الجمهورية الجزائرية الديمقراطية و الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Nationale Polytechnique d’Oran Maurice Audin

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات بوهران موريس أودن

Physique 1 : Mécanique du Point Matériel

Dr. NACERI Leila

Maître de Conférences à l’École Nationale Polytechniques d’Oran Maurice Audin, ENPO-MA, Département de Formation Préparatoire en sciences et Technologies (FPST).

Année universitaire 2021-2022

Table de matière

I. *Information sur le cours*

Établissement : École Nationale Polytechniques d'Oran Maurice Audin (ENPO-MA).

Département : Formation Préparatoire en sciences et Technologies (FPST).

Public cible : 1ère Année Tronc Commun.

Intitulé du cours : Physique I- Mécanique du point matériel.

Durée : 15 semaines.

Code : PHY1.

Crédit : 05.

Coefficient : 05.

II. *Présentation du cours*

Ce cours de physique 1 et dont l'intitulé est « mécanique du point », a été rédigé à l'intention des étudiants de la première année, qui vont former durant deux années préparatoires dans le domaine des « Sciences et Technologie ». Il a été rédigé conformément au programme officiel du même domaine de la matière Physique 1 du 1er semestre, dans le cadre d'un diplôme d'ingénieur d'État.

Le cours présente une introduction à la mécanique, avec une ambition un peu plus générale. Nous présenterons les différentes étapes d'un raisonnement en physique, la façon d'analyser un problème, de le formaliser sous une forme mathématique, de résoudre le problème mathématique, puis de traduire la solution mathématique dans un langage physique.

III. *Contenu du cours*

Le module de la mécanique du point est le module fondamental enseigné en physique, qui présente un aperçu complet que possible sur les concepts de base à l'aide des outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension de ce dernier.

Le cours est structuré en quatre chapitres à travers des séquences pédagogiques. Afin de renforcer et consolider les concepts acquis durant les activités d'apprentissage sont organisées ou des notions et des théories sont mises en œuvre.

Chapitre I : Les outils mathématique

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur l'algèbre vectorielle puis l'analyse dimensionnelle et du calcul d'erreur. Les deux traitent des grandeurs physiques de base qui sont utilisées pour l'expression des lois physiques. En plus des rappels nécessaires, l'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées.

Chapitre II : Cinématique du point matériel

Le deuxième chapitre est dédié à la cinématique du point matériel en s'intéressant à décrire le mouvement du point matériel dans les différents systèmes de coordonnées sans se soucier aux causes qui les produisent. L'étude du mouvement composé (différents types) faite parti de ce chapitre et vers la fin on traite le mouvement relatif (translation et rotation).

Chapitre III : Dynamique du point matériel

Le troisième chapitre est réparti en deux parties. La première partie est consacrée à la dynamique du point matériel avec les lois de Newton et la représentation des différentes forces destinées à la prévision des mouvements des corps. La deuxième partie aborde le mouvement de rotation par la définition : du moment d'une force, moment d'inertie et enfin la théorie des moments cinétiques.

Chapitre IV : Travail & energie

Le quatrième chapitre concerne le travail et l'énergie, qui introduit les notions de base, tout d'abord le travail d'une force et l'énergie cinétique d'une particule ensuite l'énergie potentielle et totale que nous appliquons au principe de conservation de l'énergie dans diverses situations pratiques. cette méthode permet de résoudre des problèmes de mécanique du point.

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs visés et des prérequis nécessaires. Pour ce mettre en situation d'épreuves, de nombreux exercices et problèmes supplémentaires sont proposés à la fin de chaque chapitre.

Le plan détaillé du cours est présenté par la figure ci-dessous :

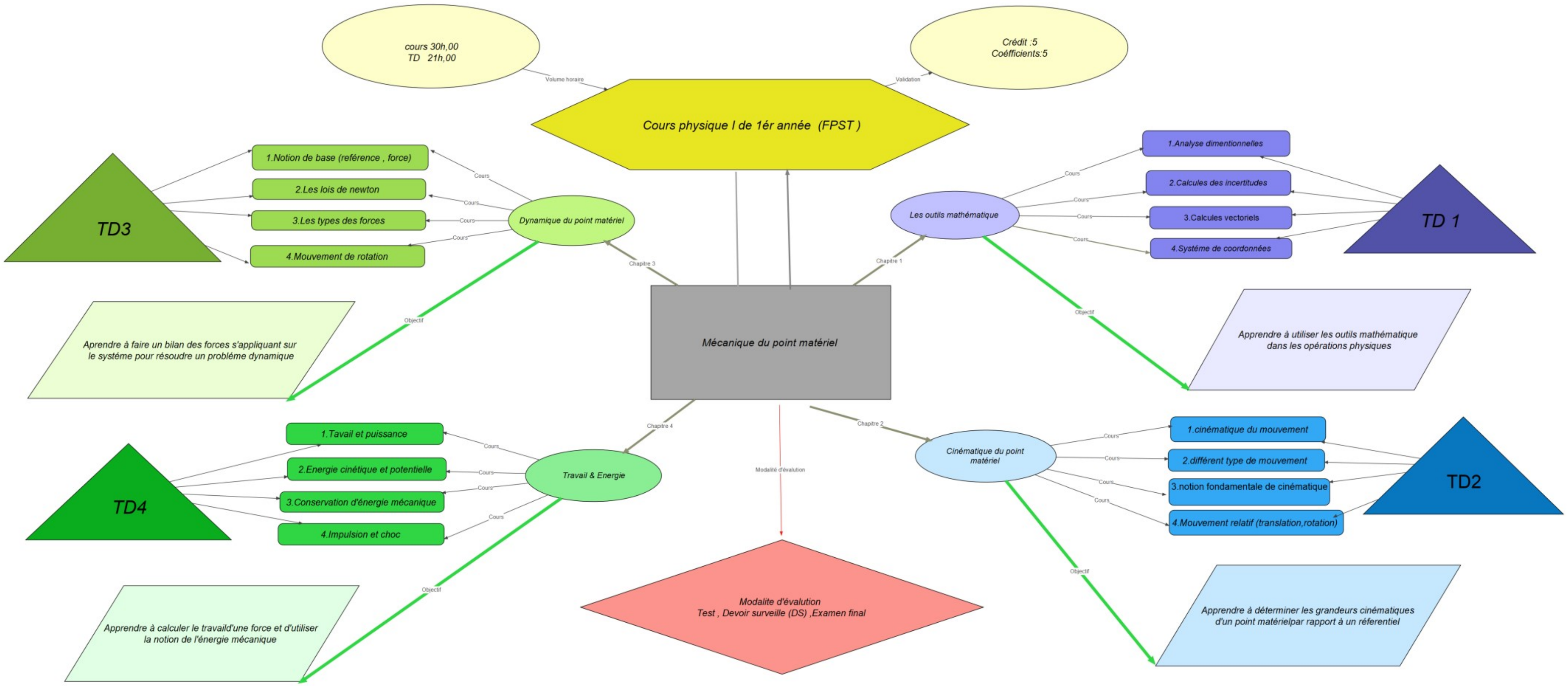


Figure I : **Le plan détaillé du cours de mécanique du point matériel**

IV. *Visées d'apprentissage*

Mécanique du point matériel constitue une composante centrale de la physique classique, nécessaire à la compréhension d'autres composantes de la physique telle que la physique atomique et la physique des solides, où ces théories peuvent aider dans la compréhension de phénomènes physique quotidienne. Il est attendu que ce cours fournisse une perception claire de ce qu'est réellement la physique et de son importance pour la vie à notre époque.

L'objectif global est : « d'être capable d'étudier c'est-à-dire d'analyser puis résoudre n'importe quel problème dynamique présenter par exemple un phénomène physique».

Pour attenaient cette objective, il faut progresse les savoirs acquis de l'apprenant en savoirs-faites par mettre en œuvre les connaissances de base à travers les unités d'apprentissage.

Les compétences scientifiques à la fin du cours qu'un étudiant doit acquérir dans chaque chapitre :

- Apprendre à utiliser les outils mathématique pour présente un problème physique
- Se familiariser avec les problèmes physiques les en traduit par un formalisme mathématique.
- Apprendre à déterminer les grandeurs cinématique (vecteurs position, vitesse, accélération, trajectoire etc.) d'un point matériel par rapport à un référentiel.
- Connaitre les différents types de mouvement d'un objet par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.
- Apprendre à faire un bilan des forces, qui s'appliquent sur un système pour résoudre un problème dynamique.
- Connaitre à appliquer les différentes méthodes pour résoudre un problème soit en mouvement de translation ou rotation.
- Apprendre à calculer le travail d'une force et d'utiliser les notions de l'énergie mécanique.

V. *Pré-requis*

Pour une meilleure compréhension des concepts du cours, il faut que l'étudiant savoir les compétences suivantes et soient acquises :

- Connaitre les constantes physiques, savoir manipuler les puissances et réaliser des conversions d'unités.
- Vérifier l'homogénéité d'une relation entre grandeurs physiques.
- Les notions de base sur les dérivées et les intégrales.

CHAPITRE 1 : RAPPELS MATHÉMATIQUES

Le mot physique vient du mot grec qui signifie « nature ». Aujourd'hui la physique est traitée comme la branche la plus fondamentale de la science, qui a des nombreuses applications de la vie. La physique généralement traite la mesure précise de la relation entre la matière et l'énergie, qui est intrinsèquement une science de la mesure. Les fondements de la physique constituent la base de l'étude et du développement de l'ingénierie et de la technologie.

I. Les objectifs spécifiques du chapitre

- ☺ L'objet des outils mathématique de savoir traduit un problème physique au un formalisme mathématique pour le résoudre.
- ☺ Connaitre la différence entre les grandeurs physique scalaire et vectoriel.
- ☺ Savoir manipuler les vecteurs
- ☺ Connaitre l'homogénéité des équations physique en utilisant l'analyse dimensionnelle
- ☺ Savoir prédire l'unité de n'importe quelle grandeur physique.

II. Les prérequis

- 🕮 Connaitre les constantes physiques
- 🕮 Savoir manipuler les puissances des fonctions
- 🕮 Connaitre réaliser les conversions d'unité
- 🕮 Savoir l'intégration des fonctions mathématiques

I. Analyse dimensionnelle

I.1. Grandeur physique

On appelle grandeur physique, toute grandeur qui peut être mesuré, repérée ou calculée à partir d'autre grandeurs dites grandeurs de base. Par exemple la distance et le temps sont des grandeurs de base (en mesurant) mais la vitesse est une grandeur dérivée $(v = {}^{d}/_{t})$

La plupart des grandeurs physiques découlent les unes des autres ainsi que quelque grandeur de base

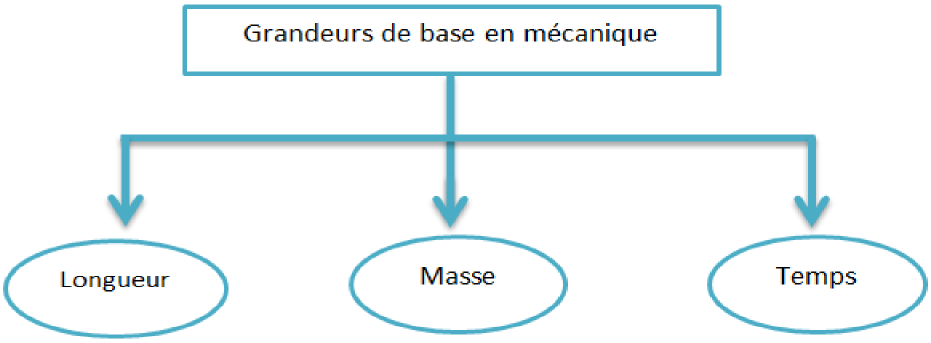


Figure 1: Les grandeurs de base

I.1.2. Le système international d'unités (système SI)

Le système international (SI) est constitué de 7 unités de base (fondamentales) correspondant à 7 grandeurs physiques comme c'est résumé

Tableau 1: Les unités des grandeurs physique

Grandeur	Unité	Symbole de l'unité
Longueur	Mètre	m
Masse	Kilogramme	Kg
Temps	Second	s
Intensité de courant	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Intensité de lumineuse	Candela	cd
Quantité de matière	Mole	mol

I.1.3. Notion de dimension

Toute grandeur physique est caractérisée par sa dimension qui est une propriété associée à une unité, le mot dimension en physique indique la nature physique de la quantité.

La dimension de la grandeur G se note [G]. Elle nous informe sur la nature physique de la grandeur. Par exemple, si G a la dimension d'une masse, on dit qu'elle est homogène à une masse. La relation [G] = M correspond à l'équation aux dimensions de la grandeur G.

Il existe sept grandeurs fondamentales :

Tableau 2: Les dimensions des grandeurs physique

Grandeur G	**Dimension [G]**
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité de courant	I
Température	θ
Intensité lumineuse	J
Quantité de matière	**N**

I.1.4. Équations aux dimensions

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Toutes les autres sont liées à ces grandeurs fondamentales. Par exemple, une aire A étant le produit de deux longueurs, sa dimension est [A] $=L^2$.

Toute relation doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres ont la même dimension. Ainsi l'équation A = B + C.D n'a de sens que si les dimensions de A et de (B + C.D) sont identiques.

Pour obtenir la dimension du second membre on doit appliquer les règles suivantes :

• la dimension du produit C.D est le produit des dimensions de chacune des grandeurs C et D : [C.D] = [C]. [D];

• la dimension de la somme B + C.D est la somme des dimensions de chacun des deux termes B et C.D : [B + C.D] = [B] + [C.D].

Par exemple :

1) Dimension de la vitesse :

$$x = v.t \Rightarrow v = \frac{x}{t} \Rightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \;\; donc \;\; [v] = LT^{-1}$$

2) Dimension de l'accélération

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 \Rightarrow \gamma = \frac{2\,x}{t^2} \Leftrightarrow [\gamma] = \frac{[2][x]}{[t]^2}, [\gamma] = \frac{1.L}{T^2} = LT^{-2}$$

3) Dimension de la force

$$F = m.\gamma \Rightarrow [F] = [m].[\gamma] = MLT^{-2}$$

4) Dimension de la pression

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$$

5) Dimension de travail

$$W = F.d \Rightarrow [W] = [F].[d] = MLT^{-2}.L = ML^2T^{-2}$$

Remarque :

• Toute équation aux dimensions d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :

$$[G] = L^a\, M^b\, T^c\, I^d\, \theta^e\, J^f\, N^g$$

• Pour les fonctions sin(f), cos(f), tan(f), log(f) et e^f, l'argument f est sans dimension.

• Pour $[e^x] = 1, [\log x] = 1, [4] = 1, [\sin x] = 1, [\pi] = 1.$

•$[\mathrm{A.B}] = [\mathrm{A}].[\mathrm{B}]; \;\; \left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]},$

•$[\mathrm{dA}] = [\mathrm{A}], [\Delta A] = [A], [\int A] = [A],$

Exemple :

Grandeur	Equation aux dimensions	Symbole d'unité	Noms d'unité
Force	MLT^{-2}	$kg.m.s^{-2}$	Newton : N
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	Pascal : Pa
Travail	$ML^{2}T^{-2}$	$kg.m^{2}.s^{-2}$	Joule : J
Puissance	$ML^{2}T^{-3}$	$kg.m^{2}.s^{-3}$	Watt : W
Charge	Q= IT	$A\ s$	Coulomb : C
Potentiel	$ML^{2}T^{-3}I^{-1}$	$kg.m^{2}.s^{-3}A^{-1}$	Volt : V
Résistance	$ML^{2}T^{-3}I^{-2}$	$kg.m^{2}.s^{-3}A^{-2}$	Ohm : Ω
Champ magnétique	$MT^{-2}I^{-1}$	$kg.s^{-2}A^{-1}$	Tesla : T

I.1.5. Homogénéité d'un calcul

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules : l'analyse dimensionnelle permet de vérifier la validité d'une équation physique

Il faut donc de se rappeler le principe suivant :

Tout résultat non homogène est nécessairement faux

- Pour vérifier l'homogénéité d'une formule :

$$\boldsymbol{T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \quad \text{Ou} \quad \boldsymbol{T = 2\,\pi\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Ces deux expressions donnent la période d'oscillation d'un pendule simple de longueur l et g est l'accélération de la pesanteur. Le premier membre a la dimension d'un temps ; il faut que le deuxième membre ait la même dimension, sinon la formule est fausse.

1er cas : $T = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}$ $[T] = L^{1/2}\,(LT)^{-1/2} = T$

1er cas : $T = 2\pi l^{-1/2} g^{1/2}$ $[T] = L^{-1/2}\,(LT)^{1/2} = T^{-1}$ faux

Règles d'homogénéités

- On ne peut additionner que des termes homogènes.
- L'argument d'une fonction mathématique transcendante (expo, ln, cos, sin, tan…) est nécessairement sans dimension.

- On doit éviter de remplacer le symbole d'une grandeur par sa valeur numérique.

Un vecteur ne peut être ajoute qu'à un vecteur et non à un scalaire.

- Pour prévoir des formules physiques :

La méthode consiste à identifier les quantités physiques qui peuvent entrer dans le problème posé, et à construire avec ces quantités une expression ayant la dimension recherchée.

Exemple 1: vitesse d'arrivée au sol d'un objet lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. Les quantités physiques qui peuvent « à priori » affecter la valeur de la vitesse v sont ; la hauteur de chute h, la masse de l'objet m et l'accélération de la pesanteur g. Essayons de construire une formule de vitesse avec ces quantités : $v = kh^{\alpha}g^{\beta}m^{\gamma}$

La constante k est sans dimension.

Écrivons l'équation aux dimensions, c'est-à-dire utilisons l'analyse dimensionnelle, pour trouver les valeurs de α, β et γ. On sait que$[v] = LT^{-1}$, et utilisons la formule P=mg pour trouver la dimension de g (accélérations de la pesanteur) ; $[g] = LT^{-2}$. Alors :

$$[v] = LT^{-1} = L^{\alpha}L^{\beta}T^{-2\beta}M^{\gamma} = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}M^{\gamma}$$

Par identification des deux termes on a : $\alpha + \beta = 1, 2\beta = 1$ et $\gamma = 0$. C'est-à-dire $\alpha = \beta = 1/2$ et $\gamma = 0$.

La vitesse v est donc de la forme : $v = k\sqrt{gh}$. L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire la valeur de la constante k, seule la résolution complète du problème donnera la valeur de cette constante : $k = \sqrt{2}$.

Exemple 2: On doit définir une loi physique qui donne la période (τ) de la pendule simple en fonction de la longueur du fil (**ℓ**) et l'accélération gravitationnelle (**g**). On à $\tau = f(g, \ell)$ donc, loi physique qui donne la période (τ) de la pendule simple prend la forme : $\tau = kg^{\alpha}\ell^{\beta}$, la propriété de l'homogénéité de dimension permet d'écrire :

$$[\tau] = \left[kg^{\alpha}\ell^{\beta}\right] = [k][g^{\alpha}][\ell^{\beta}]$$

$$[g] = ML^{-2}\ et\ [\ell] = L\ et\ aussi\ [\tau] = T$$

Donc,$[\tau] = (LT^{-2})^{\beta}\, L^{\beta} = L^{\alpha+\beta}.T^{-2\alpha}$

Alors,$[\tau] = L^{\alpha+\beta}.T^{-2\alpha} = T$

Pour trouver les valeurs de α et β il faut résoudre le système d'équation suivant :

$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha = 0 \end{cases}$, sa donne : $\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc, l'équation devient : $\tau = kg^{-1/2}\ell^{1/2} = k\frac{\ell^{1/2}}{g^{1/2}}$, on obtient : $[\tau] = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

I.1.6. Les applications et correction

1/On définit l'impulsion $p = m.v$; m : masse, v : vitesse

1. Déterminer la dimension de p
2. On donne $E = \frac{m^a p^b}{2}$, E est l'énergie

Déterminer les constantes a et b.

Correction

1. $[p] = [m][v] = MLT^{-1}$
2. On sait que $[E] = ML^2T^{-2}$

$[E] = \frac{[m]^a[p]^b}{[2]} = [m]^a[p]^b = M^a(MLT^{-1})^b$

$$\Leftrightarrow ML^2T^{-2} = M^{a+b}L^bT^{-b}$$

Par correspondance :

$\begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b \\ \quad b = 2 \Rightarrow b = 2 \\ \quad\quad -b = -2 \end{cases}$

Donc $a = -1, b = 2$ Alors $E = \frac{p^2}{2m}$

2/ La force gravitation F entre deux corps de masse M_1 et M_2 distant R est donné par

$$F = \frac{G\ M_1M_2}{r^2}$$

1. Déterminer la constante de gravitation G
2. Les planètes tournent autour du soleil, en décrivant une trajectoire elliptique vers deux périodes T^2 ,$T^2 = \frac{4\pi^2a^\alpha}{G^\beta M^\gamma}$

Ou a : désigne le demi grand axe de l'ellipse, G : la constante de gravitation, M : masse de soleil

-Déterminer α, β *et* γ

Correction

1. $[G] = \frac{[r]^2[F]}{[M_1][M_2]} \Rightarrow [G] = \frac{L^2MLT^{-2}}{M^2}$

$[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$

2. $[T]^2 = \frac{[a]^{\alpha}}{[G]^{\beta}[M]^{\gamma}} \Leftrightarrow T^2 = \frac{L^{\alpha}}{(L^3M^{-1}T^{-2})^{\beta}\ M^{\gamma}}$

$\Rightarrow T^2 = L^{\alpha-3\beta}\ M^{\beta-\gamma}\ T^{2\beta}$

$$\Rightarrow L^0T^2 = L^{\alpha-3\beta}\ M^{\beta-\gamma}T^{2\beta} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = 0 \Rightarrow \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 3 \\ \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 1 \end{cases}$$

Donc $\alpha = 3;\ \beta = 1, \gamma = 1$

I.2. Erreur et incertitude

I.2.1 Introduction

Dans toute expérience, il n'existe pas de mesures exactes. Celles-ci sont toujours entachées d'erreurs plus ou moins importantes selon la méthode de mesure adoptée, la qualité des instruments utilisés et le rôle de l'opérateur. Les mesures sont donc réalisées avec des approximations. Donc il est impossible de déterminer la valeur d'une grandeur physique, sans que celle-ci ne contienne un certain taux d'erreur .Ainsi, tout résultat numérique, qui découle d'une mesure ou d'un calcul n'a en réalité pas de valeur s'il n'est pas accompagné d'une estimation, ou des limites d'erreurs.

L'estimation des erreurs commises sur les mesures et de leurs conséquences est alors indispensable. Ce que fait que l'intérêt de nos résultats dépend souvent de notre efficacité dans l'estimation de ses limites.

I.2.2 Erreur absolue et erreur relative

- **L'erreur absolue** d'une grandeur G mesurée est la différence ΔG entre la valeur expérimentale et une valeur de référence susceptible d'être considérée comme exacte. Dans la pratique, la valeur exacte étant inaccessible, on l'approche en effectuant la moyenne d'une série de mesures de la grandeur G

$$\Delta G = G_{mes} - G_{ref}$$

$$G_{ref} = G_{moy} = \frac{\sum_1^n G_i}{n}$$

Où les G_i sont les valeurs obtenues lors de la série des n mesures effectuées.

- **L'erreur relative** est le quotient de l'erreur absolue à la valeur de référence. L'erreur relative est sans dimension; elle nous indique la qualité (la précision) du résultat obtenu. Elle s'exprime en termes de pourcentage.

$$Erreur\ relative = \frac{\Delta\, G}{G_{ref}}$$

I.2.3 Incertitude absolue et incertitude relative

Lors des mesures physiques, nous ne possédons pas en général de valeur de référence comme celle dont nous venons de parler. Lorsque nous mesurons la distance entre deux points, l'intervalle de temps qui sépare deux événements, la masse d'un objet ou l'intensité d'un courant nous ne savons pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée. Toutefois, par une analyse des moyens utilisés pour faire la mesure, nous pouvons introduire les notions suivantes :

I.2.3.1 Calcul d'incertitude sur une mesure directe

Quand nous effectuons plusieurs mesures directes d'une grandeur $\boldsymbol{X}$, on obtient $\boldsymbol{Xi}$ mesures qui sont, en général, légèrement différentes ; $\boldsymbol{X = X1, X2, X3, X4, \dots, Xn}$

Souvent, on adopte que la moyenne arithmétique des différents ***Xi,*** est la valeur la plus approchée de la valeur réelle (*Approche statistique élémentaire*).

$$X_{moy} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Ou n est le nombre de mesures réalisées.

La détermination de l'incertitude absolue nécessite l'identification préalable des sources d'erreurs pouvant affecter la qualité de la mesure et de quantifier les incertitudes qui leur sont associées. En général ces incertitudes sont attribuées aux instruments et à l'opérateur.

Dans le premier cas, le constructeur fournit une notice indiquant l'intervalle de confiance centré sur la valeur affichée. Pour le second cas, l'opérateur doit être en mesure d'estimer l'incertitude de la mesure en fonction de ses propres capacités.

a) **Incertitude absolue** : L'incertitude absolue peut être en première approximation

$$\Delta X_1 = X_1 - X_{moy}$$

$$\Delta X_2 = X_2 - X_{moy}$$

$$\Delta X_3 = X_3 - X_{moy}$$

$$\Delta X_n = X_n - X_{moy}$$

Incertitude absolue moyenne : $\Delta X_{moy} = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 \ldots\ldots \Delta X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i}{n}$

Nous dirons que la valeur exacte X_e de la grandeur X est comprise dans l'intervalle $X_{moy} - \Delta X_{moy}$ et $X_{moy} + \Delta X_{moy}$ autrement dit : $X_{moy} - \Delta X_{moy} < X < X_{moy} - \Delta X_{moy}$, où bien, $X_e = X_{moy} \pm \Delta X_{moy}$

b) **Incertitude relative** : Une incertitude absolue ne permet pas d'avoir une idée sur la qualité d'une mesure. C'est pour cette raison qu'il faut définir l'incertitude relative, elle permet d'estimer la précision sur le résultat obtenu.

$\delta = \frac{\Delta X_{moy}}{X_{moy}}$, l'incertitude relative n'a pas d'unités, elle s'exprime en général en % ou en ‰.

I.2.3.2 Calcul d'incertitude sur une mesure indirecte

Dans la pratique, il arrive souvent que l'on ne puisse mesurer directement la valeur d'une grandeur ***F***. Toutefois, celle-ci est généralement liée à un certain nombre d'autres grandeurs ***x***, ***y***, **z**, ..., etc. directement ou indirectement mesurables. Il existe deux technique simple pour le calcul de l'incertitude relative :

a. Méthode de la différentielle d'une fonction

La différentielle $\boldsymbol{dF}$ d'une fonction $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ est définie par :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

Le calcul de l'incertitude relative $\boldsymbol{\Delta F / F}$ on suit les étapes suivantes :

1) Calcul de la différentielle de la fonction ($\boldsymbol{dF}$)

2) On divise la différentielle de la fonction sur la fonction ($\boldsymbol{dF/F}$)

3) Sommation des incertitudes c.-à-d., passons de **d** à ***Δ***.

Exemple 1 : La mesure de la résistance ***R*** d'une partie d'un circuit électrique, S'effectue sur la mesure directe de l'intensité du courant ***I*** et la différence du potentiel ***V****.* Donc, calculer *ΔR=f (ΔI, ΔV).* En utilise la relation de la loi d'ohm R=V/I.

Correction

1) $dR = \frac{\partial R}{\partial I} dI + \frac{\partial R}{\partial V} dV$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{V}{I^2}\ et\ \frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I}, donc\ dR = \frac{V}{I^2} dI + \frac{1}{I} dV$$

2) $\frac{dR}{R} = \frac{-V}{R\,I^2}\, dI + \frac{1}{RI} dV = \frac{-V}{VI} dI + \frac{1}{V} dV = \frac{dV}{V} - \frac{dI}{I}$

3) Finalement on obtient l'incertitude relative sur la résistance électrique

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}$$

b. Méthode de la différentielle logarithmique d'une fonction

Pour déterminer l'incertitude relative$\Delta F/F$**,** à partir de la méthode de la différentielle logarithmique d'une fonction, on suit les étapes suivantes :

1) Calcul du logarithme de la fonction,$\boldsymbol{lnF}$,

$$\ln a.b = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$$

2) Calcul de la différentielle du logarithme de la fonction $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{lnF})$,

$$d(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{df(x)}{dx}$$

3) Sommation des incertitudes c.-à-d., passons de **d** à **Δ.**

Exemple 2 :

On a $v = F^{\frac{1}{2}}(\frac{l}{m})^{1/2}$, Calculer l'incertitude absolue Δv ?

Correction

1) $\ln v = \ln(F^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{m}\right)^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow \ln v = \frac{1}{2}\ln F + \frac{1}{2}[\ln l - \ln m]$

2) $\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dF}{F} + \frac{1}{2}[\frac{dl}{l} - \frac{dm}{m}]$

3) $\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\Delta F}{F} + \frac{1}{2}[\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta m}{m}]$, donc $\Delta v = \frac{1}{2}F^{1/2}\,(\frac{l}{m})^{1/2}[\frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta m}{m}]$

II. Calcul vectoriel

II.1. Les grandeurs physiques

En physique, on utilise deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

- **Les grandeurs physiques scalaires :** sont entièrement définies par un nombre et une unité appropriée. On peut citer comme exemples : la masse m d'un corps, la longueur *l* d'un objet, l'énergie E d'un système, la charge électrique q…
- **Les grandeurs physiques vectorielles :** sont des quantités spécifiées par un nombre et une unité appropriée plus une direction et un sens. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur ayant la même direction, le même sens et un module mesuré en choisissant une unité graphique correspondante, c'est-à-dire **l'échelle**. On peut citer comme grandeurs vectorielles la vitesse $\vec{v}$ d'un mobile, le poids $\vec{P}$ d'un corps, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$

Exemple : Le poids d'un corps de masse 1kg peut être représenté par un vecteur ayant les caractéristiques suivantes :

- origine : le centre de gravité de l'objet ;
- direction : verticale ;
- sens : du haut vers le bas ;
- module : le poids étant de 9,8 N, si on choisit une échelle qui fait correspondre 1cm à 2N (1cm → 2N) le vecteur aura une longueur de 4.9 cm.

II.2. Caractéristiques d'un vecteur

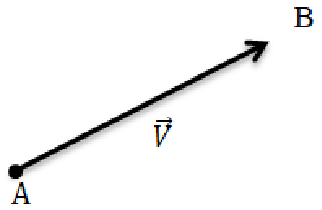
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini avec les propriétés suivantes :

- la direction : c'est le sens dans lequel se déplace le vecteur (de A vers B).

- le module (l'intensité) : la longueur absolue du vecteur : $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

- un sens : de A vers B.

- Représentation du vecteur

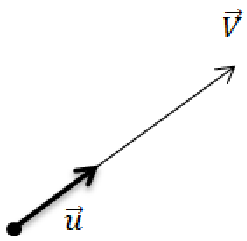


Notation d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

❖ **Le vecteur unitaire** : un vecteur unitaire $\vec{u}$ est un vecteur dont le module est égale à 1 c.a. d module égale à l'unité: $|\vec{u}| = 1$.

On peut exprimer un vecteur unitaire sous la forme

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \Rightarrow \vec{V} = \|\vec{V}\|.\vec{u}$$



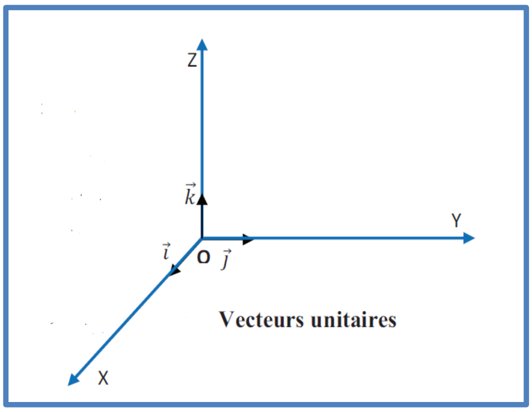
Exemple

Les vecteurs unitaires de base cartésienne sont $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Le vecteur $\vec{\imath}$: vecteur unitaire suivant (OX)

Le vecteur $\vec{\jmath}$: vecteur unitaire suivant (OY)

Le vecteur $\vec{k}$: vecteur unitaire suivant (OZ)



II.3. L'opération sur les vecteurs

II.3.1. La somme des vecteurs

Géométriquement, l'addition de deux vecteurs est effectuée en confondant l'origine du deuxième sur l'extrémité du première, soit les vecteurs $\overrightarrow{V_1}\ et\ \overrightarrow{V_2}$ avec

$$\vec{S} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} \quad et\ \vec{S'} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$$

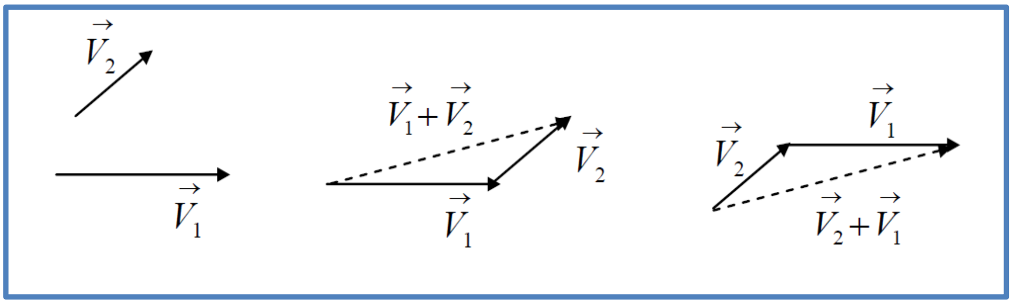


Figure 2: La sommation des vecteurs

On constate que $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$, donc la somme des vecteurs est commutative.

II.3.2. Différence des vecteurs

$$\vec{D} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} \Rightarrow \vec{D} = \overrightarrow{V_1} + (-\overrightarrow{V_2})$$

$$\overrightarrow{D'} = \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1} \Rightarrow \overrightarrow{D'} = \overrightarrow{V_2} + (-\overrightarrow{V_1})$$

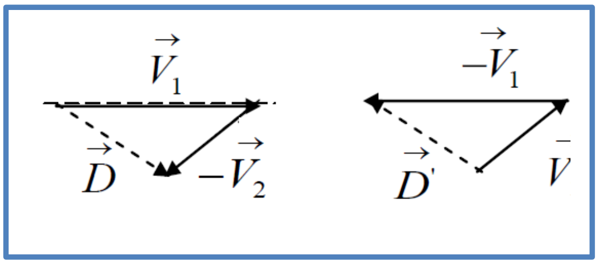


Figure 3: Différence des vecteurs

On constate que $\vec{D} \neq \vec{D}'\ c.a;d\ \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} \neq \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}$, donc la différence des vecteurs est non-commutative.

Exemple

$$\vec{A} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\,, \vec{B} = \vec{\imath}$$

$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = 2\vec{\jmath}$

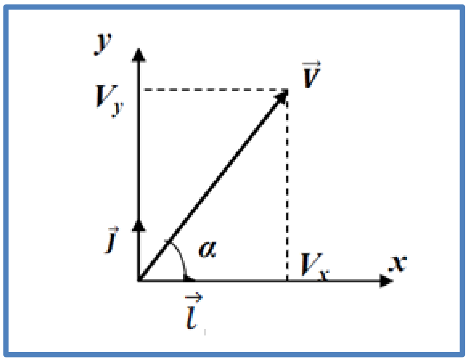
II.4. Composantes d'un vecteur

Chaque vecteur $\vec{V}$ peut être défini par la somme de deux vecteurs où plus. Ces vecteurs sont appelés les composantes de ce vecteur.

a) Dans le plan

$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} = V\cos\alpha\,\vec{\imath} + V\sin\alpha\,\vec{\jmath}$

$\binom{V_x}{V_y},\begin{cases} V_x : \textit{composante de } \vec{V} \textit{ suivant } (OX) \\ V_y : \textit{composante de } \vec{V} \textit{suivant } (OY) \end{cases}$



-La norme de $\vec{V}$ est $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

✓ Exemple

$\vec{A} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

Le composante de $\vec{V}$ suivant (OX) =1

Le composante de $\vec{V}$ suivant (OY)=2

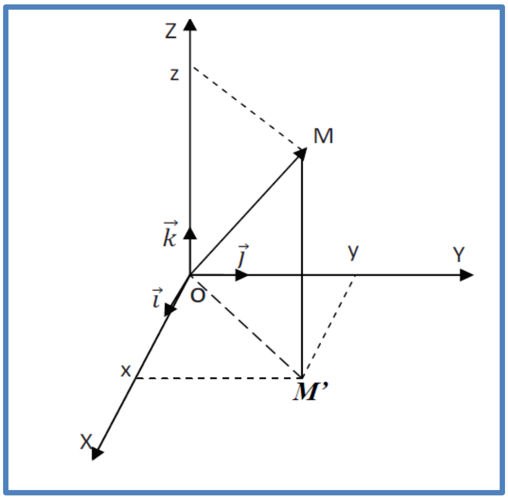
-La norme de $\vec{A}$: $\|\vec{A}\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

b) Dans l'espace

La position d'un point M dans l'espace $R(O;\ X, Y, Z)$ est caractérisée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Les composantes, *(x, y, z)*, d'un vecteur sont les projections orthogonales du vecteur position sur les trois axes du repère (OX, OY et OZ) respectivement.

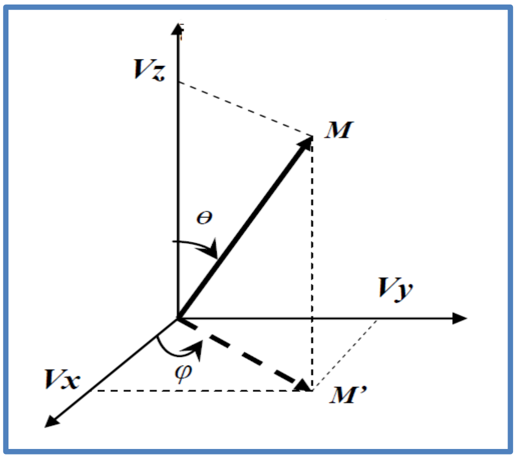


Dans ce cas le vecteur position s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

Avec $M'M = z$ et $\overrightarrow{OM'} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

Remarque



On considère que $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$

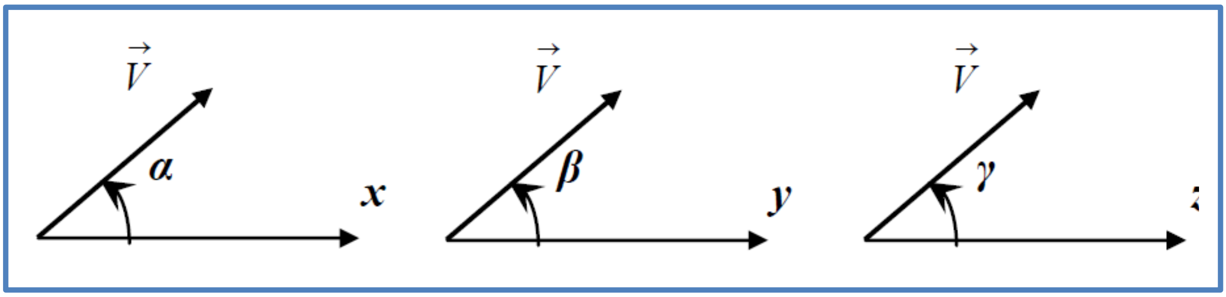
$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$

$$\begin{cases} V_x = V\cos\varphi\sin\theta \\ V_y = V\sin\varphi\sin\theta \\ V_z = V\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

II.5. Les cosinus directeurs

Le vecteur $\vec{V}$ forme les angles $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ respectivement avec les axes OX, OY et OZ.



$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma)$$

$$\Rightarrow cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ sont appelés les cosinus directeur du vecteur $\vec{V}$

$$\begin{cases} \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \\ = V\,(\cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}) \end{cases}$$

$\vec{V} = V\vec{u} \Rightarrow\ \vec{u} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})$

II.6. Produit scalaire et produit vectoriel

II.6.1. Produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ faisant un angle θ $entre\ eux$ $0 \le \theta \le \pi$

Le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est le

Scalaire définie par :

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \|\overrightarrow{V_1}\|\|\overrightarrow{V_2}\| \cos\theta \quad ,\theta(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$$

$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} \Rightarrow \overrightarrow{V_1}$ $scalaire$ $\overrightarrow{V_2}$

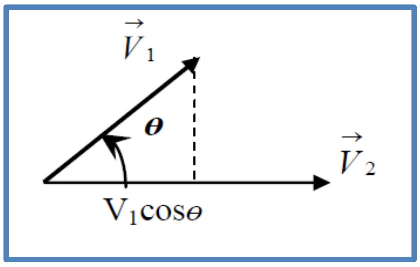


Figure 4: Produit scalaire

a) Produit scalaire des vecteurs unitaires

D'après les propriétés du produit scalaire, on aura:

$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{\imath}\| \cos 2\pi = 1.1.1 = 1$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{\imath}\| \cos(\frac{\pi}{2}) = 1.1.0 = 0$

Donc

$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$

b) La forme analytique du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{V_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$

$$\overrightarrow{V_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$$

Le produit scalaire exprimé en termes des composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}).(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k})$$

$$= (x_1x_2)(\vec{\imath}.\vec{\imath}) + (x_1y_2)(\vec{\imath}.\vec{\jmath}) + (x_1z_2)(\vec{\imath}.\vec{k}) + (y_1x_2)(\vec{\jmath}.\vec{\imath}) + (y_1y_2)(\vec{\jmath}.\vec{\jmath})$$

$$+ (y_1z_2)(\vec{\jmath}.\vec{k}) + (z_1x_2)(\vec{k}.\vec{\imath}) + (z_1y_2)(\vec{k}.\vec{\jmath}) + (z_1z_2)(\vec{k}.\vec{k})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

c) Quelque propriété

- En comparant les deux expressions du produit scalaire, on peut obtenir une expression de l'angle θ en fonction des coordonnées des deux vecteurs :

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{|\vec{V_1}||\vec{V_2}|}$$

- $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{V_2}.\vec{V_1}$; $\vec{V_1}.(\vec{V_2}+\vec{V_3}) = \vec{V_1}.\vec{V_2}+\vec{V_1}.\vec{V_3}$
- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux $\theta = \frac{\pi}{2}$ est nul.

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_1} \perp \vec{V_2}$$

$$\vec{V_1} = \vec{0} \;\; ou \; \vec{V_2} = \vec{0}$$

- Le produit scalaire permet de définir le module d'un vecteur : $\vec{V}$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V}.\vec{V}} = \sqrt{\vec{V^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

d) Les pplications et correction

Soit $\vec{A} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{B} = 3\vec{\jmath} + \vec{k}$

-Déterminer $\vec{A}$ scalaire $\vec{B}$

-Déduire l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$

Correction

1/ $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\vec{A}.\vec{B} = (1.0) + (2.3) + (0.1) = 6 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 6$

2/ on sait que $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$

Donc $|\vec{A}| = \sqrt{(1)^2+(2)^2} = \sqrt{5}$;$|\vec{B}| = \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$

Finalement $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = 0{,}84 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

II.6.2.Produit vectoriel

Soit deux vecteurs $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$ faisant un angle θ *entre eux* . Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$ est un

Vecteur noté $\vec{V} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ est son module définie par :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\|\vec{V_2}\| \sin\theta \quad ,\theta(\vec{V_1},\vec{V_2})$$

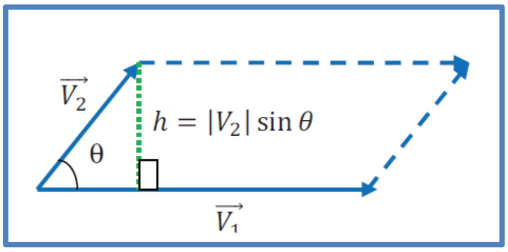
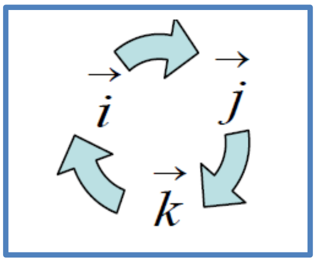


Figure 5: Produit vectoriel

Et caractérise par :

- Module $|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}| = \|\vec{V_1}\|\|\vec{V_2}\| \sin\theta \quad avec\ 0 \leq \theta \leq \pi$
- Direction : la direction du vecteur $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V_1}\ et\ \vec{V_2}$
- Sens : le sens du vecteur $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ est tel-que le trièdre $(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V})$ est direct.

a) Produit vectoriel des vecteurs unitaires



D'après les propriétés du produit vectoriel, on a :

- $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$
- $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}\ ,\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}\ ,\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
- Ces trois relations se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire.
- On aura de même: $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}\ ,\ \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}\ ,\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

b) La forme analytique du produit vectoriel

Soit deux vecteurs $\vec{V_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$

$$\vec{V_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} +\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_1z_2 - x_2z_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \vec{\imath}(y_1z_2 - y_2z_1) - \vec{\jmath}(x_1z_2 - x_2z_1) + \vec{k}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

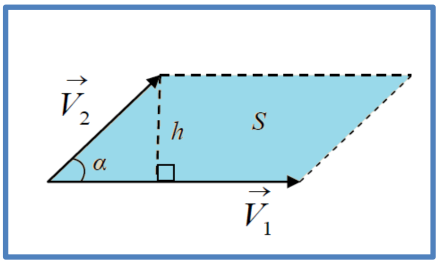
c) Quelque propriété

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction ($\theta = 0$) ou l'un des vecteurs est nul$\Leftrightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$ *ou* $\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$.
- Le produit vectoriel est anticommutatif (antisymétrique) : $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$
- Interprétation géométrique du produit vectoriel :

  Le module, $|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}|$du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$ représente la surface d'un équilatérale compris entre ses deux vecteurs $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$.

  $$\|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\| = V_1 V_2 \sin(\vec{V_1}, \vec{V_2})$$

  $$h = V_2 \sin(\vec{V_1}, \vec{V_2}), donc\ \ S = \|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\| = hV_1$$



d) L'application et correction

Soit $\vec{A}(1,0,2)$, $\vec{B}(0,2,1)$

-Déterminer $\vec{A}$ vectoriel $\vec{B}$

-Déterminer l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$

Correction

$$1/\ \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$2/\vec{A} \wedge \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{A} \wedge \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}\ \ , |\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

Finalement $\sin\theta = \frac{|\vec{A} \wedge \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0{,}91 \Rightarrow \theta = 65{,}5°$

II.7 Produit mixte

Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ *et* $\vec{C}$ est défini par le produit scalaire suivant:

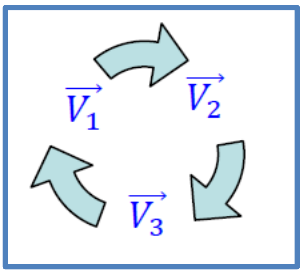
$$\vec{C}.\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{C}.\vec{E} \text{ ou } \vec{E} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

Exemple :

$\vec{\imath}.\left(\vec{\imath} \wedge \vec{k}\right) = \vec{k}.\left(\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}\right) = \vec{\jmath}.\left(\vec{k} \wedge \vec{\imath}\right) = 1$

Le produit mixte des trois vecteurs obéit la propriété de permutation circulaire:

$\overrightarrow{V_1}.\left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_2}.\left(\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1}\right) = \overrightarrow{V_3}.\left(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right)$



II.8 Moment d'un vecteur

II.8.1 Moment d'un vecteur par rapport à un point

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et O un point quelconque. On appelle moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à O, le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{AB})$• défini par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le module du moment s'écrit: $\left|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{AB})\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \left|\overrightarrow{AB}\right| \sin\theta$

II.8.2 Moment d'un vecteur par apport à un axe

Le moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par apport à un axe $\overrightarrow{\mathcal{M}_\Delta}(\overrightarrow{AB})$est donné par le produit scalaire: $\overrightarrow{\mathcal{M}_\Delta}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{u_\Delta}$ avec, $\overrightarrow{u_\Delta}$, le vecteur unitaire de l'axe (Δ).

II.9 Dérivées et intégrale d'un vecteur

II.9.1.Dérivées d'un vecteur

Soit le vecteur:$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$

La dérivée temporelle par rapport au temps est définie : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de base sont considérés fixe ;

c.à.d. $\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$

Quelques caractéristiques des dérivées de vecteur:

- $\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d}{dt}\vec{A} + \frac{d}{dt}\vec{B}$
- $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{A}) = \frac{d\lambda}{dt}\vec{A} + \lambda\frac{d\vec{A}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\vec{B} + \vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \overrightarrow{\frac{d\vec{A}}{dt} \wedge B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$

II.9.2.Intégrale d'un vecteur

Soit le vecteur $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$ qui est une fonction vectorielle de t.

On définit une intégrale de$\vec{V}(t)$ par :

$$\int \vec{V}(t)\,dt = \vec{i} \int V_x(t)\,dt + \vec{j} \int V_y(t)\,dt + \vec{k} \int V_z(t)dt$$

III. Systèmes de coordonnées

Chaque point matériel est repéré par un système de coordonné, comportant une base et des composantes du vecteur de position. On définit alors trois systèmes de coordonnées dans un plan ou dans l'espace.

III.1 Coordonnées cartésiennes

Soit le repère fixe orthonormé directe $R(O;X,Y,Z)$ de base orthonormé directe$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

La position d'un point M peut être repérer par ses trois composantes cartésiennes (x,y,z)projections orthogonales sur les trois axes du repère.

Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

On sait que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

M est la projection du point M sur le plan $(O;X,Y)$

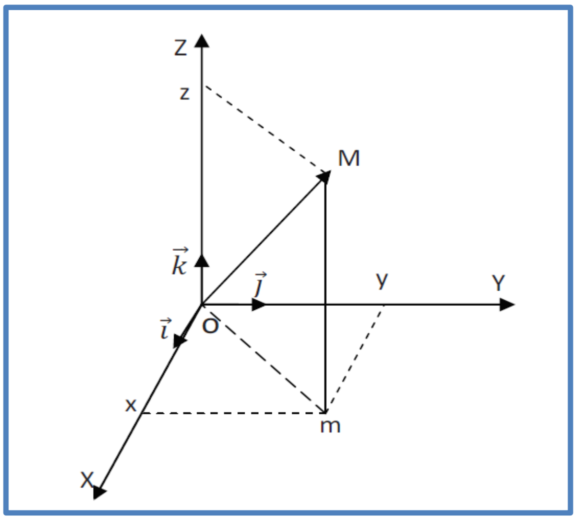


Figure 6: Système cartésienne

Dans des nombreux cas, il est beaucoup plus facile de repérer un point sur une courbe, une surface en utilisant d'autres types de coordonnées.

III.2 Coordonnées polaires

Il est plus adapté pour repérer un point M sur un cercle d'utiliser les coordonnées polaires définie par (r,θ) et non (x,y)

Le système de coordonnées polaires est un repère plan a symétrie de rotation. Les éléments du repère sont r et θ.

Le rayon polaire *r(t)* représente le module du vecteur position :$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

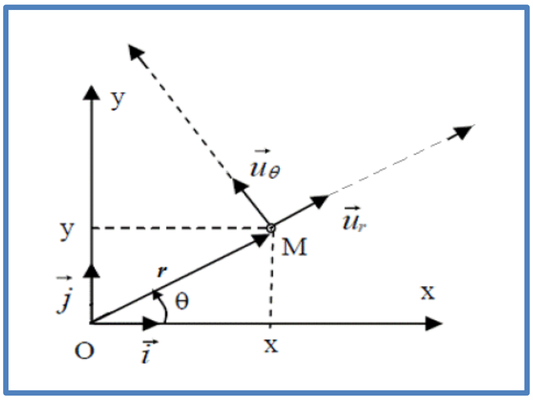


Figure 7: Systéme polaire

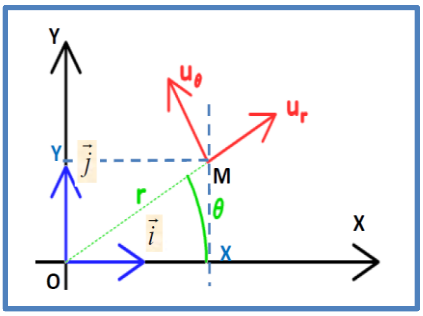
L'angle polaire $\theta(t)$, représente l'angle compris entre l'axe OX et le vecteur position.

La base du système de coordonnées polaire est formée par deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ liée au point M, c.à.d. $\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\theta}$; $\|\overrightarrow{u_r}\| = \|\overrightarrow{u_\theta}\| = 1$

Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$, d'où $|\overrightarrow{OM}| = r$; $\theta(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OX})$

a. Relation avec les coordonnées cartésiennes

La relation entre les éléments du repère cartésien (x, y) et celles du polaire (r, θ) sont données par les relations suivantes :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

La relation entre les éléments du repère polaire (r, Θ) et celles du cartésien (x, y) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\dfrac{y}{x}) \end{cases}$$

La relation entre les vecteurs unitaires du repère polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et celles du repère cartésien $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

III.3 Coordonnées cylindriques

Ces coordonnées sont adaptées pour décrire un problème à symétrie axiale d'axe Oz. C'est un repère spatial choisi pour l'étude d'un mouvement spirale ou sur une surface cylindrique.

La définition du repère cylindrique par rapport au repère cartésien est donnée sur la figure ci-contre. Le mouvement d'un mobile M au système de Coordonnées cylindriques est décomposé en deux mouvements.

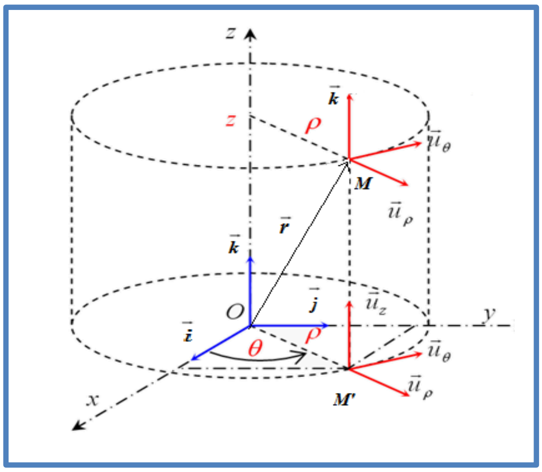


Figure 8:Système cylindrique

Un mouvement dans le repère polaire qui est en fait la projection du mouvement de M sur le plan (XOY) et un mouvement de translation selon l'axe OZ.

ρ: le module du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ qui représente la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan (XOY).

θ : L'angle compris entre l'axe OX et le vecteur $\rho = \overrightarrow{OM'}$.

Z : représente la hauteur du point M par rapport au plan(XOY).

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{k}$ constituants la base du repère cylindrique.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$; $\theta(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OX})$

a. Relation avec les coordonnées cartésiennes

Projection des vecteurs unitaires du repère cylindriques$(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})$ dans le système de coordonnées cartésiennes est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \dfrac{\vec{\rho}}{\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_\rho}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

Le repère cylindrique est en fait, une extension du repère polaire dans l'espace.

La relation entre les éléments du repère cartésien (x, y, z) et celles du polaire (ρ, θ, z) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La relation entre les éléments du repère polaire (r, θ) et celles du cartésien (x, y) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(\dfrac{y}{x}) \end{cases}$$

III.4 Coordonnées sphériques

Ces coordonnées sont adaptées pour décrire un problème à symétrie sphérique, lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point O que l'on prend pour origine du repère d'espace.
Les éléments du système de coordonnées sphériques sont : r, θ *et* φ telles que :
$r = \|\overrightarrow{OM}\|, \theta(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM})$ *et* $\varphi(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$

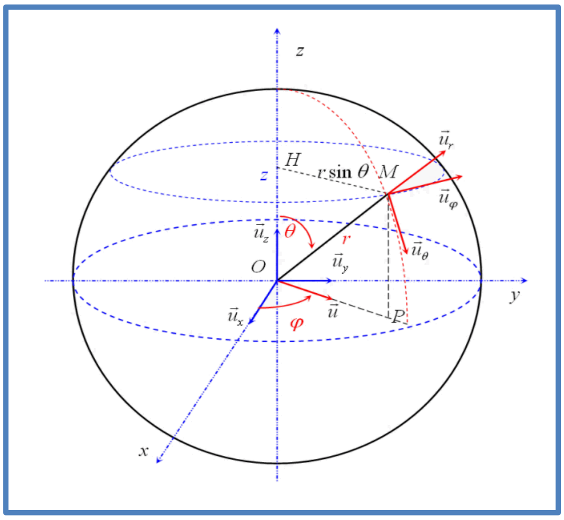


Figure 9: Système sphérique

La base associée à ce système de coordonnées est :

$(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$

Le vecteur position $(\overrightarrow{OM})$: la projection du vecteur position dans le repère cartésien peut être exprimé par : $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k}\ )$
Dans le système de coordonnées sphériques, le vecteur position prend la formule $\vec{r} = \mathrm{r}\,\overrightarrow{u_r}$

a. Relation avec les coordonnées cartésiennes

On passe des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Le passage inverse des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques est effectué par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/_z) \\ \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

b. Vecteurs unitaires du repère sphériques $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$

Il est utile de connaitre les expressions des vecteurs unitaires de système de coordonnées sphériques avec celles du repère cartésien.

À partir du vecteur position, on peut déduire le vecteur unitaire radial : $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ *et* $\overrightarrow{u_\theta}$, appartiennes au plan méridien avec, $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_r}\,(\theta + \frac{\pi}{2})$.

Les trois vecteurs $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}$, forment un repère orthonormé, donc l'expression du vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$ peut être déterminé par le produit vectoriel des deux premiers vecteurs : $\overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$, donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\vec{k} \\ \overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

CHAPITRE 2 : CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

Notre étude formelle de la physique commence par la cinématique qui est définie comme l'étude du mouvement sans considérer ses causes. Le mot « kinematics » vient d'un terme grec signifiant motion et est lié à d'autres mots anglais tels que « cinema » (films) et « kinesiology » (l'étude du mouvement humain).

I. Les objectifs spécifiques du chapitre

- ☺ L'objet de la cinématique du point est l'étude du mouvement d'un point sans se préoccuper des causes (les forces) qui lui donnent naissance.
- ☺ Connaître l'expression de la vectrice position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées.
- ☺ Savoir retrouver les équations horaires du mouvement ainsi que l'équation de la trajectoire de ce point.
- ☺ Connaître la définition de quelques mouvements particuliers
- ☺ Savoir reconnaître le type de mouvement que peut avoir un référentiel par rapport à un autre
- ☺ Savoir dériver un vecteur dans des référentiels différents.
- ☺ Connaître la loi de composition des vitesses et des accélérations.

II. Les prérequis

- 🕮 Connaître les systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
- 🕮 Savoir dériver les vecteurs de la base polaire ou cylindrique.
- 🕮 Savoir intégrer quelques fonctions élémentaires (polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielle etc.).
- 🕮 Avoir compris ce qu'est un référentiel.
- 🕮 Savoir dériver un vecteur unitaire tournant.

PART I : CINÉMATIQUE DU MOUVEMENT

I. Introduction :

La cinématique du point matériel est l'étude du mouvement des corps matériels en fonction du temps (la position, la distance parcouru, la vitesse, l'accélération…) sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement (les forces, l'énergie,…). On suppose que le corps étudié est un point matériel. On considère que les dimensions du corps sont très petites devant la distance parcourue.

La notion du mouvement est relative. Un corps peut être, en même temps, en mouvement par rapport à un corps et en repos par rapport à un autre. Par conséquent, il est nécessaire de définir un repère pour déterminer la position, la vitesse ou l'accélération d'un mobile à un instant correspondant à la position du mobile par rapport à ce repère.

On définit plusieurs systèmes de coordonnées selon la nature du mouvement du point matériel. Cartésien, polaire, cylindrique et sphérique.

I.1.Définitions :

a) Notion de point matériel :

Les mouvements des corps sont souvent très complexes. Lorsque, dans l'étude du mouvement d'un mobile, on ne considère que sa position, on peut, pour simplifier, réduire ce corps à un point matériel ayant la même masse et localisé en son centre de gravité. Cela revient à négliger tout effet de rotation du solide sur lui-même ou son extension spatiale.

Exemple : Système masse-ressort, la masse peut être réduite à un point matériel.

b) Notion de référentiel :

Le repos et le mouvement sont deux notions relatives. En effet, un observateur A immobile voit un arbre dans une position fixe alors que le conducteur B d'une voiture roulant à proximité le voit en mouvement vers l'arrière. L'étude d'un mouvement exige de connaître la position dans l'espace à tout instant t par rapport à un référentiel. Ce référentiel peut être lié à un repère orthonormé $R(O, x, y, z)$ dans lequel est repérée la position $M(x, y, z)$ d'un mobile. Le corps est au repos par rapport à ce repère si ses coordonnées sont constantes au cours du temps.

Cependant, si au moins l'une d'elles varie le corps est en mouvement par rapport à R. Un repère d'espace : Exemple le repère cartésien $R(O, x, y, z)$ est défini par une origine O fixe dans le référentiel et des axes et munis d'une base orthonormée directe

Une horloge : À chaque instant, on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

I.2.Étude Descriptive du mouvement d'un point matériel :

I.2.1. La position du mobile :

La position d'un mobile à un instant t est déterminée par rapport à un repère par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ qu'on appelle vecteur position. Son origine est le centre du repère O et son extrémité est le mobile M. Suivant le repère cartésien dans l'espace$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r \ = x\,\vec{\imath} \ + y\,\vec{\jmath} \ + z\,\vec{k}$$

Sur la figure 10, nous montrons le vecteur position de M suivant le repère cartésien et sa trajectoire.

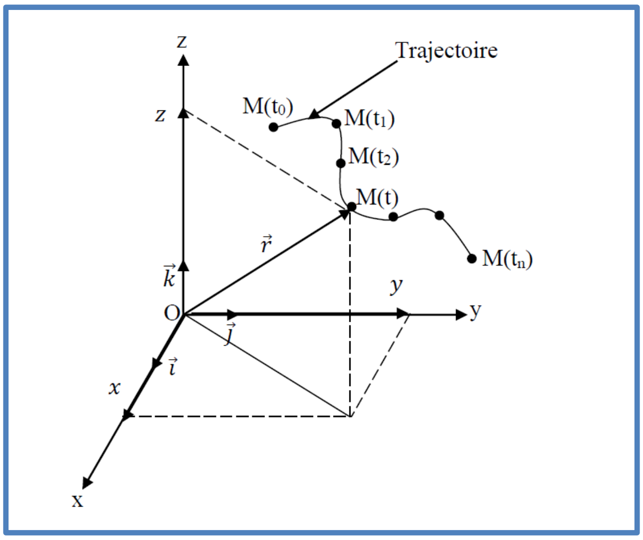


Figure 10: Trajectoire dans un repère cartésienne

Les composantes $x, y\ et\ z$ du vecteur position dans la base cartésienne sont les coordonnées cartésiennes du mobile M. Ces coordonnées changent avec le temps car le mobile M est en mouvement : $x(t), y(t), z(t)$.

Les fonctions $x(t), y(t)\ et\ z(t)$ sont appelées les équations horaires du mouvement.

I.2.2. La trajectoire :

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours du temps par rapport à un repère. C'est une ligne continue qui relie le point de départ au point d'arrivée (figure 1). La trajectoire définit la nature du mouvement. Si la trajectoire est rectiligne, le mouvement est rectiligne et si elle est curviligne le mouvement est curviligne.

- Équation de la trajectoire :

C'est la relation qui lie les coordonnées du mobile x, y, z entre eux indépendamment du temps. Pour trouver l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les équations horaires.

<u>Exemple :</u>

Les équations horaires d'un point ponctuel en mouvement dans le plan (O, x, y) sont :

$$\begin{cases} x = 2t \dots\dots\dots (1) \\ y = 2t + 1 \dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (1), on a $t = x/2$. On remplace t dans l'équation (2), on aura :

$$y = 2\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

$$y = x + 1$$

Cette équation de la trajectoire est l'équation d'une ligne droite de la forme $y = ax + b$ ce qui signifie que le mouvement est rectiligne.

I.2.3. Le vecteur déplacement :

Pendants le mouvement, le mobile occupe des positions différentes. A l'instant t_1, il est au point M_1 et à un instant t_2, il est au point M_2 (figure 2). On définit le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ le vecteur de déplacement

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

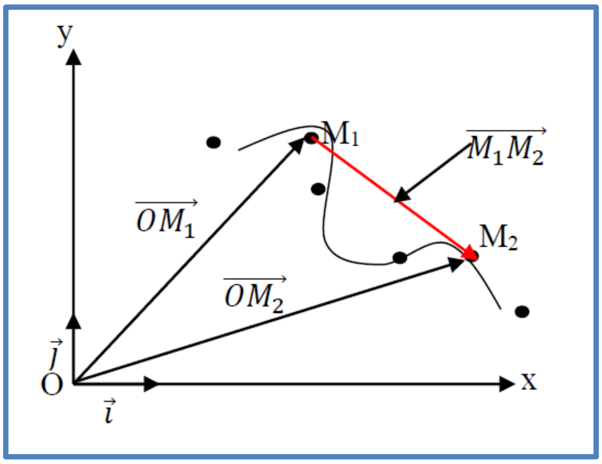


Figure 11: Vecteur de déplacement

I.2.4. Le vecteur vitesse

a) La vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la variation de la distance entre deux positions M_1, M_2occupées par le mobile par rapport au temps écoulé entre ces deux positions. Elle est définit comme suit :

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = avec\ \Delta x = x_2 - x_1$$

b) La vitesse instantanée

C'est la vitesse à un instant t donné et elle est définit comme suit :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur de la vitesse instantanée est tangent à la trajectoire et sa direction suivant la direction du mouvement.

Les coordonnées du vecteur vitesse suivant les coordonnées cartésiennes sont comme suit . Soit: $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

I.2.5. Le vecteur accélération

a) L'accélération moyenne

L'accélération moyenne est la variation de la vitesse entre deux positions par rapport au temps. Soit v_1 la vitesse du mobile à un instant t_1 et v_2 sa vitesse à instant t_2. Le mobile subit une accélération moyenne telle que :

$$\overrightarrow{\gamma_m} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\gamma_m}$est // à $\Delta\vec{v}$ et il se dirige vers la concavité de la trajectoire.

b) L'accélération instantanée

L'accélération instantanée est l'accélération à un instant t donné :

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Les coordonnées du vecteur accélération suivant les coordonnées cartésiennes sont:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

I.3.Différents types de mouvements

I.3.1. Le mouvement rectiligne

Le mouvement rectiligne est caractérisé par une trajectoire sous forme d'une droite. Le mobile M est repéré par les coordonnées cartésiennes selon la droite Ox (si le mouvement est linéaire suivantOx)

Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath}$$

1. Le mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par une vitesse constante et par conséquent l'accélération est nulle :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}$$

D'où : $$dx = v\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

Avec : x_0 est l'abscisse (la position) de M à l'instant initial t_0

$$x(t) = v\,(t - t_0) + x_0$$

Cette équation est appelée l'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme

- Diagramme du mouvement rectiligne uniforme:

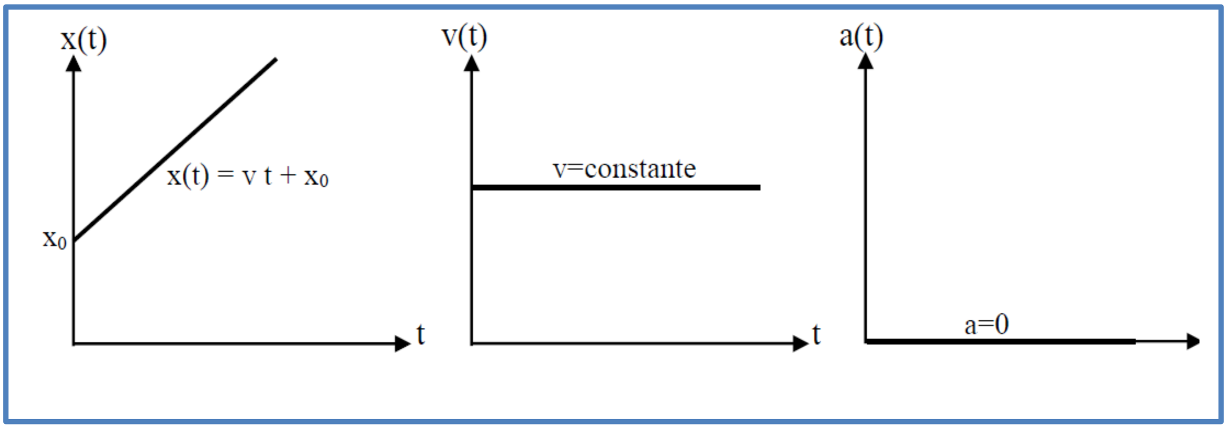


Figure 12: Le mouvement rectiligne uniforme

2. Le mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement rectiligne uniformément varié est caractérisé par une accélération constante :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = constante$$

$$dv = \gamma\, dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \gamma \int_{t_0}^{t} dt$$

Avec v_0 est la vitesse initiale à l'instant t_0

$$v(t) = \gamma(t - t_0) + v_0$$

D'autre part :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v(t)\, dt$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} [\gamma(t - t_0) + v_0]\, dt$$

$$x(t) = \frac{\gamma}{2}(t^2 - t_0^2) + (v_0 - \gamma t_0)(t - t_0) + x_0$$

Si $t_0 = 0$, l'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié devient :

$$x(t) = \frac{\gamma}{2} t^2 + v_0\, t + x_0$$

Si $\vec{\gamma}.\vec{v} > 0$, le mouvement est uniformément accéléré

Si $\vec{\gamma}.\vec{v} < 0$, le mouvement est uniformément retardé

Remarque: le mouvement rectiligne uniformément varié est caractérisé par une accélération constante qui peut être calculé comme suit :

$$\gamma = \frac{dv}{dt}$$

$$\gamma \, dx = \frac{dv}{dt} dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \gamma \, dx = \int_{v_0}^{v_1} v \, dv$$

$$\gamma(x_1 - x_0) = \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

D'où : $$\gamma = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2(x_1 - x_0)}$$

x_1 est v_1 sont respectivement la position et la vitesse de M à l'instant t_1

- Diagramme du mouvement rectiligne uniformément varié:

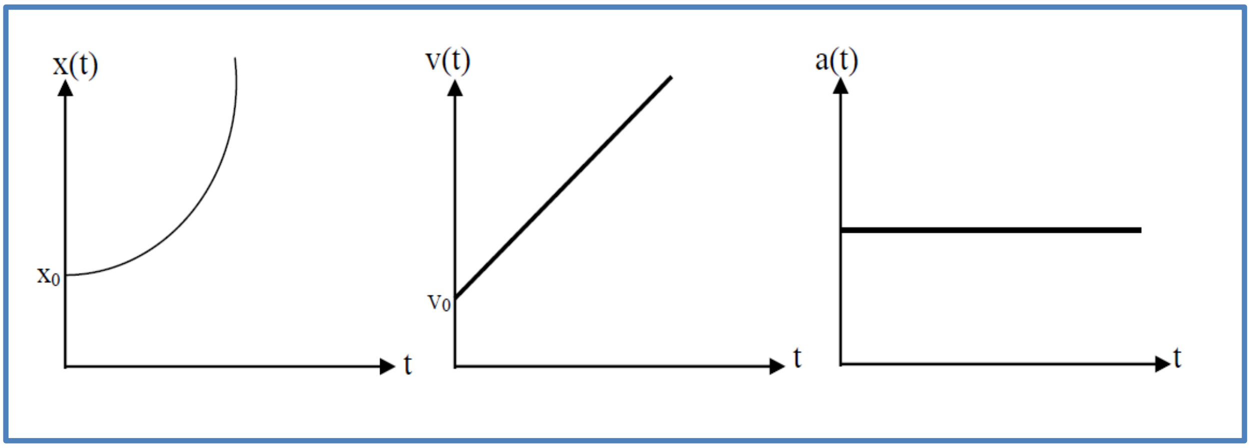


Figure 13:Le mouvement rectiligne uniformément varié

3. Le mouvement rectiligne varié

Le mouvement rectiligne varié est caractérisé par une accélération qui dépend du temps.

Exemple :

Soit un mobile se déplace à une accélération $\gamma = 2t - 1$.

$$\gamma = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} \gamma \, dt = \int_{t_0}^{t} (2t - 1)dt$$

On suppose à l'instant $t_0 = 0s, v_0 = 0m/s \; et \; x_0 = 0m.$

$$v(t) = t^2 - t$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{0}^{x(t)} dx = \int_{0}^{t} v(t)dt = \int_{0}^{t} (t^2 - t)dt$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$$

4. Le mouvement rectiligne sinusoïdal

L'équation horaire du mouvement rectiligne sinusoïdal s'écrit sous la forme sinusoïdale en fonction du cosinus ou sinus tel que :

$$x(t) = x_m \cos(\omega \, t + \varphi)$$

x_m est l'amplitude maximale

ω est la pulsation du mouvement

φ est la phase initiale et elle est déterminée par les conditions initiales

La vitesse est la dérivée de $x(t)$ tel que:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega \, t + \varphi)$$

L'accélération est la dérivée de la vitesse telle que :

$$\gamma(t) = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega^2 \cos(\omega \, t + \varphi) = -\omega^2 \, x(t)$$

- Diagramme du mouvement rectiligne sinusoïdal :

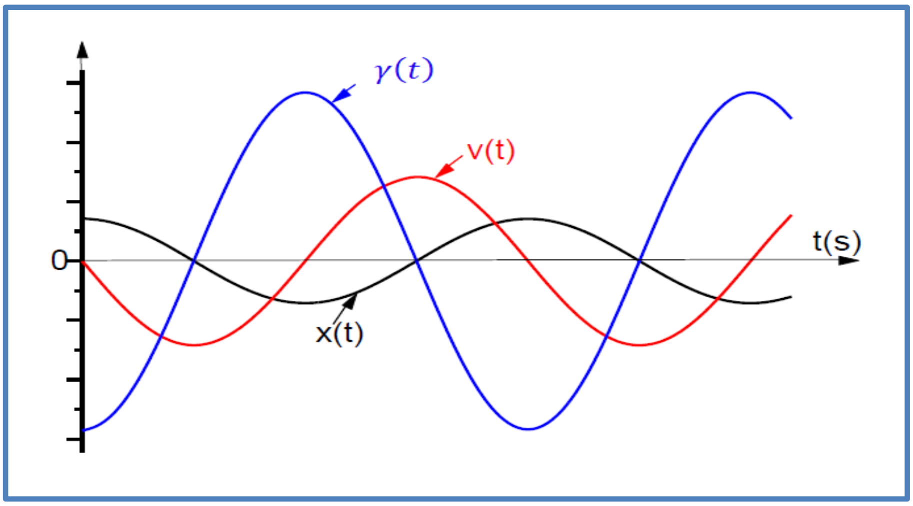


Figure 14:Le mouvement rectiligne sinusoïdal

I.3.2. Le mouvement dans le plan

Si la trajectoire du mobile est dans le plan, nous étudions le mouvement suivant les coordonnées cartésiennes $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou suivant les coordonnées polaires $(O, \overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta})$

I.3.2. 1.Les coordonnées polaires

On définit la base polaire par la base orthonormée $(\overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta})$ tel que :

$\overrightarrow{U_R}$: Vecteur unitaire suivant la direction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{U_\theta}$: Vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{U_R}$: en faisant une rotation de $\pi/2$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$

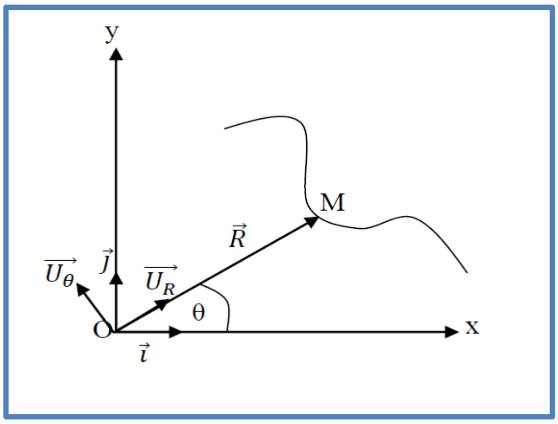


Figure 15: Trajectoire dans un repère polaire

La base cartésienne est une base fixe alors que la base polaire est une base qui dépend du mobile M qui est en mouvement en fonction du temps.

Suivant les coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{R} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

Suivant les coordonnées polaires, $\overrightarrow{OM}$ s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_R}$$

Les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sont (x, y) dans la base cartésienne alors que dans la base polaires les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sont (R, θ).

- Lien entre le système de coordonnées cartésiennes et le système de coordonnées polaires et vice versa :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}\ , \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad ou \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

La base polaire s'écrit en fonction de la base cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_R} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

De même, la base cartésienne s'écrit en fonction de la base polaire comme suit :

$$\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\,\overrightarrow{U_R} - \sin\theta\,\overrightarrow{U_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\,\overrightarrow{U_R} + \cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta} \end{cases}$$

a) Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées polaires

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\overrightarrow{U_R})}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt}\overrightarrow{U_R} + R\,\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt}$$

La dérivée du vecteur $\overrightarrow{U_R}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(cos\,\theta\,\vec{\imath} + sin\,\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

C'est la règle de dérivation d'un vecteur unitaire tournant :

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ qui tourne par un angle θ est obtenue en multipliant la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ par le vecteur qui est directement perpendiculaire à $\vec{u}$ (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif)

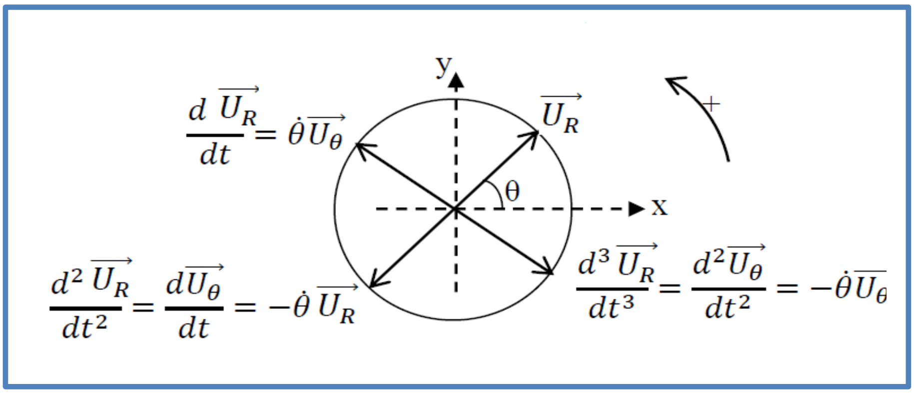


Figure 16 : Les dérivés des vecteurs unitaires (base polaire)

Le vecteur vitesse suivant les coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt}\overrightarrow{U_R} + R\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta} = \dot{R}\,\overrightarrow{U_R} + R\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$$

b) Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées polaires

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\,\overrightarrow{U_R} + R\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta})$$

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{R}\overrightarrow{U_R} + \dot{R}\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt}\right) + (\dot{R}\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + R\,\dot{\theta}\frac{d\,\overrightarrow{U_\theta}}{dt})$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\overrightarrow{U_R} + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\overrightarrow{U_\theta}$$

I.3.2. 2.Le mouvement curviligne

Le mouvement curviligne est caractérisé par une trajectoire curviligne qui nécessite la connaissance du rayon de courbure R et le centre C (figure 8).

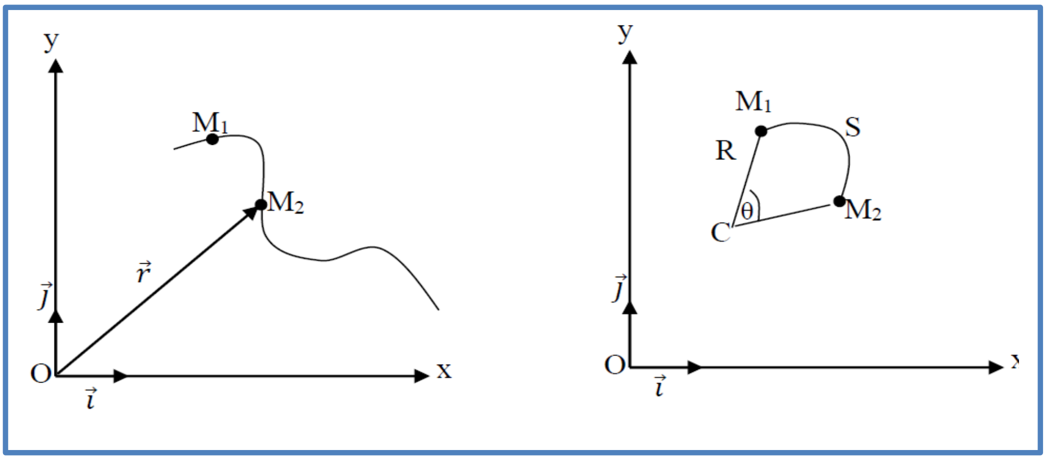


Figure 17: Le mouvement curviligne

La position du mobile est déterminée par l'abscisse curviligne S tel que :

$$S(t) = R\,\theta(t)$$

S est la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$. M1 est la position du mobile à l'instant t_1 et M_2 est la position du mobile à l'instant t_2.

- Base de Frenet :

La base de Frenet est une base reliée au mobile en mouvement curviligne. Elle est définit par la base orthonormé $(\overrightarrow{U_t}, \overrightarrow{U_n})$ tel que :

$\overrightarrow{U_t}$ est un vecteur unitaire tangentiel à la trajectoire et en direction du mouvement ($\overrightarrow{U_t}$ est parallèle au vecteur vitesse v)

$\overrightarrow{U_n}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{U_t}$ et il est dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire.

$$\vec{v} = v\,\overrightarrow{U_t} = \frac{dS}{dt}\overrightarrow{U_t}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + v\frac{d\overrightarrow{U_t}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + v\dot{\theta}\overrightarrow{U_n}$$

D'autre part :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dS}{dt}\frac{1}{R} = \frac{v}{R}$$

D'où
$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n} = \overrightarrow{\gamma_t} + \overrightarrow{\gamma_n}$$

$$\overrightarrow{\gamma_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} \quad ; \qquad \overrightarrow{\gamma_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n}$$

$\overrightarrow{\gamma_t}$ est l'accélération tangentielle et $\overrightarrow{\gamma_n}$ est l'accélération normale

Si $|v\ |$ est constant donc l'accélération tangentielle γ_t est nulle. On dit que le mouvement et curviligne uniforme : $\vec{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n}$

R est le rayon de courbure de la trajectoire qui est déterminé comme suit :

$$\vec{\gamma} \times \vec{v} = \left(\frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_n}\right) \times v\,\overrightarrow{U_t}$$

$$\vec{\gamma} \times \vec{v} = \frac{v^3}{R}(\overrightarrow{U_n} \times \overrightarrow{U_t})$$

$$|\vec{\gamma} \times \vec{v}| = \frac{v^3}{R}$$

D'où
$$R = \frac{v^3}{|\vec{\gamma}\times\vec{v}|}$$

I.3.2. 3.Le mouvement circulaire

Le mouvement circulaire est un mouvement dont la trajectoire est un cercle de rayon R constant. L'équation de la trajectoire est comme suit :

$$(x - x_0) + (y - y_0) = R^2$$

R est le rayon du cercle et (x_0, y_0) sont les coordonnées du centre du cercle.

Le vecteur position s'écrit suivant les coordonnées polaires comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{U_R}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{U_R} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$$

L'accélération est la somme de l'accélération tangentielle $\gamma_\theta = R\,\ddot{\theta}$ et l'accélération normale $\gamma_R = R\dot{\theta}^2$ qui s'écrient suivant la base de Frenet comme suit :

$$\overrightarrow{\gamma_t} = R\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_t}$$

$$\overrightarrow{\gamma_n} = R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{U_n}$$

$\dot{\theta} = \omega$ est appelée la vitesse angulaire.

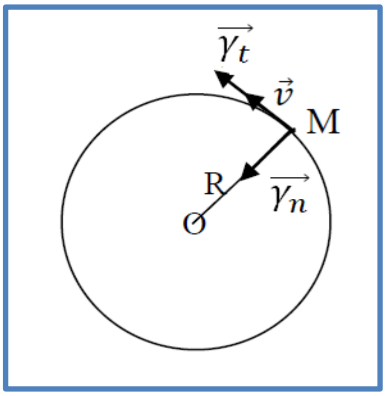


Figure 18 : Le mouvement circulaire

Si le module de la vitesse v ou la vitesse angulaire ω est constante, on dit que le mouvement est circulaire uniforme. L'accélération dans ce cas est :

$$\vec{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_n} = R\,\omega^2\,\overrightarrow{U_n}$$

On définit l'accélération angulaire par $\dot{\omega} = \alpha$. Si α est constante, on dit que le mouvement est circulaire uniformément varié.

I.3.3. Le mouvement dans l'espace

I.3.3.1.Mouvement suivant les coordonnées cartésiennes

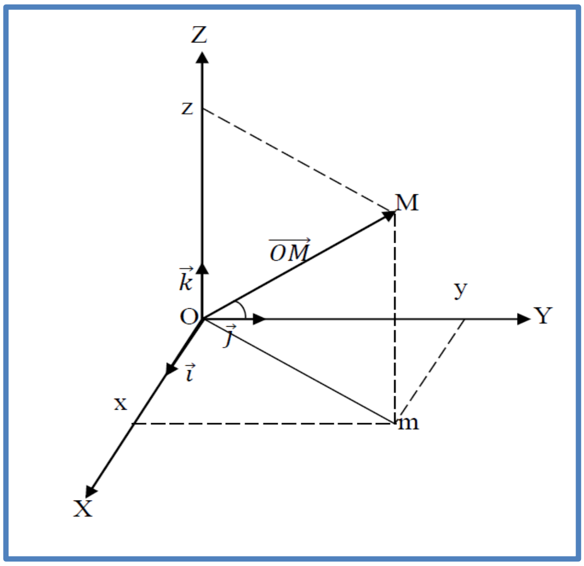


Figure 19 : Système cartésienne

Les vecteurs : position vitesse et accélération s'écrient suivant les coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

I.3.3.2. Mouvement suivant les coordonnées cylindriques

La base cylindrique est déterminée par les vecteurs unitaires$(\overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta}\,, \vec{k}\,)$. Voir figure 11

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit suivant les coordonnées cylindriques comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\,\overrightarrow{U_R} + z\vec{k}$$

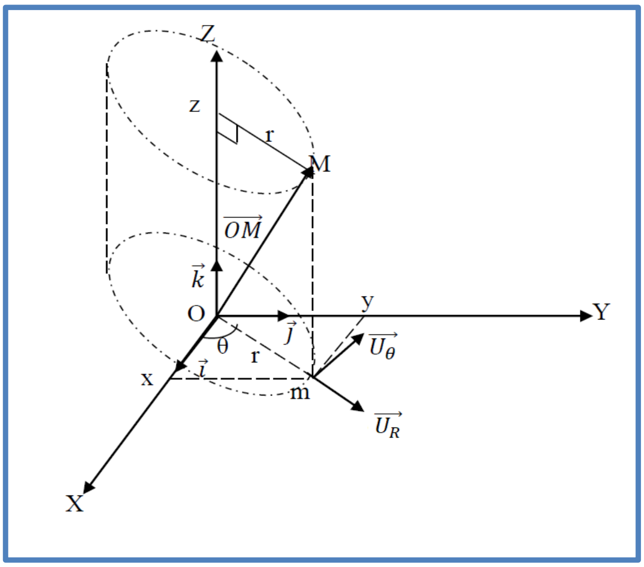


Figure 20 : système cylindrique

- Lien entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad donc\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La base cylindrique s'écrit en fonction de la base cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_R} = cos\ \theta\ \vec{\imath} + \ sin\ \theta\ \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + cos\,\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{k} \ = \vec{k} \end{cases}$$

a) Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées cylindriques

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}((r\overrightarrow{U_R} + z\,\vec{k})$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_R} + r\,\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

Nous rappelons que :

$$\dot{\overrightarrow{U_R}} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}\,, \qquad \dot{\overrightarrow{U_\theta}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{U_r}; \qquad \dot{\vec{k}} = 0.$$

Donc le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_R} + r\,\frac{d\overrightarrow{U_R}}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{U_R} + r\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}$$

b) Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées cylindriques

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\overrightarrow{U_R} + r\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k})$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\,\overrightarrow{U_R} + \dot{r}\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + r\,\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\overrightarrow{U_R} + \ddot{z}\,\vec{k})$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{U_R} + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\overrightarrow{U_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

I.3.3.3.Mouvement suivant les coordonnées sphériques

La base sphérique est déterminée par les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{U_R}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi})$, tel que :

φ est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et l'axe Oz. θ est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{Om}$ et l'axe Ox. m est la projection de M dans le plan (O, x, y). Voir figure 21.

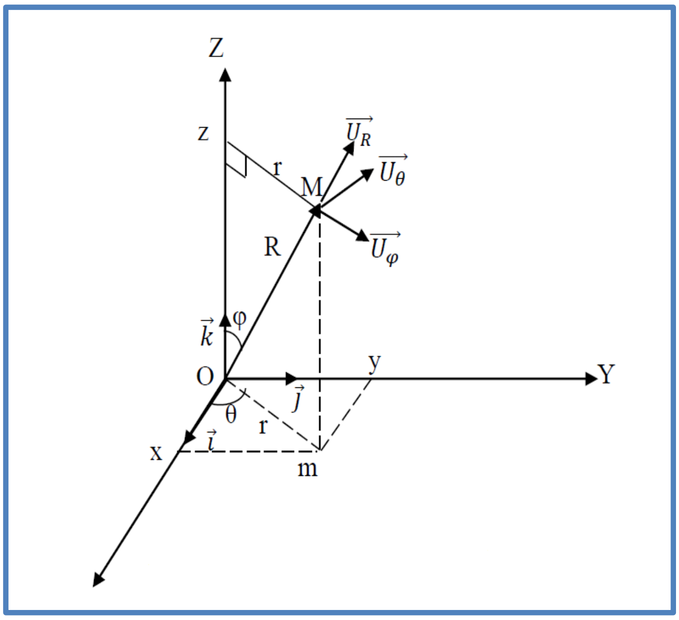


Figure 21 : Système sphérique

Un point mobile M est repéré par les coordonnées sphériques : (R, θ, φ) et le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{U_R}$$

- Lien entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Sachant que $r = R\, sin\varphi$, donc :

$$\begin{cases} x = R\, sin\varphi \cos\theta \\ y = R\, sin\varphi \sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{R} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

- Lien entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} r = R\, sin\varphi \\ \theta = \theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \theta \\ \varphi = \arctan\dfrac{r}{z} \end{cases}$$

- Base sphérique en fonction de la base cartésienne

Nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{U_R} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

Avec

$$\overrightarrow{Om} = r\overrightarrow{U_r} = R\sin\varphi\ \overrightarrow{U_r}$$
$$\overrightarrow{mM} = z\vec{k} = R\cos\varphi\ \vec{k}$$

Donc

$$\overrightarrow{OM} = R\sin\varphi\,\overrightarrow{U_r} + R\cos\varphi\,\vec{k}$$

Nous savons que

$$\overrightarrow{U_r} = cos\,\theta\,\vec{\imath} + \ sin\,\theta\ \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = R[\sin\varphi\,cos\,\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,sin\,\theta\ \vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}] = R\overrightarrow{U_R}$$

Donc

$$\overrightarrow{U_R} = \sin\varphi\,cos\,\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,sin\,\theta\ \vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

Pour trouver le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{U}_\theta}$ en fonction de la base cartésienne, il suffit de tracer les vecteurs unitaires suivant le plan(o,x,y). Voir figure 22.

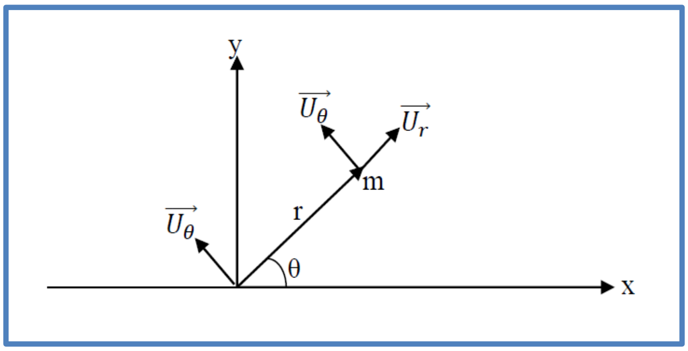


Figure 22 : les vecteurs polaires dans la base cartésienne

$$\overrightarrow{U_\theta} = -sin\,\theta\,\vec{\imath} + \ cos\,\theta\vec{\jmath}$$

Pour trouver le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi}$, nous avons : $\overrightarrow{U_R}\times\overrightarrow{U_\theta} = \overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi}$

$$\overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \sin\varphi\,cos\,\theta & \sin\varphi\,sin\,\theta & \cos\varphi \\ -sin\,\theta & cos\,\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi} = -\cos\varphi\,cos\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,sin\,\theta\vec{\jmath} + \sin\varphi\,\vec{k}$$

a) Expression du vecteur vitesse suivant les coordonnées sphériques

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\,\overrightarrow{U_R}\right) = \dot{R}\,\overrightarrow{U_R} + R\,\dot{\overrightarrow{U_R}}$$

$$\dot{\overrightarrow{U_R}} = \frac{d\,\overrightarrow{U_R}}{dt} = \dot{\varphi}\left(\cos\varphi\,cos\,\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,sin\,\theta\vec{\jmath} - \sin\varphi\,\vec{k}\right) + \dot{\theta}\,(-\sin\varphi\,sin\,\theta\vec{\imath} + \sin\varphi\,cos\,\theta\,\vec{\jmath}) \Leftrightarrow \dot{\overrightarrow{U_R}} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi} + \dot{\theta}\,\sin\varphi\,\overrightarrow{U_\theta}$$

Alors

$$\vec{v} = \dot{R}\,\overrightarrow{U_R} + R\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\overrightarrow{U_\theta} + R\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi}$$

b) Expression du vecteur accélération suivant les coordonnées sphériques

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\overrightarrow{U_R} + R\,\dot{\theta}\sin\varphi\,\overrightarrow{U_\theta} + R\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi})$$

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{R} - R\,\dot{\varphi}^2 - R\dot{\theta}^2\sin\varphi^2\right)\overrightarrow{U_R} + R\,\ddot{\theta}\sin\varphi + 2\dot{R}\,\dot{\theta}\sin\varphi + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi)\overrightarrow{U_\theta} + R\,\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\,\dot{\varphi} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi)\overrightarrow{\mathrm{U}_\varphi})$$

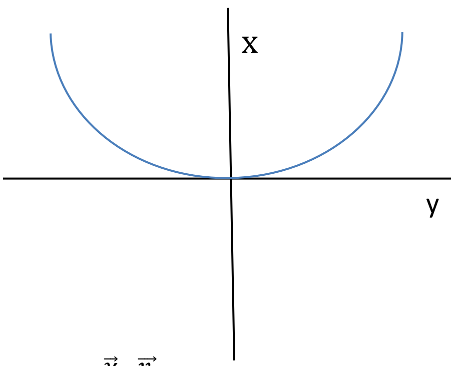
I.1.6. Les applications et correction

1/ Le vecteur position d'un point matériel est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = t\,\vec{\imath} + 2\,t^2\vec{\jmath}$$

1. Déterminer la trajectoire de M
2. Déterminer le vecteur vitesse de M- ainsi que sa norme
3. Déterminer le vecteur accélération et sa norme
4. Déterminer l'angle θ entre $\vec{\gamma}$ et $\vec{v}$
5. Quel est l'angle que fait le vitesse et l'accélération à $t = 1s$

Correction



1/ $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ $\begin{cases} x = t \\ y = 2\,t^2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x^2$

2/ $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\imath} + 4\,t\,\vec{\jmath} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 16t^2}\,m/s$

3/ $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{\gamma} = 4\,\vec{\jmath} \Leftrightarrow \|\vec{\gamma}\| = 4m/s$

4/L'angle entre $\vec{\gamma}$ et $\vec{v}$ donc $\vec{\gamma}\,.\,\vec{v} = \|\vec{\gamma}\|\,.\,\|\vec{v}\|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{\gamma}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{\gamma}\|\,.\|\vec{v}\|}$

$$\vec{\gamma}\,.\,\vec{v} = (0.1) + (4.4t) = 16t \Rightarrow \cos\theta = \frac{16\,t}{4\sqrt{1+16t^2}} = \frac{4\,t}{\sqrt{1+16t^2}}$$

5/à t=1s $\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

2/ Dans le systéme des coordonnées polaire ; le mouvement d'un point matériel est décrit par $r = R \quad et \quad \theta = t^2$

I)

1. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'accélération et leurs normes dans ce système
2. Déterminer le rayon de courbure
3. Déterminer la trajectoire de (M)
4. Déterminer le centre de courbure

II)

1. Déterminer la vitesse et l'accélération dans le système curviligne (base de Frenet) et vérifier avec la question 1
2. Déterminer la vitesse et l'accélération dans le système cartésienne

Correction

I) $r = R \;\;;\; \theta = t^2 \qquad \Rightarrow \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r}$

1.La vitesse $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\,\overrightarrow{u_r}) = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

$\vec{v} = 2Rt\,\overrightarrow{u_\theta} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 2Rt\;m/s$

1. L'accélération $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\,R\,\overrightarrow{u_\theta} + 2\,t\,R\,\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = 2\,R\,\overrightarrow{u_\theta} - 4\,t^2R\,\overrightarrow{u_r}$

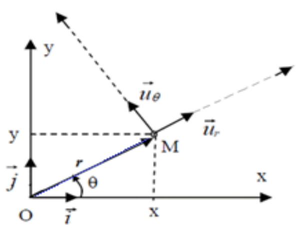
$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}\| = 2R\sqrt{4\,t^4+1}\;m/s^2$$

2.Rayon de courbure $\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\wedge\vec{\gamma}|}$, $v^3 = 8t^3R^3$; $\vec{v}\wedge\vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \vec{k} \\ 0 & 2tR & 0 \\ -4t^2R & 2R & 0 \end{vmatrix} = 8t^3R^2\vec{k}$

$|\vec{v}\wedge\vec{\gamma}| = 8t^3R^2 \Longrightarrow \rho = \frac{8t^3R^3}{8t^3R^2} = R \Leftrightarrow \rho = R$

3.Déterminer la trajectoire M

On a $\begin{cases} \sin\theta = y/r \\ \cos\theta = x/r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



$x^2 + y^2 = r^2 = R^2 \Longrightarrow$ la trajectoire est un cercle de centre(0,0) et de rayon R

4.Le centre de courbure $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{OC} = R\,\overrightarrow{u_r} + \frac{R}{2\,t}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = R\,\overrightarrow{u_r} + \frac{R}{2\,t}(-2t\,\overrightarrow{u_r})$

$\overrightarrow{OC} = R\,\overrightarrow{u_r} - R\,\overrightarrow{u_r} = \vec{0}$ donc le centre est C=0

II)

1.La vitesse et l'accélération (Basse de Frenet)

$\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_T} \Rightarrow \vec{v} = 2R\,t\overrightarrow{u_T}$

$$\vec{\gamma} = \gamma_t\overrightarrow{u_T} + \gamma_N\overrightarrow{u_N} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = 2R \\ \gamma_N = \dfrac{v^2}{\rho} = 4t^2R \end{cases} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = 2R\overrightarrow{u_T} + 4t^2R\,\overrightarrow{u_N}$$

2.La vitesse et l'accélération dans le systéme cartisiénne

On sait que $\begin{cases} x = r\cos\theta = R\cos(t^2) \\ y = r\sin\theta = R\sin(t^2) \end{cases}$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2t\,R\sin(t^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2t\,R\cos(t^2) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = 2t\,R(-\sin(t^2)\,\vec{\imath} + \cos(t^2)\,\vec{\jmath} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 2t\,R\,m/s$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[2t\,R(-\sin(t^2)\,\vec{\imath} + \cos(t^2)\,\vec{\jmath}]$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_x\vec{\imath} + \gamma_y\vec{\jmath} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma_x = 2R\sin(t^2) - 4t^2R\cos(t^2) \\ \gamma_y = 2R\cos(t^2) - 4t^2R\sin(t^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\gamma} = 2R[(-\sin(t^2) - 2t^2\cos(t^2))\vec{\imath} + (\cos(t^2) - 2t^2\sin(t^2))\vec{\jmath}]$$

$\|\vec{\gamma}\| = 2R\sqrt{1 + 4\,t^4}m/s^2$

PART II : LE MOUVEMENT RELATIF

II. 1.Introduction

Dans la pratique, on est souvent amené à travailler avec des référentiels différents, d'où la nécessité d'établir des lois cinématiques qui vont permettre de relier les accélérations, les vitesses et les positions observées dans des référentiels distincts. Nous avons indiqué que le mouvement est une notion relative en ce sens qu'on doit toujours le rapporter à un système de référence particulier, choisi par l'observateur.

II.2.Vitesse relative

Considérons deux objets A et B, un observateur O, qui prend comme système de référence (OXY) (Figure 23)

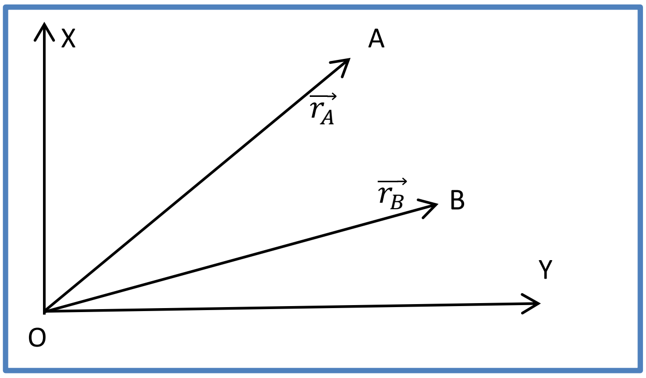


Figure 23: Mouvement relatif

Par rapport à O, A et B ont pour vitesses :

$$V_{A/O} = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt}$$

$$V_{B/O} = \frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt}$$

- La vitesse de A par rapport à B est définit par :

$$\vec{V}_{A/B} = \frac{d\overrightarrow{r_{AB}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt}$$

Donc, pour obtenir la vitesse relative de deux corps, on soustrait leurs vitesses par rapport à l'observateur. Nous trouvons que

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

- La vitesse de B par rapport à A est définit par :

$$\vec{V}_{B/A} = \frac{d\overrightarrow{r_{BA}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

II.3.Mouvement relatif uniforme de translation et de rotation

Précédemment, nous avons considéré des référentiels fixes, dont les vecteurs de base ne varient pas avec le temps. Mais par la suite deux référentiels peuvent être en mouvement relatif, soit parce que leurs origines se déplacent l'une par rapport à l'autre, soit parce que l'orientation relative des deux référentiels change avec le temps, soit les deux. Nous nous proposons, dans ce cas, de considérer le problème de la détermination des caractéristiques d'un mouvement par rapport à l'un des référentiels lorsqu'il est connu dans l'autre référentiel.

Dans ce cas, nous considérerons un mobile M et les deux systèmes de coordonnées cartésiennes suivants :

- $\Re(O, x, y, z)$, supposé fixe, qui est appelé **repère absolu ;**
- $\Re'(O', x', y', z')$, en mouvement quelconque par rapport à $\Re$, qui est le **repère relatif.**

II.3.1.Le mouvement absolu

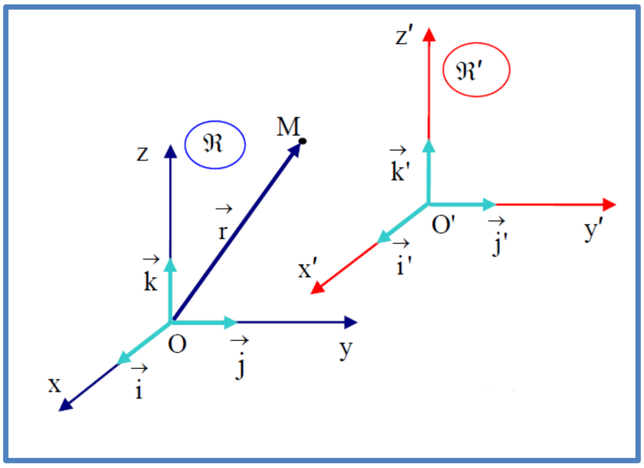


Figure 24 : Un point M par rapport un repère absolu

Le mouvement de M considéré par rapport au repère absolu $\Re(O, x, y, z)$ est caractérisé par les grandeurs :

- **le vecteur position**

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

- **la vitesse absolue**

$$\overrightarrow{V_a}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big]_{\Re} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

- **l'accélération absolue**

$$\overrightarrow{\gamma_a}(t) = \frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}\Big]_{\Re} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Remarque : les dérivations sont effectuées dans $\Re$ dans lequel la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est invariable, avec : $\frac{d\vec{\imath}}{dt}\Big]_{\Re} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt}\Big]_{\Re} = \frac{d\vec{k}}{dt}\Big]_{\Re} = \vec{0}$

II.3.2.Le mouvement relatif

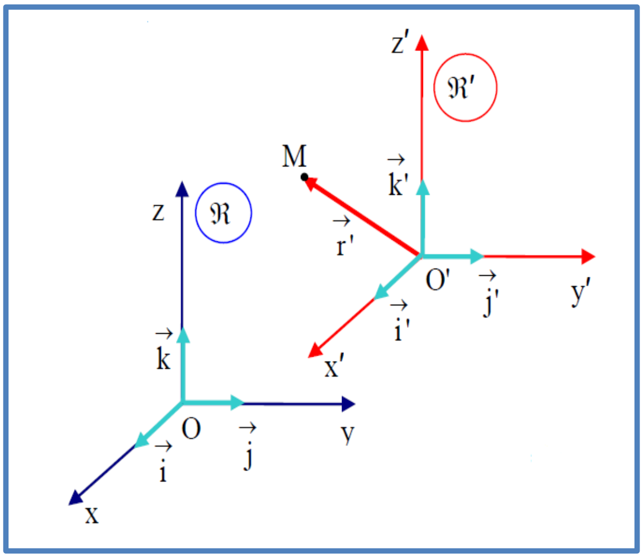


Figure 25 : Un point M par rapport un repère relatif

Le même mouvement, considéré par rapport au repère relatif $\Re'$ (O', x', y', z'), est caractérisé par les grandeurs :

- **le vecteur position**

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{r'} = x'\,\vec{\imath}' + y'\,\vec{\jmath}' + z'\,\vec{k}'$$

- **la vitesse absolue**

$$\overrightarrow{V_r}(t) = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big]_{\Re'} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

- **l'accélération absolue**

$$\overrightarrow{\gamma_r}(t) = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\Big]_{\Re'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$$

Remarque : dérivations sont effectuées dans $\Re'$dans lequel la base $(\overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'})$ est invariable, avec : $\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt}\Big]_{\Re'} = \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt}\Big]_{\Re'} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\Big]_{\Re'} = \vec{0}$

II.4.La composition des vecteurs vitesses

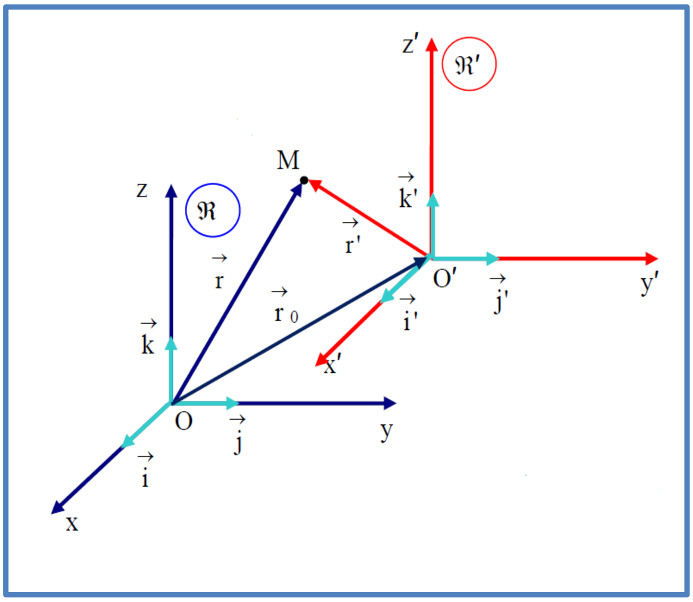


Figure 26 : Un point M par rapport un repère absolu et relatif

Par définition, la vitesse absolue du point M est :

$$\overrightarrow{V_a}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big]_{\Re}$$

D'autre part, nous avons la relation de Chasles permet d'écrire:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Si on dérive par rapport au temps, en tenant compte du fait que la base$(\overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'})$ peut varier dans $\Re$, on obtient :

$$\overrightarrow{V_a}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big]_{\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{i'} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

En réarrangeant les termes on obtient :

$$\overrightarrow{V_a}(t) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}\right)$$

La vitesse absolue est composée de la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$ et la vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ tel que :

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\overrightarrow{V_r} = \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}$$

La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$ est la vitesse du repère $\Re'$ par rapport au repère fixe $\Re$

La vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est la vitesse de M par rapport au repère mobile$\Re'$.

- **Théorème de composition des vitesses:**

Le vecteur vitesse absolue est égale à la somme des vecteurs vitesses d'entraînement et relative:

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$$

II.5.La composition des vecteurs accélérations

Si on dérive le vecteur vitesse absolue par rapport au temps, on obtient le vecteur accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$ défini dans le repère $\Re$:

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}\Big]_{\Re} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{i'} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}\right) + 2(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})$$

L'accélération est composée de l'accélération relative $\overrightarrow{\gamma_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$, et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}$, tel que :

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})$$

- **Théorème de composition des accélérations:**

Le vecteur accélération absolue est égal à la somme des vecteurs accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis:

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c}$$

Le mouvement du repère $\mathfrak{R}'$ peut être en translation ou en rotation par rapport au repère fixe $\mathfrak{R}$. La vitesse relative ne change pas mais la vitesse d'entrainement change et par conséquent l'accélération d'entrainement change et l'accélération de Coriolis change.

II.6.Cas d'un repère en mouvement de translation

Le repère $\mathfrak{R}'$ est en translation par rapport à $\mathfrak{R}$ lorsque les vecteurs unitaires du repère $\mathfrak{R}'$ ne changent pas au cours du temps et ils gardent le même sens et la même direction que le repère $\mathfrak{R}$: $\vec{\imath} = \overrightarrow{\imath'}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{\jmath'}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{k'}$

$$\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{0}$$

La vitesse d'entrainement devient :

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

L'accélération d'entrainement devient :

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

Et l'accélération de Coriolis s'annule : $\overrightarrow{\gamma_c} = \vec{0}$

- **Remarque :** L'accélération de Coriolis s'annule si le repère mobile $\mathfrak{R}'$ est en translation par rapport au repère fixe $\mathfrak{R}$ ou si le mobile M est fixe par rapport au repère mobile $\mathfrak{R}'$

$$\frac{d\overrightarrow{x'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{y'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{z'}}{dt} = 0$$

II.7.Cas d'un repère en mouvement de rotation sans translation

On considère que le repère $\mathfrak{R}'$ tourne autour le repère fixe $\mathfrak{R}$, qui est en rotation par rapport à l'axe z avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}} = \dot{\omega}\,\vec{k}$ et on considère que $O \equiv O'$.

N'importe quel vecteur en rotation par rapport à un axe perpendiculaire sa dérivée dans le temps est le produit vectoriel de sa vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et vecteur tournant:

$$\left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath'} = \dot{\omega}\,\vec{k} \wedge \vec{\imath'} = \dot{\omega}\,\vec{\jmath'}$$

$$\left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'} = \dot{\omega}\,\vec{k} \wedge \vec{\jmath'} = -\dot{\omega}\,\vec{\imath'}$$

$$\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'} = \dot{\omega}\,\vec{k} \wedge \vec{k'} = \vec{0}, puisque\ (\vec{k} \parallel \vec{k'})$$

La vitesse d'entrainement devient :

$$\overrightarrow{V_e} = x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\overrightarrow{V_e} = x'(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k'})$$

$$\overrightarrow{V_e} = (\vec{\omega} \wedge x'\vec{\imath'}) + (\vec{\omega} \wedge y'\vec{\jmath'}) + (\vec{\omega} \wedge z'\vec{k'})$$

$$\overrightarrow{V_e} = \vec{\omega} \wedge (x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'})$$

$$\overrightarrow{V_e} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Donc

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Pour l'accélération d'entrainement, Nous avons :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt}\right]_{\Re} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\imath'}$$

D'où

$$\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{\imath'}\right) + (\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt})$$

Par la suite,

$$\overrightarrow{\gamma_e} = x'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = x'[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{i'}\right) + (\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{i'}}{dt})] + y'[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{j'}\right) + (\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt})] + z'[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{k'}\right) + (\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})]$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = [\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge x'\overrightarrow{i'}\right) + (\vec{\omega} \wedge x'\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt})] + [\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge y'\overrightarrow{j'}\right) + (\vec{\omega} \wedge y'\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt})] + [\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge z'\overrightarrow{k'}\right) + (\vec{\omega} \wedge z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})]$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + (\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right))$$

Donc

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + (\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right))$$

Pour l'accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt})$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2(\frac{dx'}{dt}(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\imath'}) + \frac{dy'}{dt}(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\jmath'}) + \frac{dz'}{dt}(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{k'}))$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\,\vec{\omega} \wedge (\frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'})$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2(\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r})$$

II.8.Les applications et correction

1/

On considère le vecteur position d'un point M dans un repère R fixe :

$\vec{r}$ = $(6t^2 - 4t)\,\vec{\imath} - 3t^3\,\vec{\jmath} + 3\vec{k}$; le vecteur position de M dans le repère R' mobile est :

$\vec{r}'$= $(6t^2 + 3t)\,\vec{\imath'} - 3t^3\,\vec{\jmath'} + 3\vec{k'}$, on considère que R et R' sont parallèles.

1- Déterminer la vitesse absolue et la vitesse relative de M. en déduire la vitesse d'entrainement et la nature du mouvement de R' par rapport à R.
2- Déterminer l'accélération absolue, l'accélération relative, conclure.

Correction

1-La vitesse absolue $\vec{v_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} (12t-4)\vec{\imath} - 9\,t^2\,\vec{\jmath}$

La vitesse relative $\vec{v_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}'} = (12t-3)\vec{\imath'} - 9\,t^2\,\vec{\jmath'}$

-En déduire la vitesse d'entrainement

$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} \Rightarrow \vec{v_e} = \vec{v_a} - \vec{v_r}$; on sait que $\begin{cases} \vec{\imath} = \vec{\imath'} \\ \vec{\jmath} = \vec{\jmath'} \\ \vec{k} = \vec{k'} \end{cases}$ puisque (R // R')

Donc $\vec{v_e} = (12t-4)\vec{\imath} - 9\,t^2\,\vec{\jmath} - (12t-3)\vec{\imath'} - 9\,t^2\,\vec{\jmath'}$

$\vec{v_e} = -7\vec{\imath} = cst$

Alors le mouvement de R' par rapport à R est un mouvement rectiligne uniforme qui veut dire un mouvement relatif de translation puisque ($\vec{v_e} = cst$).

2-L'accélération absolue $\vec{\gamma_a} = \left.\frac{d\vec{v_a}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = 12\vec{\imath} - 18\,t\,\vec{\jmath}$

L'accélération relative $\vec{\gamma_r} = \left.\frac{d\vec{v_r}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}'} = 12\vec{\imath'} - 18\,t\,\vec{\jmath'}$

Conclusion $\vec{v_e} = -7\vec{\imath} \Rightarrow \vec{\gamma_r} = \frac{d\vec{v_e}}{dt} = \vec{0}$ puisque $\vec{v_e} = cst$,on conclue que l'accélération est invariante constante dans les deux repéres.

2/

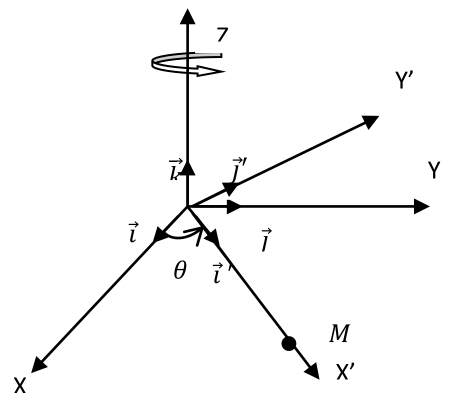
Soit un référentiel R(Oxy) fixe et un référentiel R'(Ox'y') mobile de bases respectives $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'})$; R' tourne par rapport $\dot{a}$ R autour de l'axe OZ perpendiculairement au plan Oxy avec une vitesse angulaire ω constante (fig 1). un point M est mobile sur l'axe Ox' suivant la loi $\overrightarrow{OM} = a.e^{\theta}.\vec{\imath'}$ avec a constante et $\theta = \omega t$.

1-Déterminer la vitesse absolue et l'accélération absolue de M de façon directe.

2-Déterminer la vitesse relative, la vitesse d'entrainement de M. En déduire sa vitesse absolue.

3-Déterminer l'accélération relative et l'accélération de d'entrainement et l'accélération de coriolis .En déduire son accélération absolue.

Correction



$\overrightarrow{OM} = a\, e^{\theta}\, \vec{i}\,'$; $\theta = \omega\, t \Rightarrow \overrightarrow{OM} = a\, e^{\omega\, t}\, \vec{i}\,'$

1- Détermination de facon directe la vitesse et l'accéleration

$$\vec{v_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \frac{d}{dt}[a\, e^{\omega\, t}\, \vec{i'}]_{\mathfrak{R}} = a\, \omega\, e^{\omega\, t}\, \vec{i'} + a\, e^{\omega\, t}\left.\frac{d\, \vec{i'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}}$$

On sait que $\left.\frac{d\, \vec{i'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \left.\frac{d\, \vec{i'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{i'} = \vec{0} + \dot{\theta}\, \vec{k} \wedge \vec{i'} = \dot{\theta}\, \vec{j'} = \omega \vec{j'}$

$$\vec{v_a} = a\omega\, e^{\omega\, t}(\vec{i'} + \vec{j'})$$

$$\vec{\gamma_a} = \left.\frac{d\vec{v_a}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \frac{d}{dt}[a\omega\, e^{\omega\, t}\left(\vec{i'} + \vec{j'}\right)]_{\mathfrak{R}} = a\omega^2\, e^{\omega\, t}\left(\vec{i'} + \vec{j'}\right) + a\omega\, e^{\omega\, t}(\left.\frac{d\, \vec{i'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} + \left.\frac{d\, \vec{j'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}})$$

On sait que $\left.\frac{d\, \vec{i'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \omega \vec{j'}$ et $\left.\frac{d\, \vec{j'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = -\omega \vec{i'}$

$$\vec{\gamma_a} = a\omega^2\, e^{\omega\, t}\left(\vec{i'} + \vec{j'}\right) + a\omega\, e^{\omega\, t}\left(\omega \vec{j'} \quad - \omega \vec{i'}\right) \Rightarrow \vec{\gamma_a} = 2a\omega^2\, e^{\omega\, t} \vec{j'}$$

2- Détermination des vitesses relatives et d'entrainement

$$\vec{v_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}'} = a\, \omega\, e^{\omega\, t}\, \vec{i'}$$

$$\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\, \vec{k} \wedge a\;\; e^{\omega\, t}\, \vec{i'} = a\, \omega\, e^{\omega\, t}\, \vec{j'}$$

$$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} = a\omega\, e^{\omega\, t}(\vec{i'} + \vec{j'})$$

3- Détermination des accélérations relatives ,d'entrainement et de coriolis

$$\vec{\gamma_r} = \left.\frac{d\vec{v_r}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}'} = a\omega^2\, e^{\omega\, t} \vec{i'}$$

$$\vec{\gamma_c} = 2\, \vec{\Omega} \wedge \vec{v_r} = 2\left(\omega\, \vec{k} \wedge a\, \omega\;\; e^{\omega\, t}\, \vec{i'}\right) = 2a\omega^2\, e^{\omega\, t} \vec{j'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \vec{0} + \vec{0} + \omega\,\vec{k} \wedge (\omega\,\vec{k} \wedge a\ \ e^{\omega\,t}\,\vec{i'})$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \omega\,\vec{k} \wedge \left(\ a\omega\ e^{\omega\,t}\vec{j'}\ \right) = -a\omega^2\ e^{\omega\,t}\vec{i'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_c} + \overrightarrow{\gamma_e} = 2a\omega^2\ e^{\omega\,t}\vec{j'}$$

CHAPITRE 3 : DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

La motion attire notre attention. Le mouvement lui-même peut être beau, nous faisant admirer les forces nécessaires pour réaliser un mouvement spectaculaire, comme celui d'un dauphin sautant de l'eau, ou un saut à la perche, ou le vol d'un oiseau, ou l'orbite d'un satellite. L'étude du mouvement est cinématique, mais la cinématique ne décrit que la façon dont les objets se déplacent — leur vitesse et leur accélération. La dynamique considère les forces qui affectent le mouvement des objets et des systèmes en mouvement. Les lois du mouvement de Newton sont la base de la dynamique. Ces lois sont un exemple de l'étendue et de la simplicité des principes sous lesquels fonctionne la nature. Ce sont aussi des lois universelles en ce sens qu'elles s'appliquent à des situations similaires sur Terre comme dans l'espace.

I. *Les objectifs spécifiques du chapitre*

- ☺ L'objet de la dynamique du point est l'étude du mouvement d'un point basant sur les causes (les forces) qui lui donnent naissance.
- ☺ Savoir faire le bilan des forces appliquées sur un système préalablement défini.
- ☺ Savoir résoudre un problème de dynamique c'est-à-dire la méthode de résolution.
- ☺ Connaitre le centre de gravité et d'équilibre d'un système composée
- ☺ Savoir calculer le moment d'inertie de n'importe quel objet.
- ☺ Connaitre d'utiliser le théorème des moments cinétique pour résolu un problème dynamique.

II. *Les prérequis*

- 🕮 Savoir projeter un vecteur sur une base donnée.
- 🕮 Savoir différencier entre les quantités scalaires et vectorielles qui représentent les types de forces.
- 🕮 Connaitre les notions de base (vitesse linéaire, vitesse angulaire)
- 🕮 Avoir assimilé le chapitre sur la cinématique du point.

PART I : DYNAMIQUE DU MOUVEMENT

I. Introduction :

Dans le chapitre précédent, consacré à la cinématique, nous avons étudié le mouvement des corps sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement. Dans cette partie, nous abordons **la dynamique** qui **est la partie de la mécanique qui traite des causes du mouvement.** Elle permet de déterminer les causes d'un mouvement connu et de prédire le mouvement pour des causes données. En somme, nous introduisons la notion de force, qui fait bouger une particule ou un point matériel.

I.1.Définitions :

a) L'inertie:

L'inertie est la résistance qu'un corps oppose au changement de son mouvement. Elle rend difficile la mise en mouvement d'un corps.

b) Principe d'inertie :

Le principe d'inertie déjà énoncé par Galilée se formule comme suit : si un point matériel n'est soumis à aucune force extérieure, il conservera son état naturel. S'il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme ou il est au repos, il conservera son mouvement.

c) Référentiels galiléens

Si le principe d'inertie est vérifié dans un référentiel, il est dit référentiel galiléen. Parmi ces référentiels galiléens, nous citerons :

- Le référentiel de Kepler : L'origine de ce référentiel est le centre d'inertie du Soleil et ses trois axes principaux sont orientés vers trois étoiles fixes.
- Le référentiel de Copernic : L'origine de ce référentiel est le centre d'inertie du système solaire.

- Le référentiel géocentrique : L'origine de ce référentiel est le centre d'inertie de la terre Et ses trois axes sont orientés vers trois étoiles fixes.

Par exemple le repère de la terre n'est pas réellement galiléen à cause de son mouvement orbital et son mouvement autour du soleil et de sa propre rotation autour de son axe. Mais dans la plus grande majorité des expériences, on le considère comme étant un repère galiléen car on fait des études avec des temps faibles.

I.2. Notion de masse, de la quantité de mouvement et de force

a) Notion de masse :

On sait tous que plus la masse d'un corps est grande, plus il est difficile de changer son vecteur vitesse ou changer son mouvement (sa direction). **Ainsi, on peut considérer la masse comme une mesure de l'inertie.** ''Il est facile pour une personne de faire bouger une table que de faire bouger une armoire''.

La masse est une grandeur physique scalaire caractérisant la résistance d'un corps à subir une modification de son mouvement et elle représente l'inertie du corps.

b) Notion de la quantité de mouvement :

On a vu précédemment que le mouvement d'un corps peut être influencé par la masse du mobile. Le concept de **quantité de mouvement** fournit une distinction quantitative entre les mouvements de deux particules de même vitesse mais de masses différentes.

La quantité de mouvement, notée$\vec{P}$, d'un point matériel est une grandeur vectorielle permettant de caractérisée son mouvement. Elle définit comme étant le produit de sa masse et de son vecteur vitesse.

$$\vec{P} = m\,\vec{v}$$

Ainsi, la quantité de mouvement est un vecteur ayant la même direction et le même sens que la vitesse et a pour unité SI le $kg.m/s$.

Si la quantité de mouvement change en fonction du temps, on définit ce qu'on appelle l'impulsion : $\overrightarrow{dP}$

c) Notion de force

Un point matériel est en mouvement à cause des interactions entre la particule et son environnement qui les subits. Ces interactions sont appelées forces.

La force, notée $\vec{F}$, est une grandeur vectorielle permettant de produire le mouvement d'un point matériel ou sa déformation. Elle traduit une variation de la quantité de mouvement. Le vecteur force s'écrit alors,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

La dérivée du vecteur de la quantité de mouvement donnée par la relation ( ) s'écrit :

$$\vec{P} = m\,\vec{v} \Leftrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dans la mécanique newtonienne, la masse est une grandeur scalaire constante ($\frac{dm}{dt} = 0$). La relation () devient alors,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

En identifiant la dérivée du vecteur de la vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps comme étant le vecteur accélération$\vec{\gamma}$, relation ( ) s'écrit :

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{\gamma}$$

Cas particulière : $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ est constante, c'est-à-dire le mouvement est rectiligne uniforme

I.3. Les principes de la dynamique du point ou les lois de Newton

Les trois lois de Newton sont à la base de la mécanique classique. Ces lois ont été postulées sans démonstration mais en accord avec les expériences (ils sont valables dans n'importe quel système galiléen).

- ✓ $1^{ière}$ lois de newton : Le principe d'inertie :

Si un objet isolé et au repos ou en mouvement rectiligne uniforme (conserve son état) alors $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$.

- ✓ $2^{ième}$ lois de Newton : Le principe fondamental de la dynamique :

Dans un référentiel galiléen, l'effet d'une même force est senti plus ou moins grand selon l'inertie du point matériel, c'est-à-dire, selon sa masse, d'où la relation fondamentale de la dynamique qui s'énonce « Si un point matériel de masse m possède une accélération $\vec{\gamma}$, il est soumis à une force proportionnelle à son accélération :

$$\overrightarrow{F_{ext}} = m\,\vec{\gamma}$$

- ✓ $3^{ième}$ lois de Newton : Principe d'action et de la réaction :

Lorsque deux corps sont en interaction, ils exercent l'un sur l'autre des forces opposées en sens mais égale en intensité et en direction.

Dans l'exemple de figure, la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$, exercée par 1 sur 2, est égale en module et est opposée en sens à la force $\overrightarrow{F_{2/1}}$, exercée par 2 sur 1.

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$$

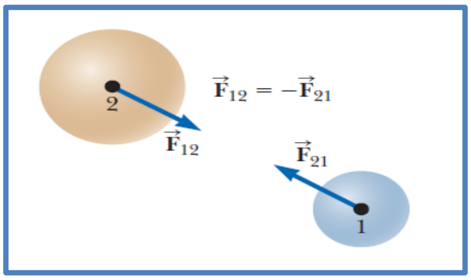


Figure 27 : Principe d'action et réaction

Remarque :

- ➢ La force exercée sur un corps est appelée action et la force exercée sur l'autre corps est appelée réaction.
- ➢ Toute force est associée à une réaction.
- ➢ Les forces sont de même nature. Il ne faut pas confondre avec la force du pois et la force de réaction (ces deux forces ne sont pas de même nature).

I.4. Forces fondamentales

Il est bien observé que plusieurs types de forces déterminent les mouvements des différents objets de la nature. Nous citerons quelques forces fondamentales :

I.4.1. Les forces à distance

a) Force gravitationnelle

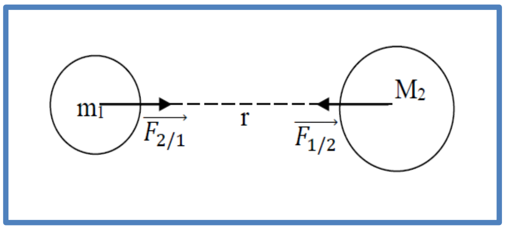


Figure 28 : Force entre deux masses

La force gravitationnelle s'exerce entre deux masses m_1 et m_2 placées à une distance r l'une de l'autre (figure), c'est une force à distance (une force attractive). Elle est de la forme :

$$\overrightarrow{F_g} = G\frac{m_1\ m_2}{r^2}\ \vec{u}$$

Avec $G = 6.726\,.\,10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$ est la constante de gravitation universelle

La loi de gravitation obéit au principe de superposition : s'il y plus de deux corps, il faut considérer la présence de toutes les forces d'attraction exercées sur les corps.

b) Force coulombienne

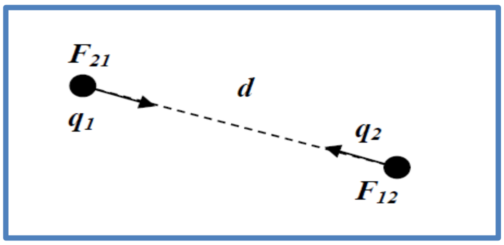


Figure 29 : Force entre deux charges

La force coulombienne s'exerce entre deux charges ponctuelles q_1 *et* q_2 séparées l'une de l'autre par une distance $\boldsymbol{d}$, c'est une force à distance (une force électrique). Elle est de la forme :

$$\vec{F} = k\frac{q_1 \; q_2}{d^2} \; \vec{u}$$

K, la constante électrique égale à $k = 9.10^9 \; [Nm^2/C^2]$

Cette force est une force d'attraction si les charges sont de signe opposé et de répulsion si elles sont de même signe.

Cette force est responsable à la stabilité des électrons autours des noyaux et c'est elle qui assure la cohésion de la matière solide.

c) Forces faibles et forces fortes

Les forces faibles et forces fortes sont des forces microscopiques. Les premiers types de force agissent à courte distance, elle s'observe dans les interactions entre la matière et neutrinos. Par contre, les deuxièmes types de forces sont des forces de très courte portée, elle assure la stabilité du noyau.

I.4.2. Les forces de contact

Les forces de contact sont des forces macroscopiques qui se manifestent lors du contact de deux corps.

a) Réaction d'un support

On considère un corps solide posé sur une surface horizontale.

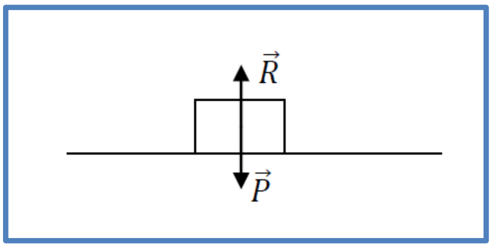


Figure 30 :Force de rappels

La force de réaction $\vec{R}$ est l'action du support sur lequel repose le système et qui l'empêche de s'enfoncer vers le bas sous l'action de son poids. Cette force est répartie sur toute la surface de contact support objet. En absence de glissement ou de frottement, la réaction est perpendiculaire au déplacement.

b) Forces de frottement solide

On distingue les forces de frottements solides, statiques et dynamiques :

En présence de frottement, la réaction n'est pas perpendiculaire au déplacement (figure 4). Cette réaction se décompose en une composante $\overrightarrow{R_N}$ normale aux surfaces en contact, et une composante $\overrightarrow{R_T}$ tangentielle appelée force de frottement. Cette force de frottement, est toujours opposée à celui du mouvement de la masse m. (figure 5)

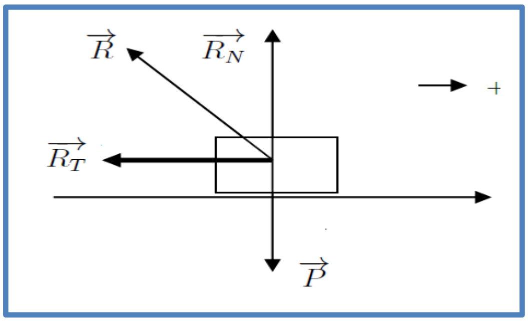


Figure 31 : Force de frottement

i. Forces de frottement statiques

Les lois du frottement montrent qu'en absence de glissement (absence de frottement) que le rapport de la composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ à la composante normale $\overrightarrow{R_N}$ ne dépasse pas une certaine valeur appelée coefficient de frottement statique noté μ_s .

$$\left|\overrightarrow{R_T}\right| \leq \mu_s \left|\overrightarrow{R_N}\right|$$

ii. Forces de frottement dynamique

Lorsqu'il y a glissement (présence de frottement), un coefficient de frottement dynamique noté μ_d apparait comme étant le rapport de de la composante tangentielle et de la composante normale :

$$\left|\overrightarrow{R_T}\right| = \mu_d \left|\overrightarrow{R_N}\right|$$

Notons que le coefficient de frottement dynamique est généralement inférieur au coefficient de frottement statique $\mu_d \leq \mu_s$.

- Résumé:

Le contact physique entre un corps solide et un support solide génère une force de contact $\vec{R}$ qui peut se décomposer en deux forces : une force normale $\overrightarrow{R_N}$ qui représente la réaction du support et une force de frottement $\overrightarrow{R_T}$:

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$$

L'intensité de la force de frottement solide est toujours proportionnelle à la force normale :

$$(R_T)_{s,d} = \mu_{s,d} R_N$$

c) Forces de frottement dans les fluides

Quand un corps solide se déplace dans un fluide (un gaz ou liquide), il subit de la part du fluide des forces de frottements. Nous distinguons deux types de forces de frottements visqueux :

- Forces de frottements visqueux à faible vitesse de type :

$$\overrightarrow{F_f} = -K\eta\, \vec{v}$$

Où η est la viscosité du milieu, elle se mesure en Poiseuille et K une constante qui dépend de la géométrie du système. Dans le cas particulier d'une sphère de rayon R se déplaçant dans un milieu visqueux, la force de viscosité devient :

$$\overrightarrow{F_f} = -6\pi\, R\, \eta\, \vec{v}$$

- Forces de frottements visqueux à grande vitesse :

Dans le cas où un corps se déplace avec une grande vitesse dans un milieu fluide, la force de frottement prend la forme :

$$\overrightarrow{F_f} = -K\eta\, \vec{v}^2$$

I.4.3. Force de rappel

Considérons une masse m attachée à l'extrémité libre d'un ressort de longueur à videl_0. Une fois allongée par rapport à sa longueur à vide (ou compressé), le ressort exerce une force de rappel $\vec{T}$ d'intensité proportionnelle à son allongement. L'expression de cette force de rappel est donnée par :

$$\vec{T} = -k\,\Delta l\,\vec{u}$$

k est la raideur, c'est une constante positive caractéristique du ressort. Elle s'exprime en Nm^{-1}.

$\Delta l = l - l_0$ est l'allongement du ressort avec l la longueur totale du ressort allongé (ou comprimé).

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire orienté suivant le sens de l'allongement du ressort.

Cette expression est dite loi de Hooke. Il est clair que dans le cas :

D'un allongement $\Delta l = l - l_0 > 0$

D'une compression $\Delta l = l - l_0 < 0$.

Le signe " – " dans cette relation signifie que la force de tension du ressort est une force de rappel et qu'elle s'oppose à la déformation.

D'après **la loi de Hooke :** la constante de raideur indique l'intensité de la force nécessaire pour allonger ou comprimer le ressort d'une unité de longueur. Elle fait intervenir les caractéristiques physiques du ressort (sa longueur, son épaisseur, le type de matériaux).

Matériaux ''dur'' $\longrightarrow k$ élevé $\longrightarrow$ il faut une force plus grand pour obtenir le même allongement.

La loi de Hooke n'est valable que pour des ressorts supposés parfaitement élastique, c'est-à-dire, qu'après une déformation, ils reprennent leur forme et longueur initiales.

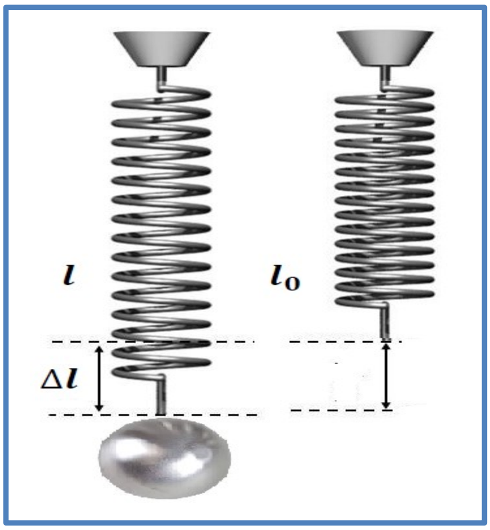


Figure 32 : Force de rappel de ressort

I.5. Forces d'inertie ou pseudo forces

Dans ce cas nous étudions la dynamique du point par rapport à un repère non-galiléen. On peut définir un référentiel non galiléen par l'exemple suivant : Un corps est sur un plateau d'un camion en mouvement rectiligne uniforme. Le corps est au repos si le camion garde son mouvement rectiligne uniforme. Si le plateau est lisse et le camion fait un virage, le corps glisse. Donc : Le camion n'a pas conservé son mouvement rectiligne uniforme car il est devenu en mouvement curviligne (virage) et le corps n'a pas conservé son repos d'où le principe d'inertie n'est pas appliqué sur le camion.

On sait que pour un repère galiléen :

$$\vec{F} = m\overrightarrow{\gamma_a} = m\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\overrightarrow{\gamma_a}$ *et* $\overrightarrow{v_a}$ sont l'accélération et la vitesse absolues.

Pour un repère non galiléen (relatif) :

$$\vec{F} = m\overrightarrow{\gamma_r} = m\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}$$

$\overrightarrow{\gamma_r}$ *et* $\overrightarrow{v_r}$ sont l'accélération est la vitesse relatives tel que :

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \overrightarrow{\gamma_a} - \overrightarrow{\gamma_e} - \overrightarrow{\gamma_c}$$

$\overrightarrow{\gamma_e}$ *et* $\overrightarrow{\gamma_c}$ sont l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis respectivement.

D'où :

$$m(\overrightarrow{\gamma_a} - \overrightarrow{\gamma_e} - \overrightarrow{\gamma_c}) = m\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}$$

$$m\overrightarrow{\gamma_a} = m\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} + m\,\overrightarrow{\gamma_e} + m\,\overrightarrow{\gamma_c}$$

Donc :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_c}$$

Avec $\overrightarrow{F_e} = m\,\overrightarrow{\gamma_e}$ et $\overrightarrow{F_c} = m\,\overrightarrow{\gamma_c}$

La loi de la dynamique (P.F.D) peut être appliquée dans un référentiel non galiléen à condition d'ajouter la force d'entrainement et la force de Coriolis.

$$m\,\overrightarrow{\gamma_r} = \sum \vec{F} + \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_c}$$

- Résoudre un problème de la dynamique

On appelle un système mécanique ou système matériel un ensemble d'objets, pouvant être liés entre eux ou non, rigides ou déformables, massiques ou de masse négligeable. Ainsi on peut trouver dans un système mécanique : un ou plusieurs corps (assimilés à des points matériels), sur des supports solides ou dans des milieux fluides.

Ces corps peuvent être reliés par des fils inextensibles et de masse négligeable qui passent par des poulies également de masse négligeable ou non. Ils peuvent aussi être reliés par des fils extensibles (ressorts) de masse négligeable.

D'une manière générale, résoudre un problème de dynamique revient à étudier un système mécanique. Cette étude consiste à prévoir le mouvement de ce système via la connaissance préalable des forces qui s'exercent sur ses différentes parties, ce qui revient à utiliser le PFD.

Pour résoudre en générale un problème de la dynamique, il convient de procéder les démarches suivant :

1. La définition du système, dans la plus part des cas le système est toujours formé par un point matériel, (données, inconnues et conditions initiales).
2. La nature du référentiel $\Re$ par rapport auquel on étudie le mouvement (galiléen ou non-galiléen) mais dans notre cas toute les référentiels sont considérés comme référentiels galiléens. (faire un schéma)
3. Le bilan des forces appliquées au point matériel et les représenter sur le schéma.
4. Le choix du système de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques, etc.), On prendra notamment la base de Frénet ou polaire pour les mouvements courbes, qui est approprié au cas étudié.
5. L'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique (P.F.D)
6. La projection de la (P.F.D) sur la base de coordonné choisie
7. L'intégration des équations différentielles en tenant compte des conditions initiales.
8. Résoudre le système d'équations différentielles ou algébriques pour obtenir leur solution générale et réponds aux questions demandées.

I.6. Les applications et correction

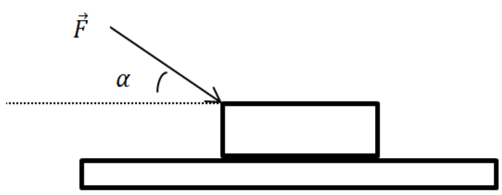
1/

Un point matériel M de masse m est poussè, sur plan horizontal, avec une force$|\vec{F}|$ faisant un angle α avec le plan (figure au-dessous). En appliquant le principe fondamental de la dynamique P.F.D sur la masse m.

Déterminer la accelerartion de M dans les deux cas suivants.

1. Le plan horizontale ne presente pas des frottement.

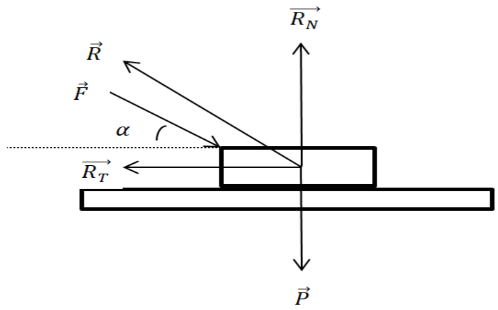
2. Le plan horizontale presente des frottement.



Correction

1- Détermination de l'accéleration snas frottement

D'après le bilan des forces sur la figure ,on appliquant P.F.D



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

On choisi le systéme cartisiénne (Ox,Oy)

Par projection suivant l'axe (Ox)

$$F_x = m\gamma_x \Rightarrow \|\vec{F}\| \cos\alpha = m\gamma_x \dots\dots (1)$$

Par projection suivant l'axe (Oy)

$$R - P - F_y = 0 \Rightarrow R - mg - \|\vec{F}\| \sin\alpha = 0 \dots\dots (2)$$

D'apré l'équation (1) l'accélération $\|\overrightarrow{\gamma_x}\| = \frac{\|\vec{F}\| \cos\alpha}{m}$

2- Détermination de l'accélération avec frottement

On appliquant le P.F.D $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F} = m\vec{\gamma}$

Par projection suivant l'axe (Ox)

$$-R_T + F_x = m\gamma_x \Rightarrow -R_T + \|\vec{F}\| \cos\alpha = m\gamma_x \dots\dots (1)$$

Par projection suivant l'axe (Oy)

$$R_N - P - F_y = 0 \Rightarrow R_N - mg - \|\vec{F}\| \sin\alpha = 0 \dots\dots (2)$$

Sachant que le coefficient de frottement dynamique μ_d est donner par la relation

$$\mu_d = \frac{\|\overrightarrow{R_T}\|}{\|\overrightarrow{R_N}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_d \|\overrightarrow{R_N}\| \dots\dots\dots\dots (A)$$

D'après l'équation (2) $R_N = mg + \|\vec{F}\| \sin\alpha \dots\dots (B)$

On injecton l'équation (A) dans (B) on trouve $R_T = \mu_d R_N = \mu_d(mg + \|\vec{F}\| \sin\alpha)$

Donc l'expression de l'accéleration dans ce cas est donner à partir de l'équation (1)

$$-R_T + \|\vec{F}\| \cos\alpha = m\gamma_x \Rightarrow \|\vec{F}\| \cos\alpha - \mu_d(mg + \|\vec{F}\| \sin\alpha) = m\gamma$$

$$\gamma = \frac{\|\vec{F}\|}{m} \cos\alpha - \mu_d\left(g + \frac{\|\vec{F}\|}{m} \sin\alpha\right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{\|\vec{F}\|}{m}(\cos\alpha - \mu_d \sin\alpha) - \mu_d\, g$$

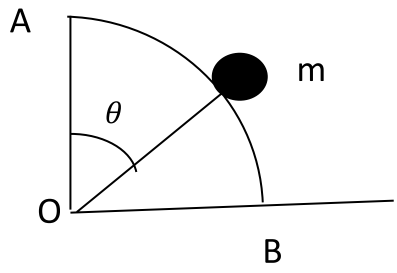
2/

Une masse ponctuelle m se déplace sans frottement sur un dôme sphérique de rayon a (figure Ci-dessous).

1. En utilisant le principe fondamentale de la dynamique (P.F.D) et le système des coordonnées polaires, montrer que :

$\frac{d}{dt}|\vec{v}| = g\sin\theta \dots\dots\dots(1)$

$\frac{|\vec{v}|^2}{a} = -\frac{|\vec{R}|}{m} + g\cos\theta \dots\dots\dots(2)$



avec $|\vec{v}|$ est le module de la vitesse de m, $|\vec{R}|$ est le module la force de contact entre m est la surface.

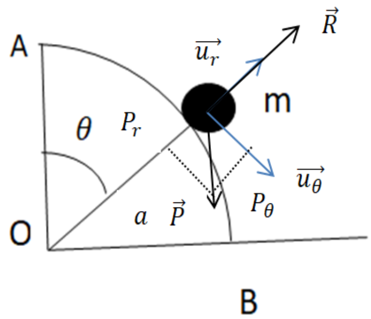
2. Trouver $|\vec{v}|$ et , $|\vec{R}|$ en fonction de $\theta, g\ et\ m$.

3. Avec quel angle la petite boule quitte la surface circulaire.

Correction

1. D'après le bilan des forces sur la figure ,on appliquant P.F.D

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$



On choisi le systéme de coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

Par projection suivant l'axe $(\vec{u}_r)$

$P_r + R = m\gamma_r \Rightarrow -m\,g\ \cos\theta = m\gamma_r \dots\dots(1)$

Par projection suivant l'axe $(\vec{u}_\theta)$

$P_\theta = m\gamma_\theta \Rightarrow mg\sin\theta = m\gamma_\theta \dots\dots(2)$

On sait que l'expression de l'accélération en coordonnées polaires est :

$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta \Rightarrow \begin{cases} \gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$

Sachant que d'après les données $r = a \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$,alors

$$\begin{cases} \gamma_r = -a\dot{\theta}^2 \\ \gamma_\theta = a\,\ddot{\theta} \end{cases}$$

L'expression des équations deviennent

$P_r + R = m\gamma_r \Rightarrow -m\,g\,\cos\theta = -ma\dot{\theta}^2 \ldots\ldots (3)$

$P_\theta = m\gamma_\theta \Rightarrow mg\sin\theta = ma\,\ddot{\theta} \ldots\ldots (4)$

On sait que la relation entre la vitesse linéaire et angulaire est donner par :

$v = a\,\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a\ddot{\theta}$

Par la suite l'équation (3) et (4) donne

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

$\frac{v^2}{a} = -\frac{|\vec{R}|}{m} + g\cos\theta$ C.Q.F.D

2. L'expression de la vitesse et la réaction
   - $v = a\,\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = a\,\frac{d\theta}{v}$

On sait que $\frac{dv}{dt} = g\sin\theta \Rightarrow {dv}\Big/{a\,\frac{d\theta}{v}} = g\sin\theta \Leftrightarrow v.dv = a\,g\sin\theta\;d\theta$

$$\int v.dv = \int a\,g\sin\theta\;d\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} = -ag\cos\theta + C \ldots\ldots\ldots (5)$$

D'après les conditions initiales à t=0

$v_A = 0\;\; et\;\theta = 0$; en remplaçant dans l'équation (5)

$0 = -ga\cos 0 + C \Rightarrow C = ag$

L'expression de la vitesse $v^2 = 2ag(1-\cos\theta) \Rightarrow v = \sqrt{2ag(1-\cos\theta)}$

- D'après l'équation $\frac{v^2}{a} = -\frac{|\vec{R}|}{m} + g\cos\theta \Rightarrow R = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{a}$

$$R = mg(3\cos\theta - 2)$$

3. L'angle qui pousse la boule de quitter la surface

La boule quitte la surface circulaire quand la réaction s'annulle $R = 0$

D'où

$$R = mg(3\cos\theta - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} mg \neq 0 \\ 3\cos\theta - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48°$$

II. Introduction :

L'étude complet des systèmes dynamiques nécessite de comprendre le concept fondamental du moment. Soit le moment d'inertie, qui est un outil de description fondamental du solide (ou un point matériels). Cette grandeur est déterminée indépendamment du mouvement : c'est un paramètre qui influe sur le mouvement du solide, ou le moment d'une force qui est la tendance de la force à produire une rotation sur n'importe quel axe.

II.1. Moment d'une force

Le moment d'une force par rapport à un point, noté $\overrightarrow{M_{/0}}$, est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point. Le moment d'une force par rapport à un point O quelconque est un produit vectoriel entre la force $\vec{F}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{M_{/0}} \approx \overrightarrow{M_{\vec{F}/_0}} = \vec{F} \wedge \overrightarrow{OM}$$

L'unité de moment en SI est $N.m$

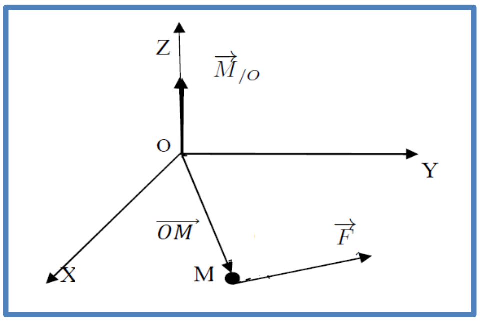


Figure 33 : Moment d'une force

II.2. Théorème des moment d'une force

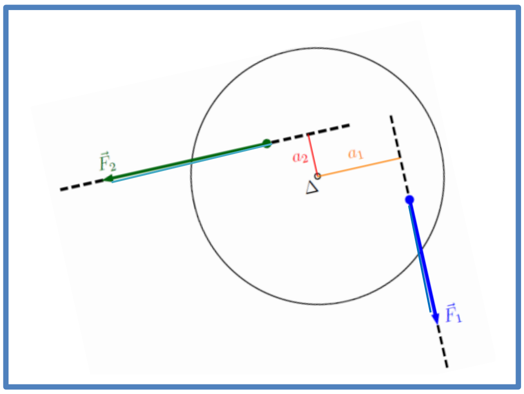


Figure 34 : Théoréme des moment d'une force

Si une force fait tourner un objet dans le sens trigonométrique positif, son moment est un moment positif : $M_\Delta(\vec{F}) = F.a$

Si une force fait tourner un objet dans le sens trigonométrique négatif, son moment est un moment négatif : $M_\Delta(\vec{F}) = -F.a$

Les deux forces entrainent le solide dans des rotations de sens opposés, pour distinguer ces cas. Dans l'exemple de la figure 2 :

$$M_- \approx M_\Delta(\vec{F}_1) = -F_1.a_1 \quad \text{(Moment négatif)}$$

$$M_+ \approx M_\Delta(\vec{F}_2) = F_2.a_2 \quad \text{(Moment positif)}$$

Le solide en rotation est en équilibre lorsque les deux moments sont égaux :

$$M_+ = M_-$$

- Théorème des moments

Un solide qui peut tourner autour d'un axe est en équilibre de rotation si et seulement si la somme des moments de toutes les forces qui s'appliquent au solide vaut nulle.

$$\text{équilibre de rotation} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} M_\Delta(\vec{F}_i) = 0$$

- Équilibre des corps rigides

Un point matériel dans un référentiel galiléen R est à l'équilibre si les conditions au-dessous sont vérifiées.

$$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = \vec{0} \end{cases}$$

Un corps rigide, à la différence d'un point matériel peut rouler sur lui-même (même si $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$). Donc, un corps rigide dans un référentiel galiléen R en rotation est à l'équilibre si les conditions au-dessous sont vérifiées.

$$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{/0}} = \vec{0} \Leftrightarrow M_+ = M_- \\ \vec{v}(t=0) = \vec{0} \end{cases}$$

II.3. Centre d'inertie

Le Centre d'inertie d'un système de points matériels est le centre de gravité, noté G, d'un système de points matériels. Il a été défini au début par le physicien « *Archimède* ».

Pour avoir la relation donnant le point centre d'inertie d'un système quelconque *ou Barycentre*, étudions l'équilibre du système présenté dans la figure suivante :

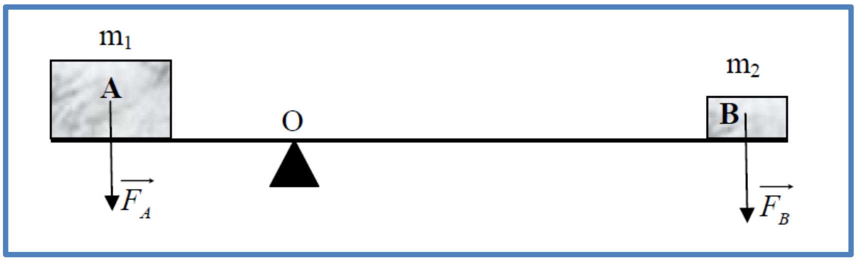


Figure 35 : Centre d'inertie entre deux masses

Pour que le système soit en équilibre il faut que la somme des moments des forces par rapport à O soit nulle :

$$\sum_{i=1}^{N} M_{\Delta}(\vec{F_i}) = 0 \approx \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_{\vec{F_i}/0}} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{M_{\vec{F}_A/0}} + \overrightarrow{M_{\vec{F}_B/0}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge m_2\vec{g} = \vec{0}$

$\Rightarrow m_1\overrightarrow{OA} \wedge \vec{g} + m_2\overrightarrow{OB} \wedge \vec{g} = \vec{0}$

$\Rightarrow (m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}) \wedge \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

Les mathématiciens ont généralisé cette égalité pour un système quelconque représenté par la figure ci-dessous :

$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

$\Rightarrow \sum_{i} m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

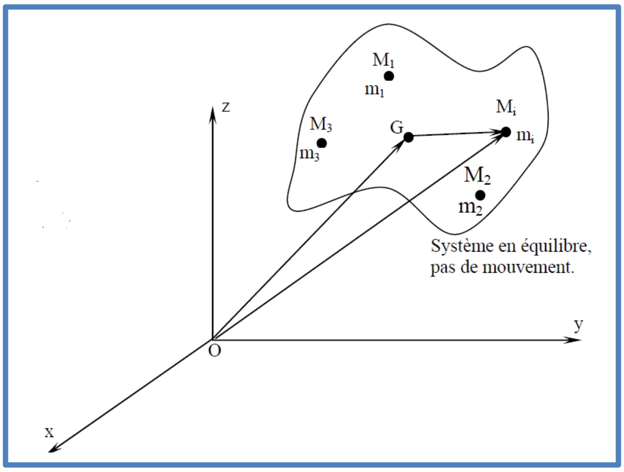


Figure 36 : Centre d'inertie d'un systéme de masse

Si O est l'origine du référentiel d'étude, alors

$$\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}$$

Ou encore,

$$\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}$$

Donc,
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$

D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

D'où

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i}}{M}$$

M: représente la masse totale du système en équilibre.

Cette dernière relation donne le centre d'inertie d'un système constitué de masses m_i situées aux points M_i. Si le système forme un milieu continu, la somme devient intégrale, et par conséquent, la relation précédente deviendra :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_M \overrightarrow{OM}\, dm$$

L'intégrale est triple parce que la masse est répartie en volume, trois dimensions.

- Coordonnées du centre de masse : Elles sont immédiates à trouver, à partir de la formulation précédente : pour un système continu S, on aura :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int x\, dm \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int y\, dm \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int z\, dm \end{cases}$$

II.4. Moment d'inertie

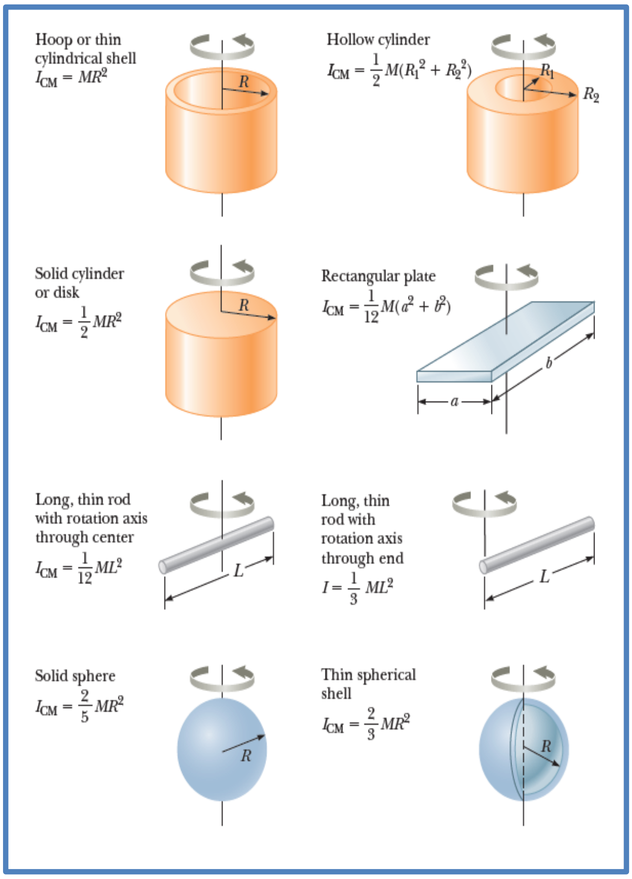


Figure 37 : Les moment d'inertie des différent forme

Le moment d'inertie, noté $J_{/\Delta}$est une grandeur physique qui caractérise la géométrie des masses d'un solide en rotation autour d'un axe Δ. Si cet axe de rotation passe par le centre de gravité des corps géométriques figure (36), leurs moments d'inerties sont :

- Un disque de masse m et de rayon R

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m\, R^2$$

- Une sphère pleine de masse m et de rayon R

$$J_{/\Delta} = \frac{2}{5} m\, R^2$$

- Un cylindre plein de masse m et de rayon R

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m\, R^2$$

- Un cylindre creux de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2} m\, (R_1^2 + R_2^2)$$

- Une barre homogène de masse m et de longueur l

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} m\, l^2$$

Généralité : Moment d'inertie par rapport à un axe (Δ)

Le moment d'inertie $J_{/\Delta}$, par rapport à un axe Δ, d'un point matériel de masse m située à une distance r de Δ est :

$$J_{/\Delta} = m\, r^2$$

Un système de N points matériels (cas discontinué) de masses m_i , distants de r_i de l'axe Δ, aura pour moment d'inertie par rapport à Δ :

$$J_{/\Delta} = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2$$

Dans le cas d'un corps solide constitué d'une infinité de points matériels (cas continué), nous passerons à la limite suivante :

$$J_{/\Delta} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2 = \int r^2\, dm$$

- Exemple 1 : le moment d'inertie d'une sphère

Le moment d'inertie d'une sphère homogène de masse m, de masse volumique ρ. Le moment d'inertie par rapport à tout axe passant par le centre

Méthode 1 : On utilise la symétrie de la sphère comme :

$J_{ox} = J_{oy} = J_{oz} = J \quad ou\, J = \int r^2\, dm$

$$3J = \rho \int_V (x^2 + y^2)dV + \rho \int_V (z^2 + y^2)dV + \rho \int_V (x^2 + z^2)dV$$

$3J = \rho \int_V 2(x^2 + y^2 + z^2)dV = 2\,\rho \int_V r^2\, dV$, r est la distance du point M à l'origine.

$3J = 2\,\rho \int_V r^2\, dV$, On sait que $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, donc

$3J = 2\rho \int_0^R r^2 r^2\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\rho \int_0^R r^4\, dr \times 2 \times 2\pi$, d'où

$3J = 2\rho \int_0^R r^4\, dr \times 4\pi \Rightarrow 3J = 2\rho \times 4\pi \times \frac{R^5}{5}$

Avec $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, d'où $3J = 2\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times 4\pi \times \frac{R^5}{5}$

On obtient donc $J = \frac{2}{5}\, m\, R^2$ C.Q.F.D

Méthode 2 : Le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité et cet axe est l'axe (0Z)

$J = \rho \int_V (x^2 + y^2)dV$,

On utilise le système de coordonnées sphérique :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \text{, ou } \begin{cases} dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr\, d\varphi \\ x^2 + y^2 = r^2 sin^2\,\theta \end{cases}$$

$$J = \rho \int_0^R r^4\, dr + \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \Rightarrow J = \rho \times \frac{R^5}{5} \times 2\pi \times \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$
$$= \frac{2}{5}\rho\pi R^5 \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$

Maintenant on s'intéresse pour calculer $\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = ?$

On sait que $\sin\theta\, d\theta = -dcos\theta$ et d'autre part $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, donc

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\ d\theta = -\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) d\cos\theta$$

Si on pose que $x = \cos\theta$ alors les bornes sont : $\cos(0) = 1$ $et\ \cos(\pi) = -1$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\ d\theta = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \frac{4}{3}$$

On obtient finalement

$J = \frac{2}{5}\pi\ \rho R^5 \frac{4}{3}$ On sait que $\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ donc $J = \frac{2}{5}\ m\ R^2$ C.Q.F.D

- Exemple 2 : le moment d'inertie d'un cylindre

Le moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à l'axe (OZ)

$J = J_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV$, on sait que $dV = r\ dr\ d\theta\ dz$

D'où $J = \rho \int_0^R r^3\, dr\ \int_0^{2\pi} d\theta \int_{h/2}^{-h/2} dz\ \Rightarrow J = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi\ h$, on sait que $\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$

On obtient finalement $J = \frac{1}{2}\ m\ R^2$ C.Q.F.D

II.5. Théorème d'Huygens

Si l'axe de rotation ne passe pas par le centre de gravité des corps géométriques, on appliquera alors le théorème de Huygens (figure 37)

$$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + m\ d^2$$

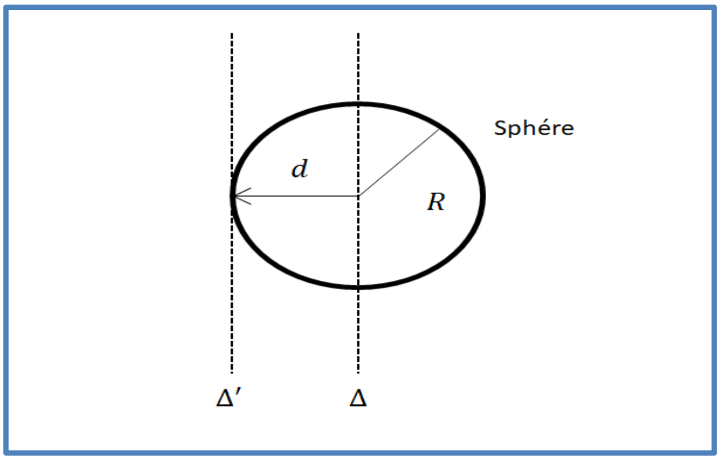


Figure 38 : Théoréme de Huygens

Ou Δ' et Δ sont respectivement les axes de rotation et l'axe passant par le centre de gravité du corps géométrique de masse m. La distance d sépare les deux axes.

Prenons comme exemple le moment d'inertie d'une sphère pleine de masse m et de rayon R. L'axe de rotation ne passe pas par son centre de symétrie gravité, nous aurons :

$$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + m\, d^2$$

$$J_{/\Delta'} = \frac{2}{5} m\ R^2 + m\, R^2 = \frac{7}{5} m\ R^2$$

Ou $J_{/\Delta}$ est le moment d'inertie d'une sphère pleine avec $d = R$.

II.6. Moment cinétique

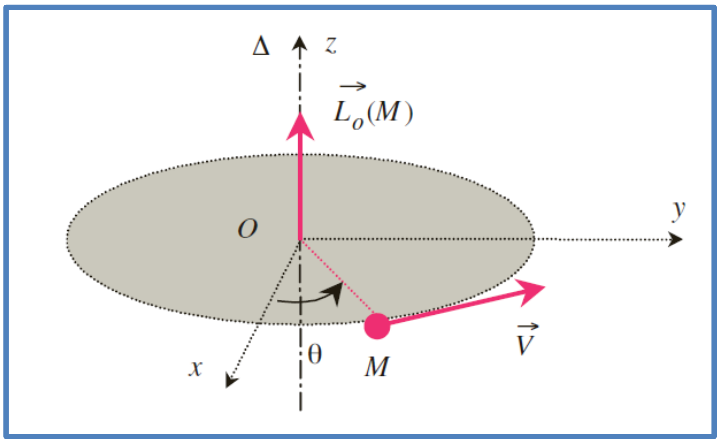


Figure 39 : Moment cinétique d'un point

Le moment cinétique, noté $\overrightarrow{L_{/O}}$, est une grandeur vectorielle conservée utilisée pour décrire l'état général de rotation d'un système physique autour d'un axe fixe. Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O est un produit vectoriel entre la force $\vec{F}$ et le vecteur quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{v}$:

$$\overrightarrow{L_{/O}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{L_{/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Si le mouvement est circulaire de rayon r, on aura : $\vec{r}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$

$$\overrightarrow{L_{/O}} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v} = m.r.v.\sin(\vec{r},\vec{v})$$

$$\overrightarrow{L_{/O}} = m.r.v$$

Posant : $v = \omega . r$

$$\overrightarrow{L_{/O}} = m.r^2.\omega$$

Le vecteur $\overrightarrow{L_{/O}}$, a le même sens que le vecteur vitesse angulaire. On peut écrire :

$$\overrightarrow{L_{/O}} = m.r^2.\vec{\omega}$$

II.7. Théorème de Moment cinétique

Le théorème du moment cinétique permet de résoudre un problème physique, pareille avec le principe fondamental de la dynamique, ou le PFD relie les forces appliquées au point matériel et la variation de sa quantité de mouvement mais le théorème du moment cinétique relie la somme des moments de ces forces par rapport au temps à un point donné et la variation du moment cinétique par rapport à ce même point.

Le théorème du moment cinétique montre que la dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées.

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_{/O}}\,(\overrightarrow{F_{ext}})$$

Démonstration :

Dans un référentiel galiléen $\Re$, le théorème du moment cinétique peut être appliqué comme suit :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = (\vec{v} \wedge m\vec{v}) + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{\gamma}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{\gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = \overrightarrow{M_{\vec{F}}} \qquad \text{C.Q.F.D}$$

Donc la derivée du moment cinétique égale à la somme de moment de la force appliquée sur le cops.

II.8. Conservation du moment cinétique –forces centrales

Une force centrale est la force qui à chaque instant, la droite support de cette force passe constamment par un point fixe O , c'est-à-dire une force toujours dirigée vers le même point fixe O.

La dérivée du moment cinétique s'annule si :

- La particule est isolée : $\vec{F} = \vec{0}$ ce qui signifie que le moment cinétique d'une particule libre est constant.
- Si la force est centrale $\vec{F}$: $\vec{F}$est parallèle à $\vec{r}$. Donc le moment cinétique par rapport au centre de forces est constant. Le contraire est vrai c'est à dire si le moment cinétique est constant donc la force est centrale.

Si la force $\vec{F}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont parallèles, le moment de la force est nul, et donc le moment cinétique est une constante du mouvement :

$$\overrightarrow{M_{/O}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_{/O}} = cst$$

II.9. Les applications et correction

1/

Un pendule de torsion est constitué d'un fil cylindrique dont une extrémité est maintenue fixe. En appliquant un moment de force sur ce fil, il se tord d'un certain angle. De fait de son élasticité, le fil s'oppose à cette torsion, en créant un ensemble de force dont le moment a méme intensité que le moment causant la torsion. Le moment du couple d'un ressort en spirale est donné par la relation :

$$M = -C\,\theta$$

Ou M est le moment de force et C la constante de torsion. En partant d'une situation d'équilibre, on écarte le pendule de torsion de sa position d'équilibre puis on laisse le système oscillé librement.

1. En utilisant le PFD, montrez que l'équation du mouvement est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

J_Δ est le moment d'inertie par rapport a l'axe Δ.

2. Trouver la période T en fonction de C et m.

Correction

1. En partant d'une situation d'équilibre, on écarte le pendule de torsion de sa position d'équilibre avec un angle θ puis on laisse le système oscille librement. La relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{M}_i = J_z \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

Avec, J_z est le moment d'inertie par rapport à un axe de rotation Z.

Par projection suivant un axe vertical Oz, à l'équation différentielle :

$$-C\,\theta = J_z \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

Cet équation est une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\,\theta = 0$$

Et qui admet une solution de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega\, t + \phi)$$

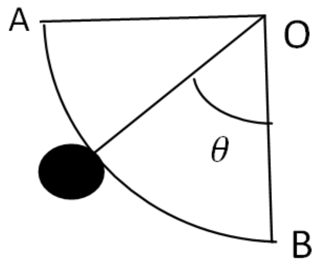
où ω et ϕ sont respectivement la pulsation des oscillations en (rd/s) et la phase initiale en (rd).

2. La periode des oscillations $T(s)$ est donné par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

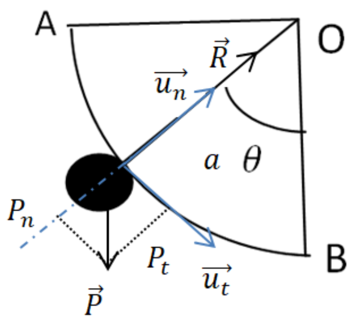
2/

On considère le mouvement d'une particule de masse m, sur une piste lisse de rayon a. Cette masse est lâchée à partir d'un point A sans vitesse initiale figure(). En utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet) trouver l'expression de l'équation de mouvement qui permet de déterminer $\|\vec{v}\|$.



Correction

La masse est soumise à deux forces : le poids et la réaction (montionner dans la figure)



Donc il ya deux moments de force par rapport au point O,que nous netrons :

$$\mathcal{M}_{\vec{P}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{R}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$$

Le moment de la force du poids

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_n} & \overrightarrow{u_t} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ mg \sin\theta & mg\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = mga\cos\theta\,\vec{k}$$

Le moment de la force de réaction

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_n} & \overrightarrow{u_t} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Nous appliquons le théoréme du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_{/O}}\,(\overrightarrow{F_{ext}})$$

Calculons le moment cinétique $\overrightarrow{L_{/O}}$

$$\overrightarrow{L_{/O}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_n} & \overrightarrow{u_t} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & m\vec{v} & 0 \end{vmatrix} = ma\vec{v}\vec{k}$$

Alors le théorée du moment cinétique

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/O}} = m\,a\,\dfrac{d\vec{v}}{dt}\vec{k} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_{/O}}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \mathcal{M}_{\vec{P}/O} + \mathcal{M}_{\vec{R}/O} = m\,g\,a\cos\theta\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = g\cos\theta \ \text{ C.Q.F.D}$$

CHAPITRE 4 :TRAVAIL, PUISSANCE ET ÉNERGIE

L'énergie joue un rôle essentiel tant dans les événements quotidiens que dans les phénomènes scientifiques. Vous pouvez sans doute nommer de nombreuses formes d'énergie, de celle fournie par nos aliments, à l'énergie que nous utilisons pour faire fonctionner nos voitures, à la lumière du soleil qui nous réchauffe sur la plage. Vous pouvez également citer des exemples de ce que les gens appellent l'énergie qui peut ne pas être scientifique, comme quelqu'un ayant une personnalité énergétique. Non seulement l'énergie a beaucoup de formes intéressantes, mais elle est impliquée dans presque tous les phénomènes, et est l'un des concepts les plus importants de la physique. Ce qui le rend encore plus important est que la quantité totale d'énergie dans l'univers est constante. L'énergie peut changer de forme, mais elle ne peut pas apparaître de rien ni disparaître sans laisser de trace. L'énergie fait donc partie d'une poignée de quantités physiques que nous disons conservées.L'énergie se caractérise par ses nombreuses formes et le fait qu'elle est conservée. Le travail est intimement lié à l'énergie et à la façon dont l'énergie se déplace d'un système à un autre ou change de forme.

I. *Les objectifs spécifiques du chapitre*

- ☺ Savoir calculer le travail d'une force variable ou pas sur un déplacement quelconque
- ☺ Savoir le calcul du travail de la force de pesanteur et de la force élastique quelle que soit l'orientation des axes choisis.
- ☺ Savoir utiliser le théorème de l'énergie cinétique
- ☺ Savoir déterminer l'énergie potentielle dont dérive une force conservative.
- ☺ Savoir utiliser l'énergie mécanique d'un système pour résoudre des problèmes.

II. *Les prérequis*

- 🕮 Connaitre la notion de produit scalaire de deux vecteurs.
- 🕮 Savoir d'intégration des fonctions mathématiques et de différentiation.
- 🕮 Savoir les vecteurs de base du différent système de coordonnées.

I. Introduction :

Le concept d'énergie est l'un des sujets les plus importants dans les sciences et l'ingénierie. Il est présent dans l'Univers sous diverses formes. Chaque processus physique qui se produit dans l'Univers implique des transformations d'énergie. Au sens physique, l'énergie caractérise la capacité à modifier un état. Autrement dit, toute action ou changement d'état nécessite que de l'énergie soit échangée. En mécanique, on s'intéresse à trois types d'énergies qui sont l'énergie cinétique liée au déplacement des objets, l'énergie potentielle emmagasinée dans un système et l'énergie mécanique qui est la somme des deux énergies précédentes.

I.1. Travail et la puissance d'une force

Le travail d'une force mesure l'effort à faire pour déplacer un objet le long d'un trajet qui peut-être horizontal ou pas, rectiligne ou pas. Un travail peut être positif auquel cas, on parlera de travail moteur. À l'oppose, un travail peut être négatif, on parle de travail résistant car il s'oppose au déplacement, c'est le cas des forces de frottements.

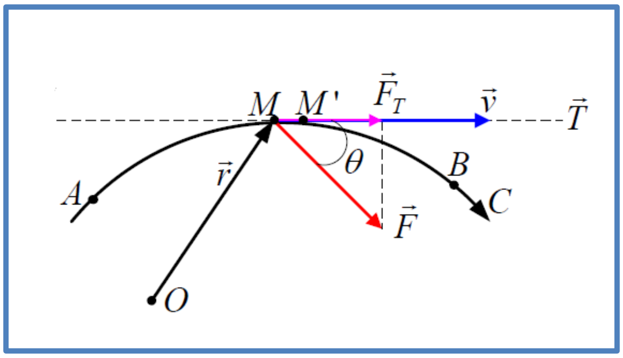


Figure 40 : Travail d'une force dans un trajectoire

D'après la figure (40) :

Le travail de la force $\vec{F}$ entre l'instant t, quand le point matériel M est la position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et l'instant $t + \ dt$ quand M est en M'de position $\overrightarrow{OM'} = \vec{r} + \overrightarrow{dr}$

D'après la définition de la vitesse, on a : $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dr} = \vec{v}\ dt$. Ainsi on en déduit l'expression du travail de la force $\vec{F}$ pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$:

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

Remarquons que le travail est un produit scalaire du vecteur force et du vecteur déplacement.

$$dW = \|\vec{F}\|.\|\vec{dr}\|.\cos\theta$$

Notons que $\cos\theta = \frac{F_T}{F} \Rightarrow F_T = F.\cos\theta$($F_T$ est la projection de $\vec{F}$ sur $\vec{T}$). Si on pose $\|\vec{dr}\| = ds$, on obtient alors une nouvelle expression du travail qui est :

$$dW = F_T.ds$$

Cela veut dire que le travail est égal au produit de déplacement élémentaire par la composante de la force suivant la direction du déplacement.

Pour un déplacement total de A (à l'instant t_A) à B (à l'instant t_B) tout au long de la courbe C, on obtient l'expression :

$$W = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_A^B F_T.ds$$

1. Cas simple

Soit $\vec{F}$ une force constante appliquée à un point se déplaçant de A à B.

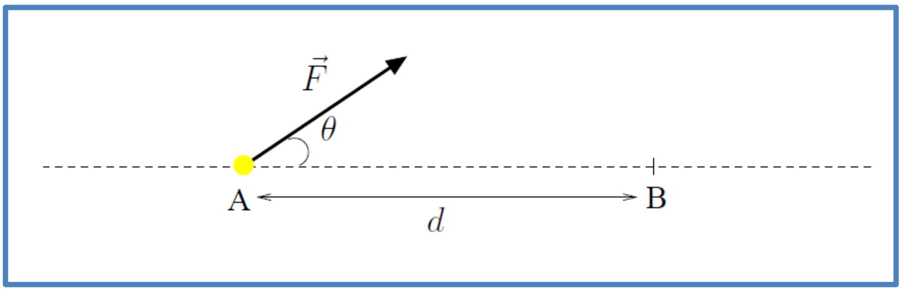


Figure 41 : Travail d'une force (1D)

Le travail W de la force est défini

$$W = \vec{F}.\vec{AB}$$

Le travail W est une grandeur algébrique qui dépend du déplacement.

Équation aux dimensions :$[W] = [F][L] = ML^2T^{-2}$. Donc l'unité est le $kg.m^2.s^{-2}$ ou Joule (J).

- Cas particulier

-Si la force F est constante en module et en sens (Figure 1), et le corps se déplaçant suivant une trajectoire rectiligne, le travail de cette force est :

$$F = F_T \Rightarrow W = \int_A^B F.ds = F\int_A^B ds \Leftrightarrow W = F.S$$

-La force qui ne travaille pas est la force perpendiculaire au déplacement ($\theta = {}^{\pi}/_{2}$).

Quand $\vec{F} \perp \overrightarrow{dr} \Rightarrow dW_{\vec{F}} = 0.$

2. Cas général

On définit le travail élémentaire δW d'une force $\vec{F}$ sur un intervalle infinitésimal $\Delta\vec{r}$ le long de la trajectoire d'un point matériel :

$$\delta W = \vec{F}.\Delta\vec{r}$$

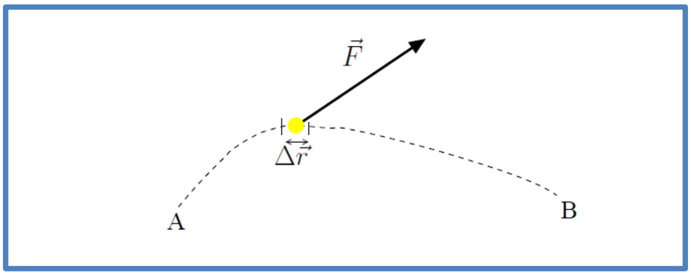


Figure 42 : Travail d'une force dans un trajectoire (AB)

Le travail total le long de la trajectoire vaut donc

$$W_{A\rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}).\overrightarrow{dr}$$

- Cas particulier

- Si F_x, F_y, F_z sont les composantes rectangulaires de la force $\vec{F}$, et dx, dy, dz les composantes rectangulaires du vecteur de déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$, alors

$$W = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_A^B (F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)$$

- Cas de plusieurs forces : Si le corps est soumis à plusieurs forces $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3} \ldots\ldots \overrightarrow{F_n}$ *, dont la résultante est* $\overrightarrow{F_R}$ *(Figure 4), le travail effectué par ces forces est égal au travail de la résultante :*

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 \ldots \ldots \ldots + dW_n$$

$$dW = \overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{dr} + \overrightarrow{F_2}.\overrightarrow{dr} + \overrightarrow{F_3}.\overrightarrow{dr} \ldots \ldots + \overrightarrow{F_n}.\overrightarrow{dr}$$

$$dW = \overrightarrow{F_R}.\overrightarrow{dr}$$

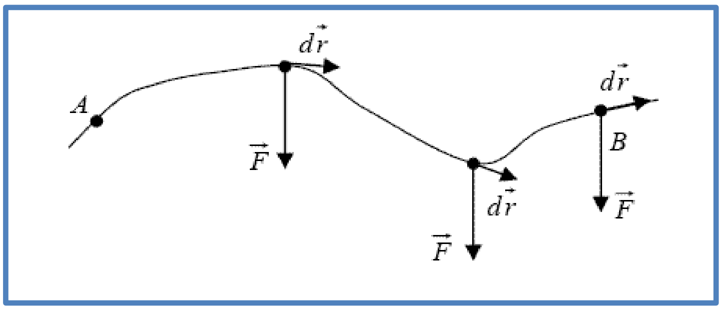


Figure 43 :Travail de chaque force

Le travail totale effectué du point A au point B par la force $\overrightarrow{F_R}$ est

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \int_A^B dW_{\vec{F}} = \int_A^B \overrightarrow{F_R}.\overrightarrow{dr}$$

On générale le travail dépend du chemin suivit.

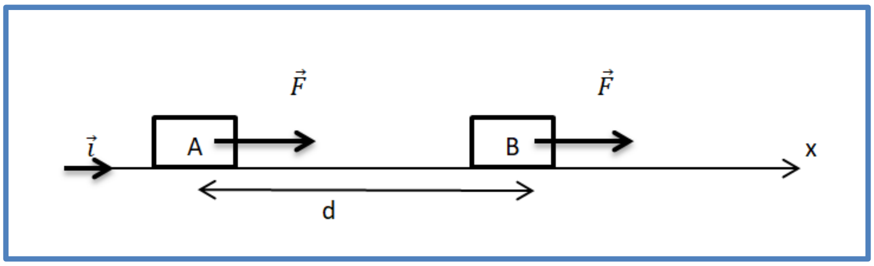
3. Puissance d'une force

La puissance d'une force est définie par le taux de variation de W dans l'unité de temps :

$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{v}.dt}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

L'unité est le $J \cdot s^{-1}$.

- Exemple 1

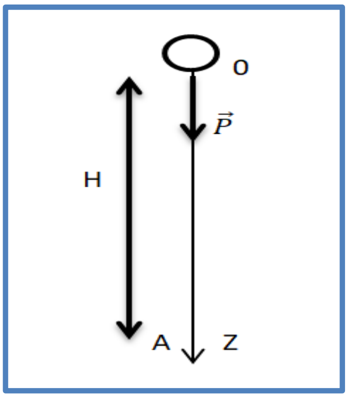


$\vec{F} = cst$

$$W_{\vec{F}}^{A\to B} = \int \vec{F}\,\overrightarrow{dr} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F} = F\vec{\imath} \\ \overrightarrow{dr} = dx\,\vec{\imath} \end{cases}$$

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B F\,\vec{\imath}\,dx\,\vec{\imath} \Rightarrow W_{\vec{F}} = F\int_A^B dx = F[x]_A^B \Leftrightarrow W_{\vec{F}} = F.d$$

- Exemple 2



$$W_{\vec{P}}^{O\to A} = \int \vec{P}\,\overrightarrow{dr} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P} = p\vec{k} = mg\vec{k} \\ \overrightarrow{dr} = dz\vec{k} \end{cases}$$

$$W_{\vec{P}} = \int_0^A m\,g\vec{k}\,.dz\,\vec{k} \Rightarrow W_{\vec{P}} = mg\int_0^A dz = mg[z]_0^A = mg\,H$$

I.2. Forces conservatives et énergie potentielle

I.2.1 Forces conservatives

Une force $\vec{F}$ est dite conservative (ou dérivé d'une énergie potentiel E_p) si :

-Le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivit

-Le travail de $\vec{F}$ suit un chemin fermé (on revient au point de départ)

$$W_{A\to B\to A}(\vec{F}) = W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{B\to A}(\vec{F}) = W_{A\to B}(\vec{F}) - W_{A\to B}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \oint \vec{F}.\overrightarrow{dr} = 0$$

-Le $\overrightarrow{Rot}\,\vec{F} = 0$ (Grandeur vectoriel)

$\overrightarrow{Rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ Ou $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

En système de coordonnées cartésiennes, la dérivée de l'énergie potentielle (dE_p), de la force ($\vec{F}$) et l'expression de vecteur de déplacement élémentaire ($\overrightarrow{dr}$), s'expriment respectivement par :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\, dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}\, dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}\, dz$$

$\vec{F} = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$ et $\overrightarrow{dr} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

Remplaçons ces expressions dans la relation, $\vec{F}\,.\overrightarrow{dr} \;=\; dE_p$, on trouve :

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

Donc, la relation entre la force et l'énergie potentiel s'exprime par :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{grad}E_p$$

Si F est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle E_p et elle peut s'écrire

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = \vec{\nabla}.E_p$$

I.2.2 Énergie potentielle

L'énergie potentielle est une forme d'énergie liée à la position du système. En changeant de position, cette énergie peut augmenter (le système emmagasine de l'énergie) ou diminuer (le système restitue de l'énergie à l'extérieur).

On constate que le travail effectué égale à la différence de l'énergie potentielle entre le point de départ A et le point d'arrivée B. Calculons le travail de cette force entre deux points A et B

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}\,.\overrightarrow{dr} = -\int_A^B \overrightarrow{grad}\,E_p\,.\overrightarrow{dr} = -\int_A^B dE_p = -\big(E_p(B) - E_p(A)\big) = -\Delta E_p$$

L'équation précédente montre que le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, il dépend juste des énergies potentielles aux points de départ et d'arrivée.

- Exemple 1: force de gravitation

La force de la pesanteur $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ est un exemple de force conservative qui dérive d'énergie potentielle de la pesanteur. En effet,

$$E_p = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -\int -mg\vec{k}.dz\vec{k} = \int mg\,dz = mg\int dz = mgz + C$$

Où C est une constante qu'on choisit en fonction de l'origine des énergies potentielles.

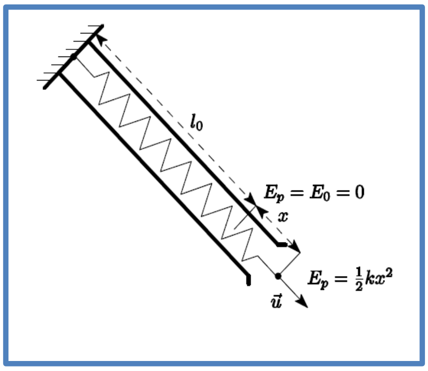
- Exemple 2:

La force de rappel d'un ressort est $\vec{F} = k\,x\,\vec{u}$ et

$\overrightarrow{dr} = dx\,\vec{u}$ d'où

$$E_p = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -\int -k\,x\,\vec{u}.dx\,\vec{u} =$$

$$\int kx\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 + E_0$$



Il s'agit de l'énergie potentielle élastique. Dans cette formule, le vecteur $\vec{u}$est un vecteur unitaire constant.

-L'énergie potentielle de torsion

$$E_P = \frac{1}{2}\,C\,\theta^2$$

Ou C et θ sont respectivement la constante de torsion du ressort et l'angle de torsion.

I.2.3. Équilibre d'un point matériel (stabilité)

Un point est à l'équilibre si son ***énergie potentielle est minimale*** en ce point. Cela correspond à $\vec{F} = \vec{0}$. En effet: $\frac{dE_P}{dx} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}E_P = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0}$ où x est un paramètre caractérisant le mouvement de M.

Parlons maintenant sur la stabilité de cet équilibre, Il nous faut donc étudier la valeur algébrique de la force : $F(x) = -\frac{dE_P}{dx}$

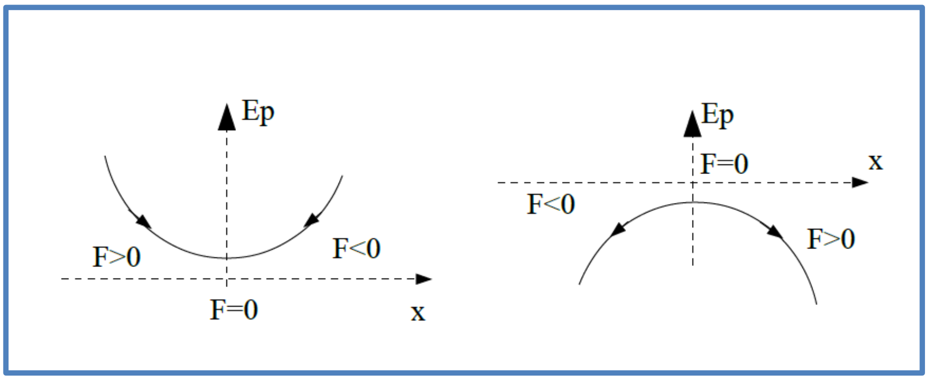


Figure 44 : Equilibre de l'énergie potontielle

- La force $\vec{F}$ ramené le système à l'équilibre.

L'équilibre est stable, $\frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$

- La force $\vec{F}$ écarte le système de l'équilibre.

L'équilibre est instable, $\frac{d^2E_P}{dx^2} < 0$

I.3. Théorème de l'énergie cinétique et énergie mécanique

I.3.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique est due au mouvement d'un corps par rapport à un référentiel donné. Dans le cas d'une particule M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{V}$ sous l'effet d'une force est le scalaire E_c défini par:

$$E_c = \frac{1}{2}m\,V^2$$

La variation d'énergie cinétique lors du déplacement d'un point entre deux positions est égale au travail de la résultante des forces :

$$dW = F_T.dr = m\gamma_T.dr = m\frac{dv}{dt}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = m\int_A^B v\,dv \Rightarrow W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_c(B) - E_c(A)$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_c = W_{A\to B}$$

Théorème de l'énergie cinétique

« Le travail de la résultante des forces (conservatives et non conservatives) appliquées sur une particules *(M)* en mouvement, entre deux points A et B, est égale à la variation de son énergie cinétique entre A et B ».

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

- Généralité

L'énergie cinétique, notée E_c, d'un point matériel est une quantité scalaire définie par :

-En mouvement rectiligne

$$E_c = \frac{1}{2} m \left|\vec{V}\right|^2$$

Ou m et $|\overrightarrow{V}|$ sont respectivement la masse et le module de la vitesse.

-En mouvement circulaire

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta |\vec{\omega}|^2$$

Ou $J_\Delta$et ω sont respectivement le moment d'inertie et la vitesse angulaire.

I.3.2 Énergie mécanique

L'énergie mécanique ou totale, notéeE_m , d'un point matériel est une quantité scalaire définie comme étant la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p$$

Rappelons que l'énergie mécanique se conserve dans le cas d'un système isolé, c'est-à-dire en absence de frottement, on écrit dans ce cas :

$$E_m = cst$$

I.4.Conservation de l'énergie mécanique (l'énergie totale)

Soit un point M dans un référentiel galiléen, qui se déplace du point A vers un point B sous l'action des forces. En appliquant les deux théorèmes de l'énergie cinétique et potentielle, il découle les conséquences suivantes :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{CS}} + \overrightarrow{F_{NCS}}\right)$$

Avec $\overrightarrow{F_{CS}}$: Force conservative $\overrightarrow{F_{NCS}}$: Force non- conservative

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{CS}}\right) = E_p(A) - E_p(B)$$

En manipulant ces deux équations, on trouve

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{CS}}\right) = E_p(A) - E_p(B) = E_c(B) - E_c(A) - W_{AB}(\overrightarrow{F_{NCS}})$$

$$\Rightarrow \left(E_c(B) + E_p(B)\right) - \left(E_c(A) + E_p(B)\right) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{NCS}})$$

Il s'agit de l'énergie totale ou mécanique, qui égale à la somme de l'énergie potentielle et cinétique

$$E_m = E_T = E_c + E_p$$

Il s'en suit que

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Mais $\Delta E_c = \sum$des travaux de toutes les forces et $\Delta E_p = -\sum$des travaux des forces conservatives, donc

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{NCS}}\right) = \Delta E_m = E_m(B) - E_m(A)$$

$\Delta E_m = \sum$des travaux des forces non conservatives.

Autrement dit, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservative (le frottement et les forces de choc par exemple).

I.5.Les applications et correction

1/

Soit le champ de force définie par :

$$\vec{F} = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

1. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ du point $O(0;\ 0)$ vers le point $A(1;\ 1)$ suivant les chemins :

- $O(0;\ 0)$ vers le point $A(1;\ 1)$ caractérisé par une droite
- $O(0;\ 0)\ \rightarrow\ B(1;\ 0)\ \rightarrow\ A(1;\ 1)$
- $O(0;\ 0) \rightarrow\ C(0;\ 1) \rightarrow\ A(1;\ 1)$

2. Calculer le rotationnel de la force $\vec{F}$.

3. Si la force est conservative, trouver le potentiel $U(x;\ y)$ duquel dérive ce champ. On prendra : $U(0;\ 0) = 0$.

Correction

Le champ de force est définie par :

$$\vec{F} = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

1. Le travail de la force $\vec{F}$ est calculé par la formule suivante

$$W_{\vec{F}} = \int \vec{F} dl$$

En coordonnée cartésienne, le travail est

$$W_{\vec{F}} = \int F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}$$

Nous remplaçons l'expression de la force

$$W_{\vec{F}} = \int y\,dx + x\,dy \ldots \ldots \ldots . (1)$$

- Le chemin du point $O(0;\ 0)$ vers le point $A(1;\ 1)$ caractérisé par une droite de la forme $y = x \Leftrightarrow dy = dx$ donc l'équation (1) devient

$$W_{\vec{F}} = 2\int x\,dx = [x^2]_0^1 = 1 joule$$

- Le chemin du $O(0;\ 0)$ vers le point $A(1;\ 1)$ passant par le point $B(1;\ 0)$ se dévise en deux chemin

- le chemin OB de l'équation $y = 0 \Rightarrow dy = 0 \Leftrightarrow W_{\vec{F}}^{OB} = 0$

-le chemin BA de l'équation $x = 1 \Rightarrow dx = 0 \Leftrightarrow W_{\vec{F}}^{BA} = \int dy = [y^2]_0^1 = 1joule$

Le travail total OA est donc $W_{\vec{F}}^{OA} = W_{\vec{F}}^{OB} + W_{\vec{F}}^{BA} = 1joule$

- Le chemin $O(0;\ 0) \rightarrow C(0;\ 1) \rightarrow A(1;\ 1)$,se dévise en deux sous chemin OC et CA

OC : $x = 0 \Rightarrow dx = 0 \Leftrightarrow W_{\vec{F}}^{OC} = 0$

CA : $y = 1 \Rightarrow dy = 0 \Leftrightarrow W_{\vec{F}}^{CA} = \int dx = [x^2]_0^1 = 1joule$

Le travail total OA est $W_{\vec{F}}^{OA} = W_{\vec{F}}^{OC} + W_{\vec{F}}^{CA} = 1joule$

Nous remarquons que quelque soit le chemin pris par la force, son travail ne change pas, il ne dépend pas du chemin suivi, elle est une force conservative.

2.Le rotationnel de la force $\vec{F}$ se calcule à partir du

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$$

Le rotationnel de la force $\vec{F}$ est nul donc notre force est conservative.

3.La force est conservative ,elle dérive d'un potentiel $U(x,y)$

$$\overrightarrow{grad}U(x,y) = \vec{F}(x,y)$$

Le potentiel $U(x,y)$ est donné en coordonnées cartisiénnes par le relation :

$$\overrightarrow{grad}U(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\vec{\jmath} \ldots\ldots..(2)$$

Et comme la force s'exprime sous la forme : $\vec{F}(x,y) = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} \ldots\ldots..(3)$

Par identification entre (2) et (3)

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = y \dots \dots (4)$$

$$F_y = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x \dots \dots (5)$$

A partir de l'équation (1) on aura

$$U(x,y) = -\int y\, dx = -y\, x + C_1(y) \dots \dots (6)$$

Pour déterminer la constante $C_1(y)$,nous dérivons l'équation (6) en fonction de y

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -x + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} \dots \dots (7)$$

L'identification des équations (5) et(7) conduit à

$$-x + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} = -x \Rightarrow \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow C_1(y) = C_2$$

L'expression de $U(x,y)$ devient :

$$U(x,y) = -yx + C_2$$

On utilisant les conditions initiales $U(0,0) = 0$ pour déterminer la constante C_2

$$U(0,0) = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Enfin l'expression de potentiel est $U(x,y) = -yx$

2/

Une particule de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire AOB de rayon a. On utilise le système de coordonnées polaires.

1. Déterminer le travail du poids et le travail de la force de réaction du point A à M.

2. Déterminer l'énergie potentielle E_p de m au point M. on donne $E_p\ (B) = 0$.

3. Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la vitesse de m au point M.

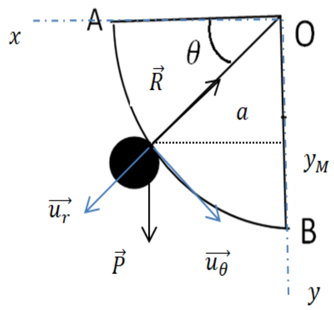
4. Déduire son énergie cinétique E_c.

5. Calculer l'énergie mécanique E_m en ce pont M.

6. Représenter E_p, E_c et E_m en prend $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$. Discuter.

Correction

1.Le travail du poids de A à M



$$W_{\vec{F}}^{AM} = \int \vec{p}.\overrightarrow{dr} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p} = mg\vec{j} \\ \overrightarrow{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \end{cases}$$

$$W_{\vec{F}}^{AM} = \int mg\vec{j}.(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = mg\int dy = mg[y]_A^M$$

$$= mg\, y_M$$

On sait que $\sin\theta = \frac{y_M}{a} \Rightarrow y_M = a\sin\theta$

$$W_{\vec{F}}^{AM} = mg\, a\sin\theta$$

Le travail de la force de réaction

$$\vec{R} = -R\overrightarrow{u_r}\ et\ \overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u_r} \quad ; \quad \overrightarrow{dr} = a\, d\overrightarrow{u_r} = ad\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

$$W_{\vec{R}} = -\int -R\overrightarrow{dr} = -\int R\overrightarrow{u_r}.(ad\theta\overrightarrow{u_\theta}) = 0 \Leftrightarrow W_{\vec{R}} = 0$$

2. L'énergie potentielle E_p de m au point M

$$dE_p = -dW \Rightarrow E_p = -mga\sin\theta + C \text{ ; On sait que } E_p\left(B, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow C = mga \Leftrightarrow E_p = mga(1 - \sin\theta)$$

3. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique ; détermination de la vitesse au point M

$$\Delta E_c = \sum W_{AM} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_M^2 - \cancel{\frac{1}{2}mV_A^2} = mg\, a\sin\theta \Leftrightarrow V_M = \sqrt{2mg\, a\sin\theta}$$

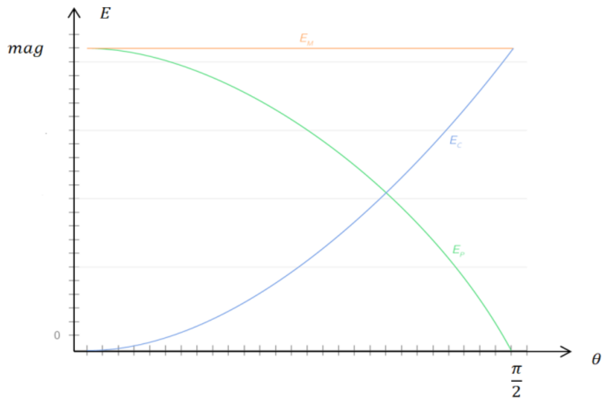
4. Déduire l'énergie cinétique au point M

$$E_c(M) = \frac{1}{2}mV_M^2 = mg\, a\sin\theta$$

5. L'énergie mécanique E_m en ce pont M

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow \begin{cases} E_c = mg\,a\sin\theta \\ E_p = mga(1-\sin\theta) \end{cases} \Leftrightarrow E_m = mga = constante$$

6. La représentation E_p, E_c et E_m en prend $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$



$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_c = 0 \\ E_p = mga \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} E_c = mga \\ E_p = 0 \end{cases}$$

On constate que l'énergie potentielle E_p diminué, alors que l'énergie cinétique E_c augmente mais l'énergie mécanique$E_m = E_c + E_p = mga$ reste constante.

II.1.Impulsion et choc

II.1.1 Impulsion

On définit le vecteur impulsion $\vec{I}$ de la force $\vec{F}$ pendant l'intervalle de temps Δt par le produit de la force $\vec{F}$ par le temps pendant lequel elle agit.

$$\vec{I} = \vec{F}.\Delta t \Rightarrow \begin{cases} \vec{I} \;\; Impulsion, en\ N/s \\ \vec{F} \;\; Force, en\ N \\ \Delta t \;\; Temps, en\ s \end{cases}$$

Il est important à ce stade de ne pas confondre le produit $\vec{F}.\overrightarrow{dr}$ qui représente le travail fournit et le produit $\vec{F}.\Delta t$ qui représente le vecteur impulsion.

II.2. Choc

II.2.1 Introduction

Un choc (ou collision) est un évènement isolé dans lequel deux corps (ou plus) exercent l'un sur l'autre des forces relativement fortes. Dans une collision on ne s'intéresse pas au détail de l'interaction, mais seulement aux caractéristiques de chacune des particules avant et après l'interaction (choc).

II.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

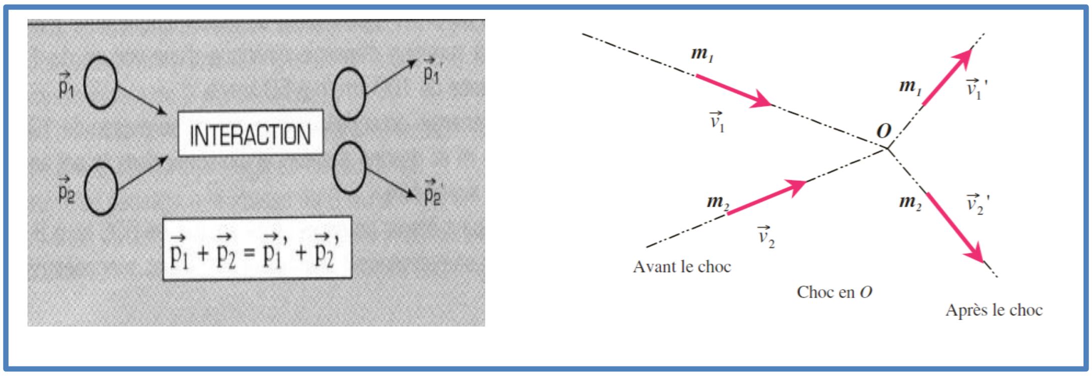


Figure 45 : Un choc entre deux particules

Avant le choc les quantités de mouvement sont $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$. Après le choc, elles deviennent $\overrightarrow{p'_1}$ et $\overrightarrow{p'_2}$

D'après les principes fondamentaux de la dynamique que dans le cas où il n'y a pas de force extérieur appliquée, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées, donc

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} = cst \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{0}$$

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v_1'} + m_2\overrightarrow{v_2'}$$

II.3. Le choc élastique

Le choc entre deux objets est élastique si les deux objets qui se rencontrent rebondissent sans subir de déformation. Il y a conservation de l'énergie cinétique au cours de choc, c'est-à-dire les deux objets ne s'unissent pas après le choc.

On sait que $E_c = \frac{p^2}{2m}$ donc on peut écrire

$$E_c \text{ (Avant le choc)} = E'_c \text{ (Après le choc)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_c = 0$$

$$\frac{{p_1}^2}{2m_1} + \frac{{p_2}^2}{2m_2} = \frac{{p'_1}^2}{2m_1} + \frac{{p'_2}^2}{2m_2}$$

$$\frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1^2} + \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_1^2} = \frac{1}{2}m_1\overrightarrow{{v_1}^{2'}} + \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{{v_2}'^2}$$

II.4. Le choc inélastique

Le choc est inélastique dans le cas où les mobiles (des particules) qui se rencontrent subissent des déformations permanentes où une partie de l'énergie cinétique est utilisée pour la déformation. Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique, c'est-à-dire si elles s'unissent après le choc pour former un seul corps et auront la même vitesse.

Si $\overrightarrow{p_1}$ *et* $\overrightarrow{p_2}$ sont les quantités de mouvement des deux particules séparées avant le choc, et $\overrightarrow{p'}$ la quantité de mouvement des deux particules unies après le choc, donc

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'} = cst \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0$$

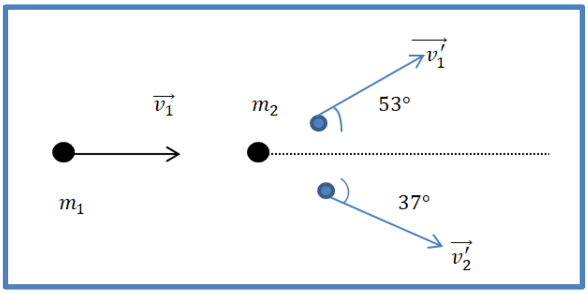
$$\frac{{p_1}^2}{2m_1}+\frac{{p_2}^2}{2m_2}=\frac{{p'}^2}{2(m_1+m_2)}$$

$$\frac{1}{2}m_1\overrightarrow{v_1^2}+\frac{1}{2}m_2\overrightarrow{v_1^2}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\overrightarrow{v'^2}$$

- Exemple

Une boule de billard de masse $m_1=1kg$ frappe une autre boule de masse$m_2=2kg$, qui est au repos à une vitesse de$3m/s$. Les angles que font les vitesses finales des deux boucles par rapport à la direction incidente sont représentés sur la figure

1. Quelles sont les vitesses finales ?
2. Le choc était-il élastique ?



On sait la conservation de la quantité de Mouvement :

$$\vec{p_1}+\vec{p_2}=\vec{p'}_1+\vec{p'}_2$$

$$m_1\vec{v_1}+m_2.0=m_1\vec{v_1}'+m_2\vec{v_2}'$$

Décomposition suivant ox et oy

$$ox: m_1v_1=m_1v_1'\cos 53°+m_2v_2'\cos 37° \qquad eq1$$

$$oy: 0=m_1v_1'\sin 53°-m_2v_2'\sin 37° \qquad eq2$$

$$\Rightarrow De\ eq\ 2\quad m_1v_1'\sin 53°=m_2v_2'\sin 37° \Rightarrow\ v_2'=\frac{m_1\sin 53°}{m_2\sin 37°}v_1'$$

$$m_1v_1=m_1v_1'\cos 53°+\frac{m_1\sin 53°}{\sin 37°}v_1'\cos 37°$$

$$m_1v_1=m_1v_1'\cos 53°+\frac{m_1\sin 53°\cos 37°}{\sin 37°}v_1'$$

$$m_1v_1=m_1v_1'\left(\frac{\cos 53°\sin 37°+\sin 53°\cos 37°}{\sin 37°}\right)$$

$$v_1'=\frac{\sin 37°}{\sin 53°\cos 37°\ +\cos 53°\sin 37°}.v_1$$

A.N $\quad v_1'=-2{,}16\ m/s$

Pour savoir le type de choc, nous vérifions l'énergie cinétique avant et après le choc, nous trouvons $9 \neq 6{,}46$ alors le choc est inélastique.

BIBLIOGRAPHIE

1. Michel Henri et Nicolas Delorme Mini manuel de mécanique du point, édition Dunod (2008).
2. Alain Gibaud et Michel Henry, COURS DE PHYSIQUE MÉCANIQUE DU POINT, Edition Dunod, Paris 2017.
3. ZIANI Nossair et BOUTAOUS Ahmed, MECANIQUE DU POINT MATERIEL. COURS et EXERCICES, Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algerie 2015/2016.
4. Ecole Polytechnique de l'Université de Nice - Sophia Antipolis PeiP1
5. J. Taylor, Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques, Dunod (2000).
6. MÉCANIQUE GÉNÉRALE Cours et exercices corrigés Sylvie Pommier , Yves Berthaud.
7. Travaux Dirigés de Physique Mécanique 2 L1 S2 Phys–103a Université Paris–Sud 11 2013–2014.
8. KHENE, Samir, Mécanique du point matériel; cours et 201 exercices corrigés ; 1ère année LMD, Edition Connaissances Et Savoirs, 2015.
9. FIZAZI Ahmed, Mécanique du point Matériel, Rappel de cours et Exercices Corrigés, Office de publication universitaires, Edition N° 5231, 2016.
10. Benoist-Gueutal et M. Courbage, mathématique pour la physique, tome 1, 2, 3, édition Eyrolles, Paris (1992)
11. Alonso M. et Finn E. , Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique, Dunod,(2004).
12. Feynman R., Le cours de physique de Feynman, 5 volumes, Dunod, (2013).
13. Stocker H., Jundt F. et Guillaume G., Toute la physique, Dunod, (2007)
14. Sylvie Pommier et Yves Berthaud, Mécanique Générale, édition DUNOD (2010).
15. Horst Stocker, Francis Jundt et Georges Guillaume, Toute la physique, édition Dunod (1999). - http ://cours-examens.org/index.php/etudes-superieures/tronc-communtechnologie
16. JEAN-MARIE BRÉBEC, THIERRY DESMARAIS, MARC MÉNÉTRIER, Bruno NOËL, RÉGINE NOËL et Claude ORSINI, Mécanique, *1ière Année* Physique MPSI/PCSI/PTSI, Hachette Livre, Paris, (2010).
17. Lamria BENALLEGUE, Mohamed DEBIANE, Azeddine GOURARI, et Ammar MAHAMDIA, Physique I Mécanique du Point Matériel, Edité par la Faculté de Physique U.S.T.H.B., Alger, (2011).
18. ALAIN GIBAUD ET MICHEL HENRY, Cours de Physique Mécanique du Point, 2ième édition, Dunod, Paris, (1999-2007).
19. Travaux Dirigés de Physique Mécanique 2 L1 S2 Phys–103a Université Paris–Sud 11 2013–2014.
20. PHYSIQUE TOUT-EN-UN Cours et exercices corrigés.1ére année Marie- Noëlle Sanz Anne-Emmanuelle Badel François Clausset.