.5368 | 0.2067 | 0.4107 | 0.5034 | 4.6573 |
| 1.00 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 2.06 | 0.3225 | 0.3911 | 0.6491 | 0.6025 | 1.7750 | 3.12 | 0.5396 | 0.2045 | 0.4072 | 0.5023 | 4.7467 |
| 1.02 | 0.0005 | 0.9771 | 0.9933 | 0.9837 | 1.0003 | 2.08 | 0.3282 | 0.3856 | 0.6433 | 0.5994 | 1.8056 | 3.14 | 0.5424 | 0.2024 | 0.4038 | 0.5012 | 4.8377 |
| 1.04 | 0.0018 | 0.9551 | 0.9866 | 0.9681 | 1.0013 | 2.10 | 0.3339 | 0.3802 | 0.6376 | 0.5963 | 1.8369 | 3.16 | 0.5451 | 0.2002 | 0.4004 | 0.5001 | 4.9304 |
| 1.06 | 0.0038 | 0.9338 | 0.9798 | 0.9531 | 1.0029 | 2.12 | 0.3394 | 0.3750 | 0.6320 | 0.5934 | 1.8690 | 3.18 | 0.5478 | 0.1981 | 0.3970 | 0.4991 | 5.0248 |
| 1.08 | 0.0066 | 0.9133 | 0.9730 | 0.9387 | 1.0051 | 2.14 | 0.3449 | 0.3698 | 0.6263 | 0.5905 | 1.9018 | 3.20 | 0.5504 | 0.1961 | 0.3937 | 0.4980 | 5.1209 |
| 1.10 | 0.0099 | 0.8936 | 0.9662 | 0.9249 | 1.0079 | 2.16 | 0.3503 | 0.3648 | 0.6208 | 0.5876 | 1.9354 | 3.22 | 0.5531 | 0.1940 | 0.3904 | 0.4970 | 5.2189 |
| 1.12 | 0.0138 | 0.8745 | 0.9593 | 0.9116 | 1.0113 | 2.18 | 0.3556 | 0.3598 | 0.6152 | 0.5848 | 1.9698 | 3.24 | 0.5557 | 0.1920 | 0.3872 | 0.4960 | 5.3186 |
| 1.14 | 0.0182 | 0.8561 | 0.9524 | 0.8988 | 1.0153 | 2.20 | 0.3609 | 0.3549 | 0.6098 | 0.5821 | 2.0050 | 3.26 | 0.5582 | 0.1901 | 0.3839 | 0.4951 | 5.4201 |
| 1.16 | 0.0230 | 0.8383 | 0.9455 | 0.8865 | 1.0198 | 2.22 | 0.3661 | 0.3502 | 0.6043 | 0.5794 | 2.0409 | 3.28 | 0.5607 | 0.1881 | 0.3807 | 0.4941 | 5.5234 |
| 1.18 | 0.0281 | 0.8210 | 0.9386 | 0.8747 | 1.0248 | 2.24 | 0.3712 | 0.3455 | 0.5989 | 0.5768 | 2.0777 | 3.30 | 0.5632 | 0.1862 | 0.3776 | 0.4931 | 5.6286 |
| 1.20 | 0.0336 | 0.8044 | 0.9317 | 0.8633 | 1.0304 | 2.26 | 0.3763 | 0.3409 | 0.5936 | 0.5743 | 2.1153 | 3.32 | 0.5657 | 0.1843 | 0.3745 | 0.4922 | 5.7357 |
| 1.22 | 0.0394 | 0.7882 | 0.9247 | 0.8524 | 1.0366 | 2.28 | 0.3813 | 0.3364 | 0.5883 | 0.5718 | 2.1538 | 3.34 | 0.5681 | 0.1825 | 0.3714 | 0.4913 | 5.8448 |
| 1.24 | 0.0455 | 0.7726 | 0.9178 | 0.8418 | 1.0432 | 2.30 | 0.3862 | 0.3320 | 0.5831 | 0.5694 | 2.1931 | 3.36 | 0.5705 | 0.1806 | 0.3683 | 0.4904 | 5.9558 |
| 1.26 | 0.0517 | 0.7574 | 0.9108 | 0.8316 | 1.0504 | 2.32 | 0.3911 | 0.3277 | 0.5779 | 0.5670 | 2.2333 | 3.38 | 0.5729 | 0.1788 | 0.3653 | 0.4895 | 6.0687 |
| 1.28 | 0.0582 | 0.7427 | 0.9038 | 0.8218 | 1.0581 | 2.34 | 0.3959 | 0.3234 | 0.5728 | 0.5647 | 2.2744 | 3.40 | 0.5752 | 0.1770 | 0.3623 | 0.4886 | 6.1837 |
| 1.30 | 0.0648 | 0.7285 | 0.8969 | 0.8123 | 1.0663 | 2.36 | 0.4006 | 0.3193 | 0.5677 | 0.5624 | 2.3164 | 3.42 | 0.5775 | 0.1753 | 0.3594 | 0.4878 | 6.3007 |
| 1.32 | 0.0716 | 0.7147 | 0.8899 | 0.8031 | 1.0750 | 2.38 | 0.4053 | 0.3152 | 0.5626 | 0.5602 | 2.3593 | 3.44 | 0.5798 | 0.1736 | 0.3564 | 0.4869 | 6.4197 |
| 1.34 | 0.0785 | 0.7012 | 0.8829 | 0.7942 | 1.0842 | 2.40 | 0.4099 | 0.3111 | 0.5576 | 0.5580 | 2.4031 | 3.46 | 0.5820 | 0.1718 | 0.3535 | 0.4861 | 6.5409 |
| 1.36 | 0.0855 | 0.6882 | 0.8760 | 0.7856 | 1.0940 | 2.42 | 0.4144 | 0.3072 | 0.5527 | 0.5558 | 2.4479 | 3.48 | 0.5842 | 0.1702 | 0.3507 | 0.4853 | 6.6642 |
| 1.38 | 0.0926 | 0.6755 | 0.8690 | 0.7773 | 1.1042 | 2.44 | 0.4189 | 0.3033 | 0.5478 | 0.5537 | 2.4936 | 3.50 | 0.5864 | 0.1685 | 0.3478 | 0.4845 | 6.7896 |
| 1.40 | 0.0997 | 0.6632 | 0.8621 | 0.7693 | 1.1149 | 2.46 | 0.4233 | 0.2995 | 0.5429 | 0.5517 | 2.5403 | 3.52 | 0.5886 | 0.1669 | 0.3450 | 0.4837 | 6.9172 |
| 1.42 | 0.1069 | 0.6512 | 0.8551 | 0.7615 | 1.1262 | 2.48 | 0.4277 | 0.2958 | 0.5381 | 0.5497 | 2.5880 | 3.54 | 0.5907 | 0.1653 | 0.3422 | 0.4829 | 7.0470 |
| 1.44 | 0.1142 | 0.6396 | 0.8482 | 0.7540 | 1.1379 | 2.50 | 0.4320 | 0.2921 | 0.5333 | 0.5477 | 2.6367 | 3.56 | 0.5928 | 0.1637 | 0.3395 | 0.4821 | 7.1791 |
| 1.46 | 0.1215 | 0.6282 | 0.8413 | 0.7467 | 1.1501 | 2.52 | 0.4362 | 0.2885 | 0.5286 | 0.5458 | 2.6864 | 3.58 | 0.5949 | 0.1621 | 0.3368 | 0.4813 | 7.3134 |
| 1.48 | 0.1288 | 0.6172 | 0.8344 | 0.7397 | 1.1629 | 2.54 | 0.4404 | 0.2850 | 0.5239 | 0.5439 | 2.7372 | 3.60 | 0.5970 | 0.1606 | 0.3341 | 0.4806 | 7.4501 |
| 1.50 | 0.1360 | 0.6065 | 0.8276 | 0.7328 | 1.1762 | 2.56 | 0.4445 | 0.2815 | 0.5193 | 0.5421 | 2.7891 | 3.62 | 0.5990 | 0.1590 | 0.3314 | 0.4799 | 7.5891 |
| 1.52 | 0.1433 | 0.5960 | 0.8207 | 0.7262 | 1.1899 | 2.58 | 0.4486 | 0.2781 | 0.5147 | 0.5402 | 2.8420 | 3.64 | 0.6010 | 0.1575 | 0.3288 | 0.4791 | 7.7304 |
| 1.54 | 0.1506 | 0.5858 | 0.8139 | 0.7198 | 1.2042 | 2.60 | 0.4526 | 0.2747 | 0.5102 | 0.5385 | 2.8960 | 3.66 | 0.6030 | 0.1560 | 0.3262 | 0.4784 | 7.8742 |
| 1.56 | 0.1579 | 0.5759 | 0.8071 | 0.7135 | 1.2190 | 2.62 | 0.4565 | 0.2714 | 0.5057 | 0.5367 | 2.9511 | 3.68 | 0.6049 | 0.1546 | 0.3236 | 0.4777 | 8.0204 |
| 1.58 | 0.1651 | 0.5662 | 0.8004 | 0.7074 | 1.2344 | 2.64 | 0.4604 | 0.2682 | 0.5013 | 0.5350 | 3.0073 | 3.70 | 0.6068 | 0.1531 | 0.3210 | 0.4770 | 8.1690 |
| 1.60 | 0.1724 | 0.5568 | 0.7937 | 0.7016 | 1.2502 | 2.66 | 0.4643 | 0.2650 | 0.4969 | 0.5333 | 3.0647 | 3.72 | 0.6087 | 0.1517 | 0.3185 | 0.4763 | 8.3202 |
| 1.62 | 0.1795 | 0.5476 | 0.7869 | 0.6958 | 1.2666 | 2.68 | 0.4681 | 0.2619 | 0.4925 | 0.5317 | 3.1233 | 3.74 | 0.6106 | 0.1503 | 0.3160 | 0.4757 | 8.4739 |
| 1.64 | 0.1867 | 0.5386 | 0.7803 | 0.6903 | 1.2836 | 2.70 | 0.4718 | 0.2588 | 0.4882 | 0.5301 | 3.1830 | 3.76 | 0.6125 | 0.1489 | 0.3135 | 0.4750 | 8.6302 |
| 1.66 | 0.1938 | 0.5299 | 0.7736 | 0.6849 | 1.3010 | 2.72 | 0.4755 | 0.2558 | 0.4839 | 0.5285 | 3.2439 | 3.78 | 0.6143 | 0.1475 | 0.3111 | 0.4743 | 8.7891 |
| 1.68 | 0.2008 | 0.5213 | 0.7670 | 0.6796 | 1.3190 | 2.74 | 0.4791 | 0.2528 | 0.4797 | 0.5269 | 3.3061 | 3.80 | 0.6161 | 0.1462 | 0.3086 | 0.4737 | 8.9506 |
| 1.70 | 0.2078 | 0.5130 | 0.7605 | 0.6745 | 1.3376 | 2.76 | 0.4827 | 0.2498 | 0.4755 | 0.5254 | 3.3695 | 3.82 | 0.6179 | 0.1449 | 0.3062 | 0.4730 | 9.1147 |
| 1.72 | 0.2147 | 0.5048 | 0.7539 | 0.6696 | 1.3567 | 2.78 | 0.4863 | 0.2470 | 0.4714 | 0.5239 | 3.4342 | 3.84 | 0.6197 | 0.1436 | 0.3039 | 0.4724 | 9.2816 |
| 1.74 | 0.2216 | 0.4969 | 0.7474 | 0.6648 | 1.3764 | 2.80 | 0.4898 | 0.2441 | 0.4673 | 0.5225 | 3.5001 | 3.86 | 0.6214 | 0.1423 | 0.3015 | 0.4718 | 9.4513 |
| 1.76 | 0.2284 | 0.4891 | 0.7410 | 0.6601 | 1.3967 | 2.82 | 0.4932 | 0.2414 | 0.4632 | 0.5210 | 3.5674 | 3.88 | 0.6231 | 0.1410 | 0.2992 | 0.4712 | 9.6237 |
| 1.78 | 0.2352 | 0.4815 | 0.7345 | 0.6555 | 1.4175 | 2.84 | 0.4966 | 0.2386 | 0.4592 | 0.5196 | 3.6359 | 3.90 | 0.6248 | 0.1397 | 0.2969 | 0.4706 | 9.7989 |
| 1.80 | 0.2419 | 0.4741 | 0.7282 | 0.6511 | 1.4390 | 2.86 | 0.5000 | 0.2359 | 0.4552 | 0.5182 | 3.7058 | 3.92 | 0.6265 | 0.1385 | 0.2946 | 0.4700 | 9.9770 |
| 1.82 | 0.2485 | 0.4668 | 0.7218 | 0.6467 | 1.4610 | 2.88 | 0.5033 | 0.2333 | 0.4513 | 0.5169 | 3.7771 | 3.94 | 0.6282 | 0.1372 | 0.2923 | 0.4694 | 10.1580 |
| 1.84 | 0.2551 | 0.4597 | 0.7155 | 0.6425 | 1.4836 | 2.90 | 0.5065 | 0.2307 | 0.4474 | 0.5155 | 3.8498 | 3.96 | 0.6298 | 0.1360 | 0.2901 | 0.4688 | 10.3419 |
| 1.86 | 0.2616 | 0.4528 | 0.7093 | 0.6384 | 1.5069 | 2.92 | 0.5097 | 0.2281 | 0.4436 | 0.5142 | 3.9238 | 3.98 | 0.6315 | 0.1348 | 0.2879 | 0.4683 | 10.5288 |
| 1.88 | 0.2680 | 0.4460 | 0.7030 | 0.6344 | 1.5308 | 2.94 | 0.5129 | 0.2256 | 0.4398 | 0.5129 | 3.9993 | 4.00 | 0.6331 | 0.1336 | 0.2857 | 0.4677 | 10.7187 |
| 1.90 | 0.2743 | 0.4394 | 0.6969 | 0.6305 | 1.5553 | 2.96 | 0.5160 | 0.2231 | 0.4360 | 0.5116 | 4.0762 | ∞ | 0.8215 | 0 | 0 | 0.4082 | ∞ |
| 1.92 | 0.2806 | 0.4329 | 0.6907 | 0.6267 | 1.5804 | 2.98 | 0.5191 | 0.2206 | 0.4323 | 0.5104 | 4.1547 | | | | | | |

TABLE IV : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

| M | T_0/T_0^* | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | P_0/P_0^* |
|------|-------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 0.00 | 0.0000 | 2.4000 | 0.0000 | ∞ | 1.2679 |
| 0.02 | 0.0019 | 2.3987 | 0.0023 | 1042.2500 | 1.2675 |
| 0.04 | 0.0076 | 2.3946 | 0.0092 | 261.0000 | 1.2665 |
| 0.06 | 0.0171 | 2.3880 | 0.0205 | 116.3241 | 1.2647 |
| 0.08 | 0.0302 | 2.3787 | 0.0362 | 65.6875 | 1.2623 |
| 0.10 | 0.0468 | 2.3669 | 0.0560 | 42.2500 | 1.2591 |
| 0.12 | 0.0666 | 2.3526 | 0.0797 | 29.5185 | 1.2554 |
| 0.14 | 0.0895 | 2.3359 | 0.1069 | 21.8418 | 1.2510 |
| 0.16 | 0.1151 | 2.3170 | 0.1374 | 16.8594 | 1.2461 |
| 0.18 | 0.1432 | 2.2959 | 0.1708 | 13.4434 | 1.2406 |
| 0.20 | 0.1736 | 2.2727 | 0.2066 | 11.0000 | 1.2346 |
| 0.22 | 0.2057 | 2.2477 | 0.2445 | 9.1922 | 1.2281 |
| 0.24 | 0.2395 | 2.2209 | 0.2841 | 7.8171 | 1.2213 |
| 0.26 | 0.2745 | 2.1925 | 0.3250 | 6.7470 | 1.2140 |
| 0.28 | 0.3104 | 2.1626 | 0.3667 | 5.8980 | 1.2064 |
| 0.30 | 0.3469 | 2.1314 | 0.4089 | 5.2130 | 1.1985 |
| 0.32 | 0.3837 | 2.0991 | 0.4512 | 4.6523 | 1.1904 |
| 0.34 | 0.4206 | 2.0657 | 0.4933 | 4.1877 | 1.1822 |
| 0.36 | 0.4572 | 2.0314 | 0.5348 | 3.7984 | 1.1737 |
| 0.38 | 0.4935 | 1.9964 | 0.5755 | 3.4688 | 1.1652 |
| 0.40 | 0.5290 | 1.9608 | 0.6151 | 3.1875 | 1.1566 |
| 0.42 | 0.5638 | 1.9247 | 0.6535 | 2.9454 | 1.1480 |
| 0.44 | 0.5975 | 1.8882 | 0.6903 | 2.7355 | 1.1394 |
| 0.46 | 0.6301 | 1.8515 | 0.7254 | 2.5525 | 1.1308 |
| 0.48 | 0.6614 | 1.8147 | 0.7587 | 2.3918 | 1.1224 |
| 0.50 | 0.6914 | 1.7778 | 0.7901 | 2.2500 | 1.1141 |
| 0.52 | 0.7199 | 1.7409 | 0.8196 | 2.1243 | 1.1059 |
| 0.54 | 0.7470 | 1.7043 | 0.8469 | 2.0122 | 1.0979 |
| 0.56 | 0.7725 | 1.6678 | 0.8723 | 1.9120 | 1.0901 |
| 0.58 | 0.7965 | 1.6316 | 0.8955 | 1.8219 | 1.0826 |
| 0.60 | 0.8189 | 1.5957 | 0.9167 | 1.7407 | 1.0753 |
| 0.62 | 0.8398 | 1.5603 | 0.9358 | 1.6673 | 1.0682 |
| 0.64 | 0.8592 | 1.5253 | 0.9530 | 1.6006 | 1.0615 |
| 0.66 | 0.8771 | 1.4908 | 0.9682 | 1.5399 | 1.0550 |
| 0.68 | 0.8935 | 1.4569 | 0.9814 | 1.4844 | 1.0489 |
| 0.70 | 0.9085 | 1.4235 | 0.9929 | 1.4337 | 1.0431 |
| 0.72 | 0.9221 | 1.3907 | 1.0026 | 1.3871 | 1.0376 |
| 0.74 | 0.9344 | 1.3585 | 1.0106 | 1.3442 | 1.0325 |
| 0.76 | 0.9455 | 1.3270 | 1.0171 | 1.3047 | 1.0278 |
| 0.78 | 0.9553 | 1.2961 | 1.0220 | 1.2682 | 1.0234 |
| 0.80 | 0.9639 | 1.2658 | 1.0255 | 1.2344 | 1.0193 |
| 0.82 | 0.9715 | 1.2362 | 1.0276 | 1.2030 | 1.0157 |
| 0.84 | 0.9781 | 1.2073 | 1.0285 | 1.1738 | 1.0124 |

| M | T_0/T_0^* | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | P_0/P_0^* |
|------|-------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 0.86 | 0.9836 | 1.1791 | 1.0283 | 1.1467 | 1.0095 |
| 0.88 | 0.9883 | 1.1515 | 1.0269 | 1.1214 | 1.0070 |
| 0.90 | 0.9921 | 1.1246 | 1.0245 | 1.0977 | 1.0049 |
| 0.92 | 0.9951 | 1.0984 | 1.0212 | 1.0756 | 1.0031 |
| 0.94 | 0.9973 | 1.0728 | 1.0170 | 1.0549 | 1.0017 |
| 0.96 | 0.9988 | 1.0479 | 1.0121 | 1.0354 | 1.0008 |
| 0.98 | 0.9997 | 1.0236 | 1.0064 | 1.0172 | 1.0002 |
| 1.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1.02 | 0.9997 | 0.9770 | 0.9930 | 0.9838 | 1.0002 |
| 1.04 | 0.9989 | 0.9546 | 0.9855 | 0.9686 | 1.0008 |
| 1.06 | 0.9977 | 0.9327 | 0.9776 | 0.9542 | 1.0017 |
| 1.08 | 0.9960 | 0.9115 | 0.9691 | 0.9406 | 1.0031 |
| 1.10 | 0.9939 | 0.8909 | 0.9603 | 0.9277 | 1.0049 |
| 1.12 | 0.9915 | 0.8708 | 0.9512 | 0.9155 | 1.0070 |
| 1.14 | 0.9887 | 0.8512 | 0.9417 | 0.9039 | 1.0095 |
| 1.16 | 0.9856 | 0.8322 | 0.9320 | 0.8930 | 1.0124 |
| 1.18 | 0.9823 | 0.8137 | 0.9220 | 0.8826 | 1.0157 |
| 1.20 | 0.9787 | 0.7958 | 0.9118 | 0.8727 | 1.0194 |
| 1.22 | 0.9749 | 0.7783 | 0.9015 | 0.8633 | 1.0235 |
| 1.24 | 0.9709 | 0.7613 | 0.8911 | 0.8543 | 1.0279 |
| 1.26 | 0.9668 | 0.7447 | 0.8805 | 0.8458 | 1.0328 |
| 1.28 | 0.9624 | 0.7287 | 0.8699 | 0.8376 | 1.0380 |
| 1.30 | 0.9580 | 0.7130 | 0.8592 | 0.8299 | 1.0437 |
| 1.32 | 0.9534 | 0.6978 | 0.8484 | 0.8225 | 1.0497 |
| 1.34 | 0.9487 | 0.6830 | 0.8377 | 0.8154 | 1.0561 |
| 1.36 | 0.9440 | 0.6686 | 0.8269 | 0.8086 | 1.0629 |
| 1.38 | 0.9391 | 0.6546 | 0.8161 | 0.8021 | 1.0701 |
| 1.40 | 0.9343 | 0.6410 | 0.8054 | 0.7959 | 1.0777 |
| 1.42 | 0.9293 | 0.6278 | 0.7947 | 0.7900 | 1.0856 |
| 1.44 | 0.9243 | 0.6149 | 0.7840 | 0.7843 | 1.0940 |
| 1.46 | 0.9193 | 0.6024 | 0.7735 | 0.7788 | 1.1028 |
| 1.48 | 0.9143 | 0.5902 | 0.7629 | 0.7736 | 1.1120 |
| 1.50 | 0.9093 | 0.5783 | 0.7525 | 0.7685 | 1.1215 |
| 1.52 | 0.9042 | 0.5668 | 0.7422 | 0.7637 | 1.1315 |
| 1.54 | 0.8992 | 0.5555 | 0.7319 | 0.7590 | 1.1419 |
| 1.56 | 0.8942 | 0.5446 | 0.7217 | 0.7545 | 1.1527 |
| 1.58 | 0.8892 | 0.5339 | 0.7117 | 0.7502 | 1.1640 |
| 1.60 | 0.8842 | 0.5236 | 0.7017 | 0.7461 | 1.1756 |
| 1.62 | 0.8792 | 0.5135 | 0.6919 | 0.7421 | 1.1877 |
| 1.64 | 0.8743 | 0.5036 | 0.6822 | 0.7383 | 1.2002 |
| 1.66 | 0.8694 | 0.4940 | 0.6726 | 0.7345 | 1.2131 |
| 1.68 | 0.8645 | 0.4847 | 0.6631 | 0.7310 | 1.2264 |
| 1.70 | 0.8597 | 0.4756 | 0.6538 | 0.7275 | 1.2402 |
| 1.72 | 0.8549 | 0.4668 | 0.6445 | 0.7242 | 1.2545 |
| 1.74 | 0.8502 | 0.4581 | 0.6355 | 0.7210 | 1.2692 |
| 1.76 | 0.8455 | 0.4497 | 0.6265 | 0.7178 | 1.2843 |
| 1.78 | 0.8409 | 0.4415 | 0.6176 | 0.7148 | 1.2999 |
| 1.80 | 0.8363 | 0.4335 | 0.6089 | 0.7119 | 1.3159 |
| 1.82 | 0.8317 | 0.4257 | 0.6004 | 0.7091 | 1.3324 |
| 1.84 | 0.8273 | 0.4181 | 0.5919 | 0.7064 | 1.3494 |
| 1.86 | 0.8228 | 0.4107 | 0.5836 | 0.7038 | 1.3669 |
| 1.88 | 0.8185 | 0.4035 | 0.5754 | 0.7012 | 1.3849 |
| 1.90 | 0.8141 | 0.3964 | 0.5673 | 0.6988 | 1.4033 |

| M | T_0/T_0^* | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* |
|------|-------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 1.92 | 0.8099 | 0.3896 | 0.5594 | 0.6964 | 1.4222 |
| 1.94 | 0.8057 | 0.3828 | 0.5516 | 0.6940 | 1.4417 |
| 1.96 | 0.8015 | 0.3763 | 0.5439 | 0.6918 | 1.4616 |
| 1.98 | 0.7974 | 0.3699 | 0.5364 | 0.6896 | 1.4821 |
| 2.00 | 0.7934 | 0.3636 | 0.5289 | 0.6875 | 1.5031 |
| 2.02 | 0.7894 | 0.3575 | 0.5216 | 0.6854 | 1.5246 |
| 2.04 | 0.7855 | 0.3516 | 0.5144 | 0.6835 | 1.5467 |
| 2.06 | 0.7816 | 0.3458 | 0.5074 | 0.6815 | 1.5693 |
| 2.08 | 0.7778 | 0.3401 | 0.5004 | 0.6796 | 1.5924 |
| 2.10 | 0.7741 | 0.3345 | 0.4936 | 0.6778 | 1.6162 |
| 2.12 | 0.7704 | 0.3291 | 0.4868 | 0.6760 | 1.6404 |
| 2.14 | 0.7667 | 0.3238 | 0.4802 | 0.6743 | 1.6653 |
| 2.16 | 0.7631 | 0.3186 | 0.4737 | 0.6726 | 1.6908 |
| 2.18 | 0.7596 | 0.3136 | 0.4673 | 0.6710 | 1.7168 |
| 2.20 | 0.7561 | 0.3086 | 0.4611 | 0.6694 | 1.7434 |
| 2.22 | 0.7527 | 0.3038 | 0.4549 | 0.6679 | 1.7707 |
| 2.24 | 0.7493 | 0.2991 | 0.4488 | 0.6664 | 1.7986 |
| 2.26 | 0.7460 | 0.2945 | 0.4428 | 0.6649 | 1.8271 |
| 2.28 | 0.7428 | 0.2899 | 0.4370 | 0.6635 | 1.8562 |
| 2.30 | 0.7395 | 0.2855 | 0.4312 | 0.6621 | 1.8860 |
| 2.32 | 0.7364 | 0.2812 | 0.4256 | 0.6607 | 1.9165 |
| 2.34 | 0.7333 | 0.2769 | 0.4200 | 0.6594 | 1.9476 |
| 2.36 | 0.7302 | 0.2728 | 0.4145 | 0.6581 | 1.9794 |
| 2.38 | 0.7272 | 0.2688 | 0.4091 | 0.6569 | 2.0119 |
| 2.40 | 0.7242 | 0.2648 | 0.4038 | 0.6557 | 2.0451 |
| 2.42 | 0.7213 | 0.2609 | 0.3986 | 0.6545 | 2.0789 |
| 2.44 | 0.7184 | 0.2571 | 0.3935 | 0.6533 | 2.1136 |
| 2.46 | 0.7156 | 0.2534 | 0.3885 | 0.6522 | 2.1489 |
| 2.48 | 0.7128 | 0.2497 | 0.3836 | 0.6511 | 2.1850 |
| 2.50 | 0.7101 | 0.2462 | 0.3787 | 0.6500 | 2.2218 |
| 2.52 | 0.7074 | 0.2427 | 0.3739 | 0.6489 | 2.2594 |
| 2.54 | 0.7047 | 0.2392 | 0.3692 | 0.6479 | 2.2978 |
| 2.56 | 0.7021 | 0.2359 | 0.3646 | 0.6469 | 2.3370 |
| 2.58 | 0.6995 | 0.2326 | 0.3601 | 0.6459 | 2.3770 |
| 2.60 | 0.6970 | 0.2294 | 0.3556 | 0.6450 | 2.4177 |
| 2.62 | 0.6945 | 0.2262 | 0.3512 | 0.6440 | 2.4593 |
| 2.64 | 0.6921 | 0.2231 | 0.3469 | 0.6431 | 2.5018 |
| 2.66 | 0.6896 | 0.2201 | 0.3427 | 0.6422 | 2.5451 |
| 2.68 | 0.6873 | 0.2171 | 0.3385 | 0.6413 | 2.5892 |
| 2.70 | 0.6849 | 0.2142 | 0.3344 | 0.6405 | 2.6343 |
| 2.72 | 0.6826 | 0.2113 | 0.3304 | 0.6397 | 2.6802 |
| 2.74 | 0.6804 | 0.2085 | 0.3264 | 0.6388 | 2.7270 |
| 2.76 | 0.6781 | 0.2058 | 0.3225 | 0.6380 | 2.7748 |
| 2.78 | 0.6760 | 0.2031 | 0.3186 | 0.6372 | 2.8235 |
| 2.80 | 0.6738 | 0.2004 | 0.3149 | 0.6365 | 2.8731 |
| 2.82 | 0.6717 | 0.1978 | 0.3111 | 0.6357 | 2.9237 |
| 2.84 | 0.6696 | 0.1953 | 0.3075 | 0.6350 | 2.9752 |
| 2.86 | 0.6675 | 0.1927 | 0.3039 | 0.6343 | 3.0277 |
| 2.88 | 0.6655 | 0.1903 | 0.3004 | 0.6336 | 3.0813 |
| 2.90 | 0.6635 | 0.1879 | 0.2969 | 0.6329 | 3.1358 |
| 2.92 | 0.6615 | 0.1855 | 0.2934 | 0.6322 | 3.1914 |
| 2.94 | 0.6596 | 0.1832 | 0.2901 | 0.6315 | 3.2481 |
| 2.96 | 0.6577 | 0.1809 | 0.2868 | 0.6309 | 3.3058 |

| M | T_0/T_0^* | p/p^* | T/T^* | ρ/ρ^* V^*/V | p_0/p_0^* |
|----------|-------------|---------|---------|--------------------------|-------------|
| 2.98 | 0.6558 | 0.1787 | 0.2835 | 0.6303 | 3.3646 |
| 3.00 | 0.6540 | 0.1765 | 0.2803 | 0.6296 | 3.4244 |
| 3.02 | 0.6522 | 0.1743 | 0.2771 | 0.6290 | 3.4854 |
| 3.04 | 0.6504 | 0.1722 | 0.2740 | 0.6284 | 3.5476 |
| 3.06 | 0.6486 | 0.1701 | 0.2709 | 0.6278 | 3.6108 |
| 3.08 | 0.6469 | 0.1681 | 0.2679 | 0.6273 | 3.6752 |
| 3.10 | 0.6452 | 0.1660 | 0.2650 | 0.6267 | 3.7408 |
| 3.12 | 0.6435 | 0.1641 | 0.2620 | 0.6261 | 3.8076 |
| 3.14 | 0.6418 | 0.1621 | 0.2592 | 0.6256 | 3.8756 |
| 3.16 | 0.6402 | 0.1602 | 0.2563 | 0.6251 | 3.9449 |
| 3.18 | 0.6386 | 0.1583 | 0.2535 | 0.6245 | 4.0154 |
| 3.20 | 0.6370 | 0.1565 | 0.2508 | 0.6240 | 4.0871 |
| 3.22 | 0.6354 | 0.1547 | 0.2481 | 0.6235 | 4.1601 |
| 3.24 | 0.6339 | 0.1529 | 0.2454 | 0.6230 | 4.2345 |
| 3.26 | 0.6324 | 0.1511 | 0.2428 | 0.6225 | 4.3101 |
| 3.28 | 0.6309 | 0.1494 | 0.2402 | 0.6221 | 4.3871 |
| 3.30 | 0.6294 | 0.1477 | 0.2377 | 0.6216 | 4.4655 |
| 3.32 | 0.6280 | 0.1461 | 0.2352 | 0.6211 | 4.5452 |
| 3.34 | 0.6265 | 0.1444 | 0.2327 | 0.6207 | 4.6263 |
| 3.36 | 0.6251 | 0.1428 | 0.2303 | 0.6202 | 4.7089 |
| 3.38 | 0.6237 | 0.1412 | 0.2279 | 0.6198 | 4.7929 |
| 3.40 | 0.6224 | 0.1397 | 0.2255 | 0.6194 | 4.8783 |
| 3.42 | 0.6210 | 0.1381 | 0.2232 | 0.6190 | 4.9652 |
| 3.44 | 0.6197 | 0.1366 | 0.2209 | 0.6185 | 5.0536 |
| 3.46 | 0.6184 | 0.1351 | 0.2186 | 0.6181 | 5.1435 |
| 3.48 | 0.6171 | 0.1337 | 0.2164 | 0.6177 | 5.2350 |
| 3.50 | 0.6158 | 0.1322 | 0.2142 | 0.6173 | 5.3280 |
| 3.52 | 0.6145 | 0.1308 | 0.2120 | 0.6170 | 5.4226 |
| 3.54 | 0.6133 | 0.1294 | 0.2099 | 0.6166 | 5.5188 |
| 3.56 | 0.6121 | 0.1280 | 0.2078 | 0.6162 | 5.6167 |
| 3.58 | 0.6109 | 0.1267 | 0.2057 | 0.6158 | 5.7161 |
| 3.60 | 0.6097 | 0.1254 | 0.2037 | 0.6155 | 5.8173 |
| 3.62 | 0.6085 | 0.1241 | 0.2017 | 0.6151 | 5.9201 |
| 3.64 | 0.6074 | 0.1228 | 0.1997 | 0.6148 | 6.0247 |
| 3.66 | 0.6062 | 0.1215 | 0.1977 | 0.6144 | 6.1310 |
| 3.68 | 0.6051 | 0.1202 | 0.1958 | 0.6141 | 6.2390 |
| 3.70 | 0.6040 | 0.1190 | 0.1939 | 0.6138 | 6.3488 |
| 3.72 | 0.6029 | 0.1178 | 0.1920 | 0.6134 | 6.4605 |
| 3.74 | 0.6018 | 0.1166 | 0.1902 | 0.6131 | 6.5739 |
| 3.76 | 0.6008 | 0.1154 | 0.1884 | 0.6128 | 6.6892 |
| 3.78 | 0.5997 | 0.1143 | 0.1866 | 0.6125 | 6.8064 |
| 3.80 | 0.5987 | 0.1131 | 0.1848 | 0.6122 | 6.9255 |
| 3.82 | 0.5977 | 0.1120 | 0.1830 | 0.6119 | 7.0466 |
| 3.84 | 0.5967 | 0.1109 | 0.1813 | 0.6116 | 7.1696 |
| 3.86 | 0.5957 | 0.1098 | 0.1796 | 0.6113 | 7.2945 |
| 3.88 | 0.5947 | 0.1087 | 0.1779 | 0.6110 | 7.4215 |
| 3.90 | 0.5937 | 0.1077 | 0.1763 | 0.6107 | 7.5505 |
| 3.92 | 0.5928 | 0.1066 | 0.1746 | 0.6104 | 7.6815 |
| 3.94 | 0.5918 | 0.1056 | 0.1730 | 0.6102 | 7.8147 |
| 3.96 | 0.5909 | 0.1046 | 0.1714 | 0.6099 | 7.9499 |
| 3.98 | 0.5900 | 0.1036 | 0.1699 | 0.6096 | 8.0873 |
| 4.00 | 0.5891 | 0.1026 | 0.1683 | 0.6094 | 8.2268 |
| ∞ | 0.4898 | 0 | 0 | 0.5833 | ∞ |

Références

- ✓ Oosthuizen, Patrick H . Carscallen, William E, Compressible Fluid Flow, Edition CRC Press (1997), International Standard Book Number 0-07-048197-0.
- ✓ John D. Anderson, Modern Compressible Flow with Historical Perspective, Jr. Third Edition, McGraw-Hill, ISBN 0-07-112161-7 (ISE).
- ✓ Frank M. White , Fluid-Mechanics, 7th-Ed-Mcgraw-Hill-Series-in-Mechanical-Engineering, 2011, ISBN 978-0-07-352934-9.
- ✓ A. Boukhari , Notes de cours de gazodynamique, Cours gazo-dynamique univesité de El-Oued, 2008.
- ✓ P. Balachandran, Fundamentals of Compressible Fluid dynamics, New Delhi-11000-2009, Inc. ISBN -978-81-203-2857-0.