

# RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX 3

*CHAPITRE 3 : SYSEMES HYPERSTATIQUES  
(METHODE DES FORCES)*



Au profit des étudiants 4èmes année

Cycle Ingénieur Polytechnique

Spécialité Bâtiment Durable-G.C

-----  
**Dr. Mohamed MERAZI**

École nationale polytechnique d'Oran Maurice Audin

Département de Génie Civil

Email : merazi@hotmail.fr

Décembre 2023

1.0

# SYSTEMES HYPERSTATIQUES

## I-DEFINITIONS

En pratique, les structures sont classées en deux catégories : structures isostatiques et structures hyperstatiques.

### I.1) Structures isostatiques et structures hyperstatiques :

#### a) Structures isostatiques :

Une structure est isostatique, si les réactions d'appuis et tous les efforts intérieurs peuvent être déterminés en utilisant seulement les équations de la statique :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad , \quad \sum \vec{M} = 0$$

Dans le cas des systèmes isostatiques, les composantes des réactions se calculent au moyen des équations d'équilibre de la statique seules :

$$\sum F_x = 0 \text{ (équilibre horizontal)}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (équilibre vertical)}$$

$$\sum M_{\text{point}} = 0 \text{ (équilibre des moments de rotation)}$$

#### b) Structures hyperstatiques :

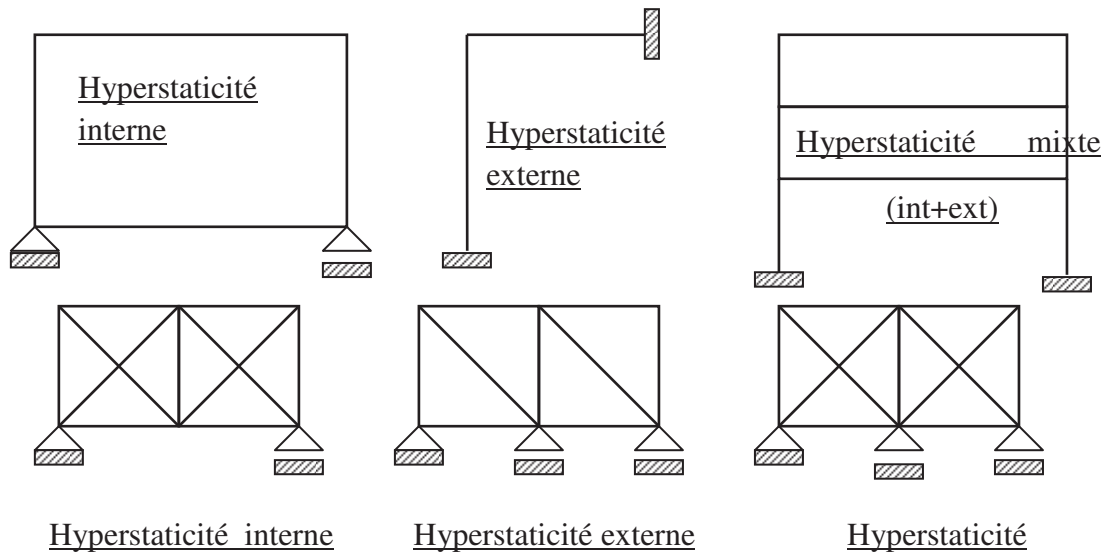
Ce type de structure possède des liaisons surabondantes dont les forces ne peuvent être déterminées en utilisant simplement les équations de la statique. Pour la résolution du problème on a besoin d'autres équations supplémentaires.

Les liaisons surabondantes sont des liaisons supplémentaires qu'il faudrait supprimer du système hyperstatique pour le rendre isostatique. Il existe deux types de liaisons surabondantes :

- Les liaisons surabondantes extérieures : elles se trouvent au niveau des appuis et représentées par les réactions. Dans ce cas l'hyperstaticité est appelée hyperstaticité externe.
- Les liaisons surabondantes intérieures : elles sont celles qui proviennent des contours fermés dans le cas des cadres (en ouvrant le contour, les efforts internes deviennent des inconnues supplémentaires). Les liaisons surabondantes intérieures peuvent se trouver aussi au niveau des systèmes en treillis qui possèdent des barres en plus.  
Dans ce cas l'hyperstaticité est appelée hyperstaticité intérieure.

En pratique, les structures sont intérieurement et extérieurement hyperstatiques (hyperstaticité mixte).

(

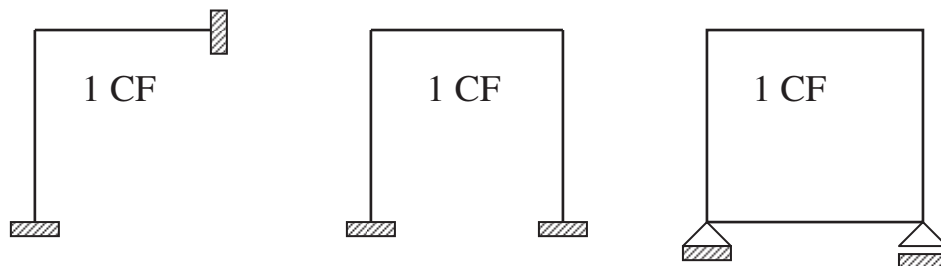


## II-CALCUL DU DEGRE D'HYPERSTATICITE :

La différence entre le nombre d'inconnus et le nombre d'équations de la statique constitue le degré d'hyperstaticité. Il est égal au même temps au nombre de liaisons surabondantes. Il existe plusieurs méthodes pour le calcul du degré d'hyperstaticité (D).

### II – 1 Méthode des contours fermés. (C.F)- cas des cadres-

Cette méthode est applicable pour les cadres. On appelle un (C.F) un polygone limité par des barres encastées l'une dans l'autre. Dans un (CF) une barre peut manquer à condition d'être remplacée par le sol dans lequel sont encastées les barres adjacentes. Le sol est considéré comme une barre de rigidité infinie ( $EI = \infty$ ).



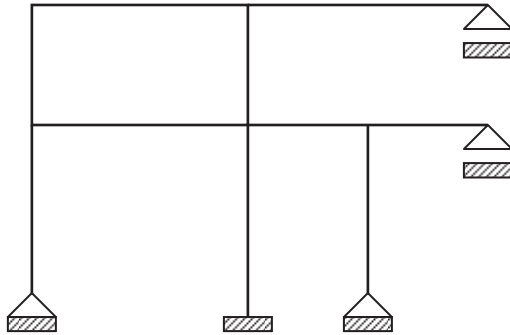
Le degré d'hyperstaticité d'un CF est égal à (3). S'il existe une articulation le (D) est réduit d'une unité. S'il existe un appui simple le (D) est réduit de deux unités. Le degré d'hyperstaticité est calculé à partir de la formule suivante :

$$D = 3c - 1a - 2s$$

**D**: degré d'hyperstaticité.

**c** : contour fermé,    **a** : articulation,    **s** : appui simple.

Exemple 1: En utilisant la méthode des contours fermés calculer le degré d'hyperstaticité du système indiqué dans la figure suivante :



$$C = 5, a = 2, S = 2$$

$$D = 3C - a - 2S$$

$$D = 3(5) - (2) - 2(2) = 9$$

## II-2 Cas des poutres en treillis:

Le degré d'hyperstaticité dans le cas des poutres en treillis est calculé d'après la formule suivante :

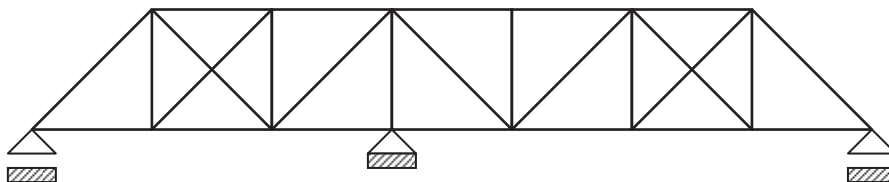
$$D = b - 2n + l$$

b : nombre de barres.

n : nombre des nœuds.

l : nombre des liaisons dans les appuis.

Exemple 2: Pour la poutre en treillis représentée sur la figure suivante, calculer le degré d'hyperstaticité.



$$b = 27,$$

$$n = 14,$$

$$l = 4$$

$$D = 27 - 2(14) + 4 = 3$$

Le système est trois fois hyperstatique : deux (2) fois intérieurement et une (1) fois extérieurement hyperstatique.

### III-METHODES DE CALCUL DES STRUCTURES

#### HYPERSTATIQUES :

Pour résoudre un système hyperstatique (détermination des forces de liaisons, ainsi que les efforts dans les sections des barres de la structure), il faut chercher d'autres équations supplémentaires en plus des trois (3) équations de la statique. On peut prendre, en qualité d'inconnues, tout aussi bien des forces que des déformations. Dans le premier cas, nous aurons la méthode des forces, dans le second, la méthode de déplacements.

#### A) METHODE DES FORCES

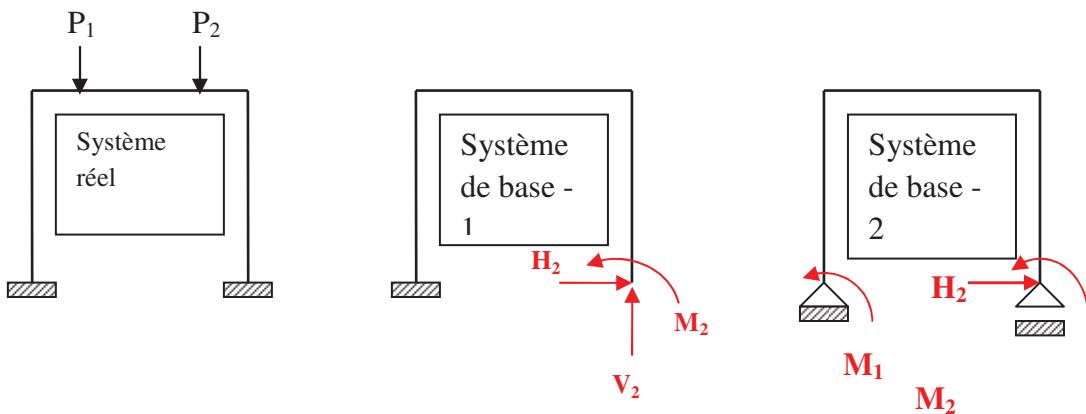
##### A-1) INTRODUCTION :

Dans cette méthode, on prend comme inconnues les forces au niveau des liaisons surabondantes. On supprime les liaisons surabondantes et on les remplace par des forces inconnues. La structure hyperstatique est transformée en structure isostatique. Pour cette dernière on peut calculer les déplacements causés par les forces dans les liaisons supprimées.

##### A-2-ETAPES DE CALCUL

Résoudre un système hyperstatique par la méthode des forces s'effectue dans l'ordre suivant :

- 1- Détermination au degré d'hyperstaticité.
- 2- Définition du **système de base** : c'est la structure isostatique qui provient de la structure hyperstatique après avoir supprimé les liaisons supplémentaires. Pour la même structure hyperstatique, on peut avoir plusieurs systèmes de base.

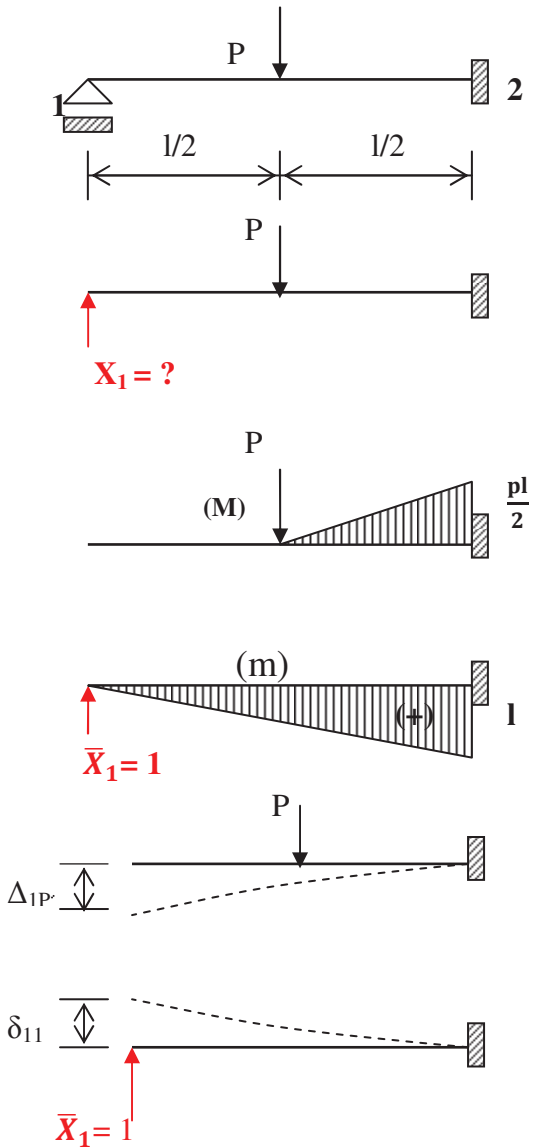


- 3- Application au système de base les forces extérieures données ainsi que les efforts surabondants inconnus qui remplacent les liaisons surabondantes éliminées. Le système obtenu s'appelle le système équivalent (système de base + charges extérieures).
- 4- Les déplacements des points d'application des réactions inconnues sont nuls, ils peuvent être calculés par la méthode de Maxwell Mohr ou Véréchaguine.
- 5- Une fois les valeurs inconnues calculées, on détermine les réactions. Le système devient isostatique et on reprend l'étude pour tracer le diagramme de (N, T, M).

### A-3) EQUATIONS DE LA METHODE DES FORCES

Adoptons le système suivant comme une base d'étude (système réel). On a une console sollicitée par une force extérieure (P), appliquée au niveau de l'extrémité libre.

- Ce système est une (01) fois hyperstatique :  $D = 1$
- On établit le système de base : on supprime l'appui simple et on le remplace par une réaction verticale ( $X_1$ ).
- On définit le système équivalent.
- Le déplacement vertical au niveau du point (1) est nul. L'appui ne peut pas se déplacer. Ce déplacement est noté ( $\Delta_1$ ).



$\Delta_{1P}$  : déplacement provoqué par la force (P) au niveau du point (1).

$\Delta_{1X1}$  : déplacement provoqué par la force ( $X_1$ ) au niveau du point (1)

$\delta_{11}$  : déplacement provoqué par la force ( $\bar{X}_1 = 1$ ) au niveau et dans le sens du point (1).

Le déplacement total du point (1) est égal à :

$$\Delta_1 = \Delta_{1X1} + \Delta_{1P}$$

$$\Delta_{1X1} = \delta_{11} X_1$$

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

C'est la forme canonique de l'équation des déplacements pour un système hyperstatique d'ordre (1). De cette formule, on a :

$$X_I = - \Delta_{Ip} / \delta_{II}$$

Pour un système doté de deux liaisons surabondantes ( D = 2 ), les équations canoniques auront la forme suivante :

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

Pour un système hyperstatique à (n) inconnus on a :

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \delta_{i3} X_3 + \delta_{ii} X_i + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip} = 0$$

$$\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \delta_{n3} X_3 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{np} = 0$$

D'une manière générale on aura le système suivant:

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{ii} X_i + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Les déplacements  $\delta_{ij}$  et  $\Delta_{ip}$  sont déterminés par la méthode de Mohr ou celle de Véréchaguine.

$\delta_{ij}$  : représente le déplacement selon la direction ( $X_i$ ) quand le système de base est soumis à l'action d'une force unitaire agissant suivant la direction (j), il sera calculé d'après la relation :

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{1}{EI} \int m_i m_j dx$$

$\Delta_{ip}$  : représente le déplacement selon la direction de l'inconnu ( $X_i$ ) quand le système de base sera soumis à l'action des charges nulles extérieures (système équivalent).



$$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI} \int M_p m_i dx$$

Après résolution des équations de la méthode des forces, on détermine les forces inconnues :

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

Ces inconnus sont mis en évidence au début du calcul.

Pour tracer le diagramme final des moments fléchissant on applique le principe de superposition :

$$M_x = M_p + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n$$

- $\delta_{ij}$  : Sont appelées coefficients secondaires des déplacements du à la multiplication des diagrammes  $m_{xi}$ ,  $m_{xj}$   
Ces coefficients peuvent être supérieurs, inférieure ou égale à zéro.
- $\delta_{ii}$  : sont appelés coefficient principaux, ils représentent la multiplication du diagramme ( $m_{xi}$ ) par lui-même, ils sont toujours positifs et différents de zéro.

#### A-4) APPLICATION DE LA METHODE DES FORCES POUR LES CADRES

Quand on a à calculer les cadres hyperstatiques, on ne retient dans la formue générale de Mohr, que les intégrales tenant en compte les moments fléchissant uniquement. On applique sur le système, isostatique de base les charges unitaires  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$ ,  $\bar{X}_3$ , ... ..  $\bar{X}_n = 1$ , ainsi que les charges extérieures, puis on construit les diagrammes respectifs des moments. Désignons respectivement par ( $M_p$ ), ( $m_1$ ,  $m_2$ , ...  $m_n$ ) les diagrammes des moments fléchissant dus aux charges extérieures réelles (P) et à la charge unitaire  $\bar{X}_1 = 1$  (état 1),  $\bar{X}_2 = 1$  (état 2), ... ..  $\bar{X}_n = 1$  (état n).

D'après l'intégrale de Maxwell, on a :

- 1- Les déplacements spécifiques dont les indices coïncidents (coefficients principaux des équations canoniques) se déterminent à partir des formules suivantes :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int m_1 m_1 dx ; \quad \delta_{22} = \frac{1}{EI} \int m_2 m_2 dx ; \dots \dots \dots ; \quad \delta_{nn} = \frac{1}{EI} \int m_n m_n dx$$

- 2- Les déplacements spécifiques dont les indices sont différents (coefficients secondaires) s'obtiennent à partir formules suivantes :

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \int m_1 m_2 dx ; \quad \delta_{13} = \frac{1}{EI} \int m_1 m_3 dx ; \dots \dots \dots ; \quad \delta_{ik} = \frac{1}{EI} \int m_i m_k dx$$

En vertu du théorème de la réciprocité des déplacements, on a :

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

3- Le calcul des  $\Delta_{ip}$  se fait à partir des intégrales suivants :

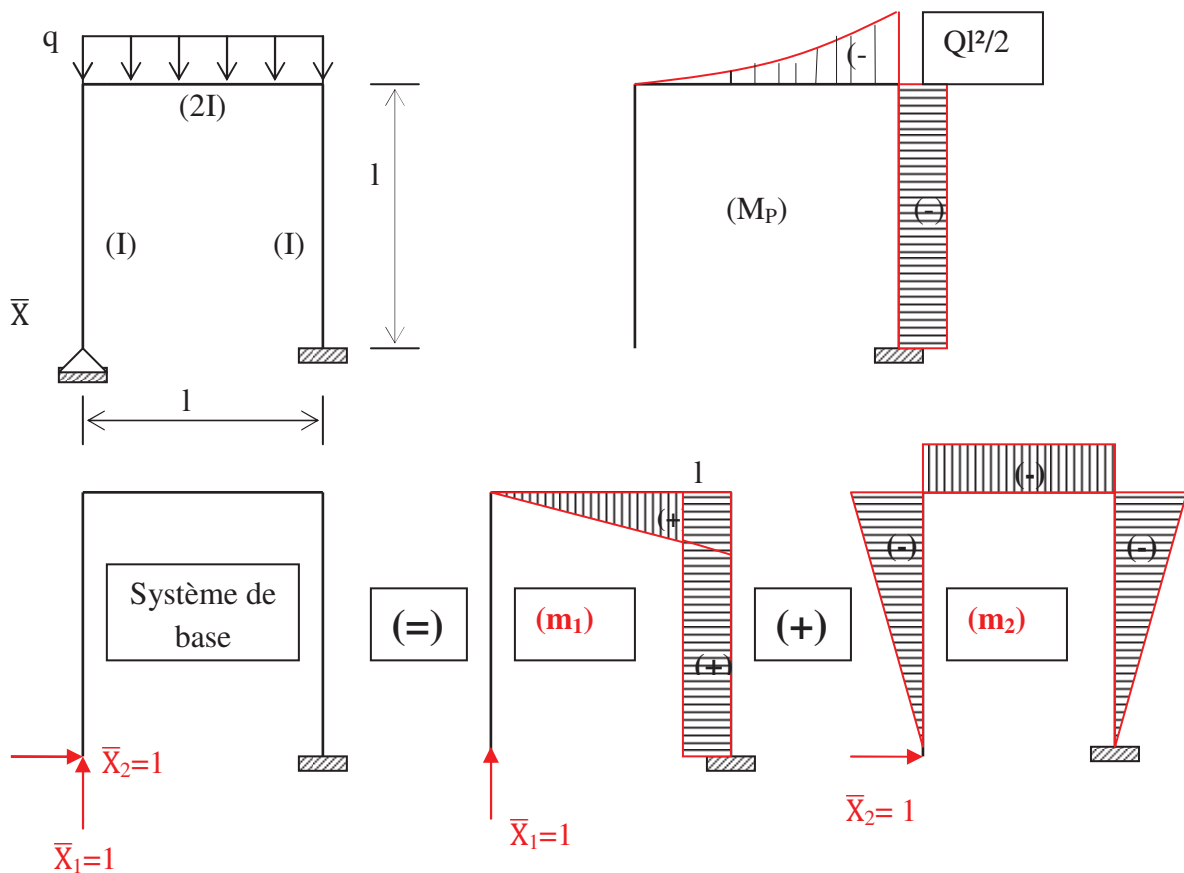
$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \int m_1 M_p dx ; \quad \Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \int m_2 M_p dx ; \quad \Delta_{np} = \frac{1}{EI} \int m_n M_p dx$$

Remarque :

Pour les diagrammes des moments fléchissant rectilignes, il est plus commode d'effectuer le calcul des coefficients par le procédé de Véréchaguine.

Exemple :

Résoudre le système hyperstatique indiqué sur la figure suivante :



- Degré d'hyperstaticité :  $D = 2$
- Le système de base est représenté sur la figure précédente.
- On établit les équations canoniques de la méthode des forces :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

- On trace le diagramme des moments des forces extérieures ( $M_p$ ) ainsi que les diagrammes des moments unitaires ( $m_1$ ) et ( $m_2$ ).
- On calcule les coefficients secondaires ( $\delta_{12} = \delta_{21}$ ) et les coefficients principaux ( $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ) en utilisant la méthode de Véréchaguine tout en respectant les inerties des barres.
- ( $\delta_{11} = \frac{7l^3}{6EI}$ ) ; ( $\delta_{22} = \frac{7l^3}{6EI}$ ) ; ( $\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{3l^3}{4EI}$ )
- ( $\Delta_{1p} = \frac{-9ql^4}{16EI}$ ) ; ( $\Delta_{2p} = \frac{ql^4}{3EI}$ )
- Après le calcul des coefficients ( $\delta_{ij}$ ) et ( $\Delta_{ip}$ ), on replace ces valeurs dans le système d'équation de la méthode des forces:

$$\left(\frac{7l^3}{6EI}\right) X_1 - \left(\frac{3l^3}{4EI}\right) X_2 - \frac{9ql^4}{16EI} = 0$$

$$\left(-\frac{3l^3}{4EI}\right) X_1 + \left(\frac{7l^3}{6EI}\right) X_2 + \frac{ql^4}{3EI} = 0$$

La résolution de ce système d'équation, nous permet de calculer les forces inconnues ( $X_1$ ) et ( $X_2$ ) .

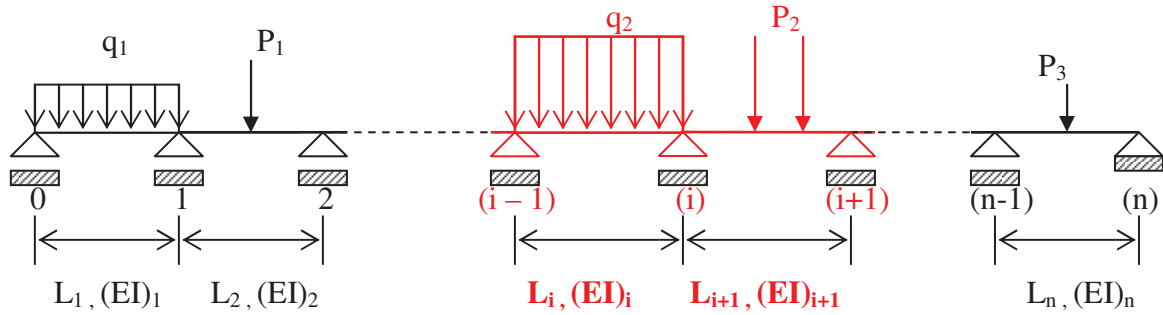
- Le système hyperstatique devient isostatique et on peut tracer facilement les diagrammes de (M), (N) et (T).

#### A-5) APPLICATION DE LA METHODE DES FORCES POUR LES POUTRES CONTINUES A APPUIS MULTIPLES (METHODE DES TROIS MOMENTS)

On appelle poutres continues les poutres reposant sur plus de deux appuis. Le nombre de liaisons surabondantes dans une poutre continue est égal au nombre d'appuis intermédiaires. Le degré d'hyperstaticité(D) dans ce cas est égal au nombre d'appuis intermédiaires. Si l'appui extrême est réalisé sous forme d'encastrement, le degré d'hyperstaticité s'accroît d'une unité.

La méthode des trois moments est une méthode bien adaptée pour la résolution des poutres continues, établie à partir de la méthode des forces. Elle consiste à découper une poutre continue en travées indépendantes, et faire introduire des moments sur appuis ( $M_i$ ) comme des inconnus hyperstatiques.

La rotation de chaque appui intermédiaire de la poutre continue est nulle, c'est la condition de compatibilité des déformations.



- On commence par la numérotation des appuis de zéro (0) à (n) ;
- Une travée (i) est délimitée par les deux appuis (i-1) et (i),

On aura donc :

- (n+1) appuis (0, 1, .....n)
- (n) travées : (1, 2, .....n)
- La portée de la travée (i) est (Li)
- La Rigidité de la travée (i) est (EI)i

Remarque :

Les inconnus déterminés par cette méthode sont les réactions et les moments au niveau des appuis.

On considère deux travées consécutives (i) et (i+1) d'une poutre hyperstatique, d'inerties respectives (EI)i et (EI)i+1, de longueurs respectives (Li) et (Li+1) et soumises respectivement à des charges (q2) et (P2) (voir figure précédente).

- $M_{i-1}$  : désigne le moment sur l'appui (i-1)
- $M_i$  : désigne le moment sur l'appui (i)
- $M_{i+1}$  : désigne le moment sur l'appui (i+1)

Remarque :

Le système équivalent est représenté par une suite de poutres simples appuyées et sollicitées par les charges extérieures et par les moments fléchissant inconnus appliqués à leurs extrémités. Les bouts de deux poutres adjacentes, tenant à un même appui (i) peuvent tourner d'un certain angle  $\Phi_{i\text{gauche}}$  et  $\Phi_{i\text{droite}}$ . Etant donné que chaque couple de telles sections dans la poutre continue hyperstatique de départ constitue, en réalité, et en vertu de la condition de continuité, leur angle de rotation réciproque doit être nul. De là, on obtient pour chaque appui intermédiaire :

$$\Phi_i = \Phi_{i\text{gauche}} + \Phi_{i\text{droite}} = 0$$

Selon leur nature, on a deux types de rotations :

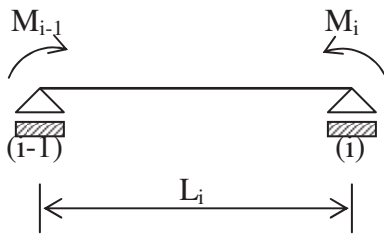
- Rotation due aux moments fléchissant ( $\varphi_{ig} + \varphi_{id}$ )
- Rotation due aux charges extérieures ( $\theta_{ig} + \theta_{id}$ )

Avec :  $\Phi_i^{\text{gauche}} = \theta_{ig} + \varphi_{ig}$  et  $\Phi_i^{\text{droite}} = \theta_{id} + \varphi_{id}$

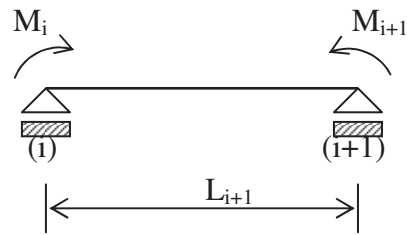
$$\Phi_i = \Phi_i^{\text{gauche}} + \Phi_i^{\text{droite}} = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\theta_{ig} + \theta_{id}) = 0$$

A-5-1) Calcul des rotations dues aux moments fléchissant ( $\varphi_{ig} + \varphi_{id}$ ):

Les rotations dues aux moments fléchissant peuvent être calculées par les méthodes étudiées en chapitre précédent. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode de Maxwell-Mohr, la méthode de Castigliano ou celle de Véréchaguine. Dans ce calcul, on va se servir de cette dernière.

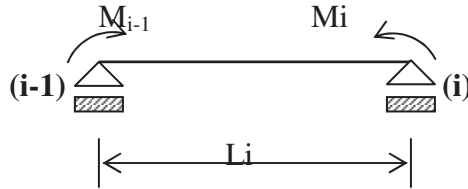


**A)- LA POUTRE [(i-1) → (i)]**



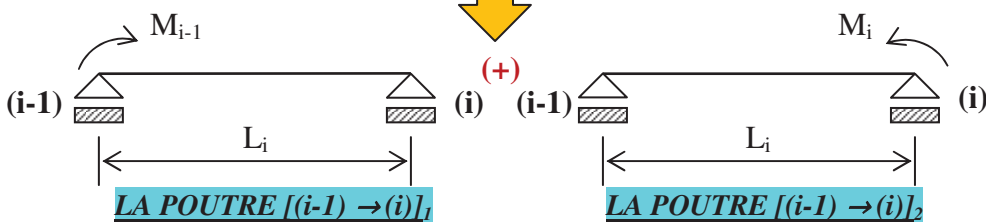
**B)- LA POUTRE [(i) → (i+1)]**

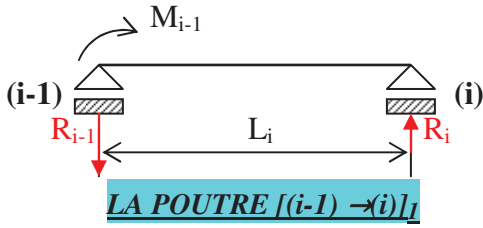
**A) LA POUTRE [(i-1) → (i)]**



(=)

**En appliquant le principe de la superposition**





La travée se trouve dans un état d'équilibre :  $\sum[M\%(i)] = 0$

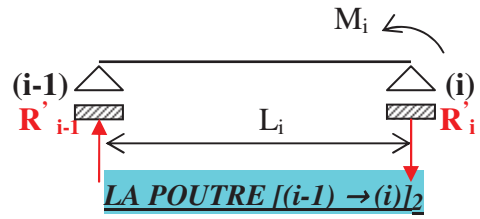
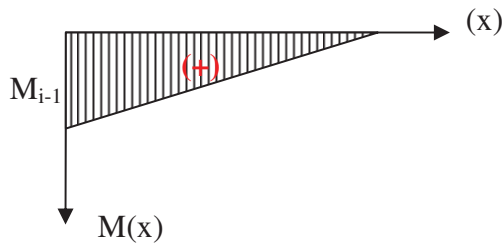
La réaction :  $R_{i-1} = -\frac{M_{i-1}}{L_i}$  ;

$$M(x) = -R_{i-1} \cdot X + M_{i-1}$$

$$M(x) = \left(-\frac{M_{i-1}}{L_i}\right) \cdot X + M_{i-1}$$

$$M(0) = M_{i-1}, \quad M(L_i) = 0$$

On trace le diagramme des moments fléchissant  $[M(X)]$



La travée se trouve dans un état d'équilibre :  $\sum[M\%(i-1)] = 0$

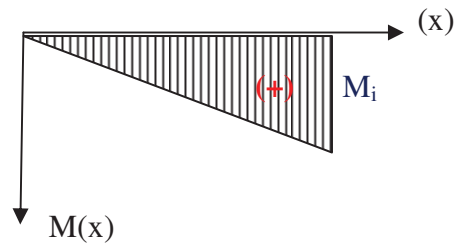
La réaction :  $R'_i = R'_{i-1} = \frac{M_i}{L_i}$  ;

$$M(x) = R'_{i-1} \cdot X$$

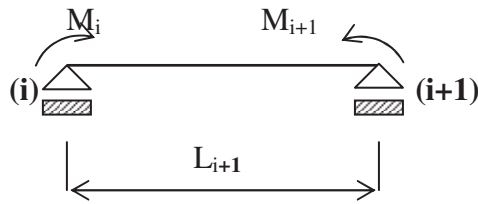
$$M(x) = \left(\frac{M_i}{L_i}\right) \cdot X$$

$$M(0) = 0, \quad M(L_i) = M_i$$

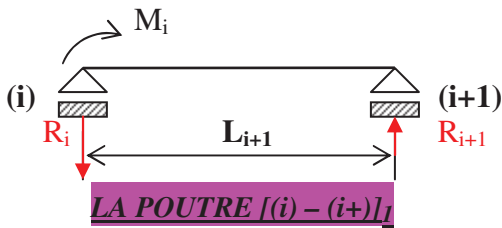
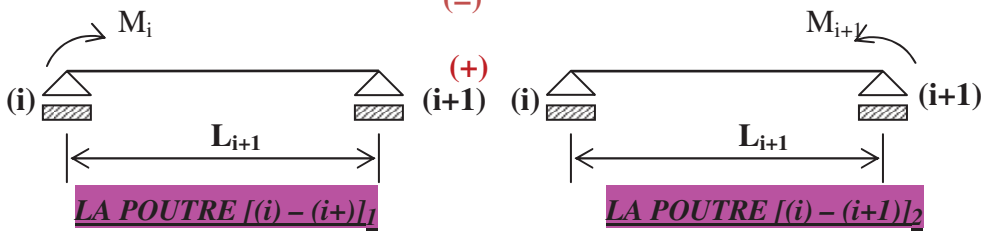
On trace le diagramme des moments fléchissant  $[M(X)]$



**B) LA POUTRE [(i) - (i+1)]**



**En appliquant le principe de la superposition**



La travée se trouve dans un état d'équilibre :  $\sum [M\%(i+1)] = 0$

La réaction :  $R_i = -\frac{M_i}{L_{i+1}}$  ;

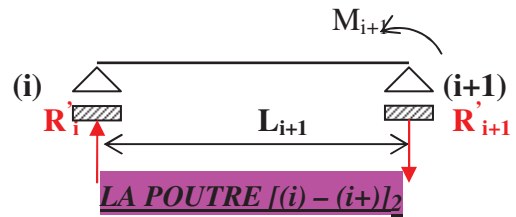
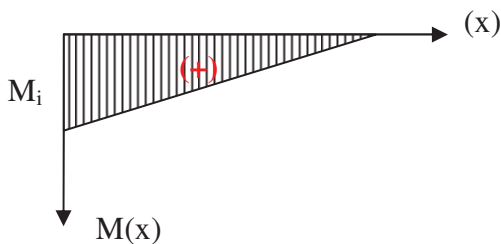
$M(x) = -R_i \cdot X + M_i$

$M(x) = \left(-\frac{M_i}{L_{i+1}}\right) \cdot X + M_i$

$M(0) = M_i$  ,  $M(L_{i+1}) = 0$

On trace le diagramme des moments

Fléchissant [M(X)]



La travée se trouve dans un état d'équilibre :  $\sum [M\%(i)] = 0$

La réaction :  $R'_i = R'_{i+1} = \frac{M_{i+1}}{L_{i+1}}$  ;

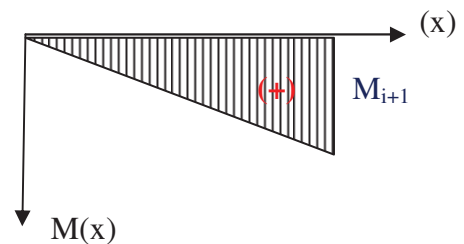
$M(x) = R'_i \cdot X$

$M(x) = \left(\frac{M_{i+1}}{L_{i+1}}\right) \cdot X$

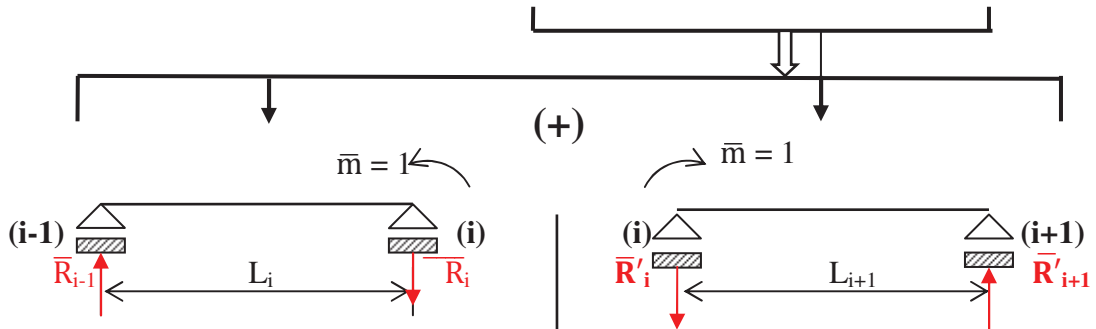
$M(0) = 0$  ,  $M(L_{i+1}) = M_{i+1}$

On trace le diagramme des moments

fléchissant de la poutre [M(X)]



Du moment qu'on veut calculer la déformation angulaire  $(\varphi_{ig} + \varphi_{id})$  au niveau du nœud **(i)**, on applique au niveau de ce nœud un moment unitaire ( $\bar{m} = 1$ ) et on applique par la suite la méthode Véréchaguine. On multiplie les deux diagrammes  $M(x)$  de la travée  $[(i-1) \rightarrow (i)]$ , ensuite ceux de la travée  $[(i) \rightarrow (i+1)]$  par les diagrammes unitaires ( $m$ ) des deux travées ensemble  $[(i-1) \rightarrow (i)]$  (+)  $[(i) \rightarrow (i+1)]$



**A)- LA POUTRE  $[(i-1) \rightarrow (i)]$**

La travée se trouve dans un état d'équilibre :  $\sum [M\%(i-1)] = 0$

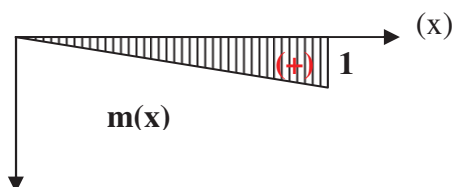
La réaction :  $\bar{R}_{i-1} = \frac{1}{L_i}$  ; ( $\bar{m} = 1$ )

$$m(x) = \bar{R}_{i-1} \cdot X$$

$$m(x) = \left( \frac{1}{L_i} \right) \cdot X$$

$$m(0) = (0) , \quad m(L_i) = 1$$

On trace le diagramme des moments fléchissant de la charge unitaire  $[m(x)]$ .



**B)- LA POUTRE  $[(i) \rightarrow (i+1)]$**

La travée se trouve dans un état d'équilibre :  $\sum [M\%(i+1)] = 0$

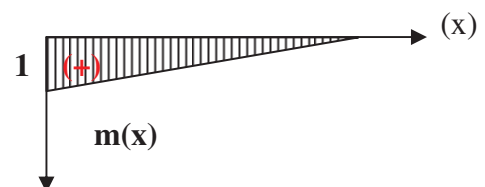
La réaction :  $\bar{R}'_i = \frac{1}{L_{i+1}}$  ; ( $\bar{m} = 1$ )

$$m(x) = -\bar{R}'_i \cdot X + 1$$

$$m(x) = -\left( \frac{1}{L_{i+1}} \right) \cdot X + 1$$

$$m(0) = 1 , \quad m(L_{i+1}) = 0$$

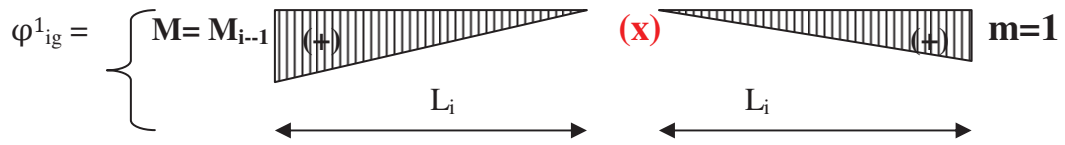
On trace le diagramme des moments fléchissant de la charge unitaire  $[m(x)]$ .



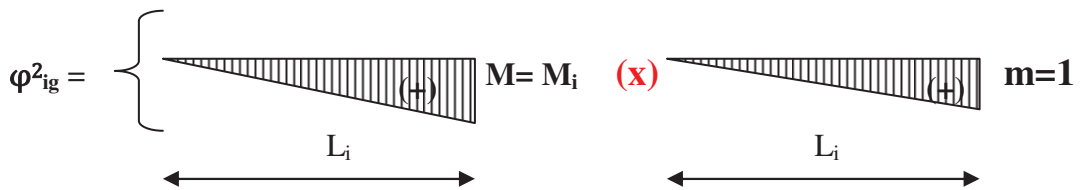


Le calcul de  $(\varphi_{ig} = \varphi^1_{ig} + \varphi^2_{ig})$  et de  $(\varphi_{id} = \varphi^1_{id} + \varphi^2_{id})$  se fait par la méthode Véréchaguine.

Avec :  $(EI)_i = (EI)_{i+1} = (EI) = cte$

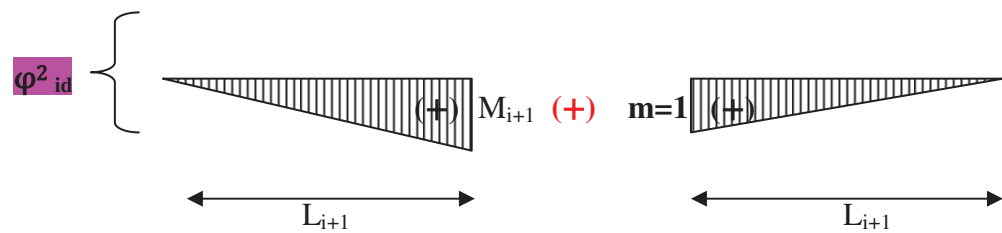
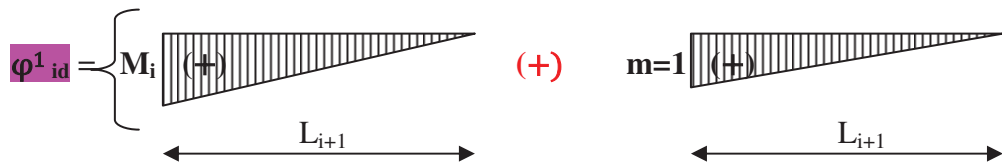


$$\varphi^1_{ig} = \frac{M_{i-1} \cdot 1 \cdot L_i}{6EI} = \frac{M_{i-1} \cdot L_i}{6EI}$$



$$\varphi^2_{ig} = \frac{M_i \cdot 1 \cdot L_i}{3EI} = \frac{M_i \cdot L_i}{3EI}$$

$$(\varphi_{ig} = \varphi^1_{ig} + \varphi^2_{ig}) = \frac{M_{i-1} \cdot L_i}{6EI} + \frac{M_i \cdot L_i}{3EI}$$



$$\varphi^1_{id} = \frac{M_i \cdot 1 \cdot L_{i+1}}{3EI} = \frac{M_i \cdot L_{i+1}}{3EI}$$

$$\varphi^2_{id} = \frac{M_{i+1} \cdot 1 \cdot L_{i+1}}{6EI} = \frac{M_{i+1} \cdot L_{i+1}}{6EI}$$

$$(\varphi_{id} = \varphi^1_{id} + \varphi^2_{id}) = \frac{M_i \cdot L_{i+1}}{3EI} + \frac{M_{i+1} \cdot L_{i+1}}{6EI}$$

$$\varphi_{ig} + \varphi_{id} = \frac{M_{i-1} \cdot L_i}{6EI} + \frac{M_i \cdot L_i}{3EI} + \frac{M_i \cdot L_{i+1}}{3EI} + \frac{M_{i+1} \cdot L_{i+1}}{6EI}$$

La condition d'équilibre du nœud (i) est :

$$\Phi_i = \Phi_{i,\text{gauche}} + \Phi_{i,\text{droite}} = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\theta_{ig} + \theta_{id}) = 0$$

$$\Phi_i = \frac{M_{i-1} \cdot L_i}{6EI} + \frac{M_i \cdot L_i}{3EI} + \frac{M_i \cdot L_{i+1}}{3EI} + \frac{M_{i+1} \cdot L_{i+1}}{6EI} + (\theta_{ig} + \theta_{id}) = 0$$

$$\mathbf{M_{i-1} L_i + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} + 6 EI(\theta_{ig} + \theta_{id}) = 0}$$

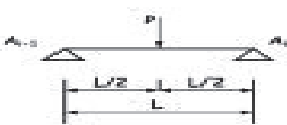
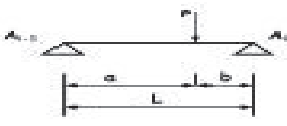
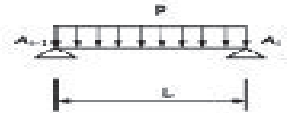
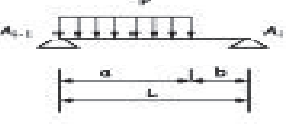
Cette équation s'appelle l'équation générale de la méthode des trois moments ou la méthode de Clapeyron. La résolution de cette équation permet le calcul des moments au niveau des appuis intermédiaires des poutres continues.

#### A-5-2) Calcul des rotations dues aux charges extérieures ( $\theta_{ig} + \theta_{id}$ ):

Sur le tableau suivant, on trouve les valeurs des rotations ( $\theta_{ig} + \theta_{id}$ ) au niveau des appuis pour différentes charges extérieures. On peut mettre :  $EI(\theta_{ig} + \theta_{id}) = A_i$

$$\mathbf{M_{i-1} L_i + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} + 6 A_i = 0}$$

Cas de poutre sur deux appuis simple de rigidité  $EI = Cte$ .

Cas de charge	$\theta_i'$ à droite de $A_{i-1}$	$\theta_i''$ à gauche de $A_i$
	$-\frac{PL^2}{16EI}$	$\frac{PL^2}{16EI}$
	$-\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$
	$-\frac{pL^3}{24EI}$	$\frac{pL^3}{24EI}$
	$-\frac{pa^2(2L-a)^2}{24EIL}$	$\frac{pa^2(2L^2-a^2)}{24EIL}$

A-5-3) Expressions du Moment fléchissant, Effort tranchant et Réactions d'appuis :

Pour une travée (i) située entre les appuis (i-1) et (i), on peut écrire les relations suivantes :

Moment fléchissant :

$$M_i(x) = m_i(x) + M_{i-1}\left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \frac{x}{L_i}$$

Où,

$m_i(x)$  : expression du moment fléchissant dû aux chargements extérieurs de la travée (i-1) supposée indépendante.

$M_i$  : moment sur appui (i)

Effort tranchant :

$$T_i(x) = t_i(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i}$$

Où,

$t_i(x)$  : expression de l'effort tranchant dû aux chargements extérieurs de la travée (i) supposée indépendante.

$M_i$  : moment sur appui (i)

Réactions d'appuis :

$$R_i = r_i^g + r_i^d + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}}$$

Où,

$r_i^d$  : la réaction à droite de l'appui (i) de la travée isostatique (i)

$r_i^g$  : la réaction à gauche de l'appui (i) de la travée isostatique (i+1)

A-5-4) Les étapes de la méthode des trois moments

L'utilisation de la méthode des trois moments nous conduit à suivre les étapes suivantes :

1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de la poutre (n) ;
2. Découper la poutre à (n) travées indépendantes (i) chacune de portée ( $L_i$ ) et de rigidité  $EL_i$ ;

**NB** : si l'un des appuis de rive est un encastrement, on le remplace par une travée fictive de rigidité flexionnelle infinie  $EI = \infty$

3. Pour chaque poutre isostatique de travée (i), déterminer :

- les réactions des appuis :  $r_{i-1}^d$  et  $r_i^g$

- les expressions efforts internes : l'effort tranchant  $t(x)$  et moment fléchissant  $m_i(x)$  ;

-les rotations des appuis :  $\theta_{i-1}^d$  et  $\theta_i^g$

4. Ecrire les (n) équations de 3 moments pour chaque deux travée consécutive (i) et (i+1):

$$M_{i-1} L_i + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} + 6 A_i = 0$$

5. Résoudre ces équations pour déterminer les moments ( $M_i$ ) sur appuis.

6. calculer les réactions, et les efforts internes par les formules suivantes :

- Les réactions des appuis :

$$R_i = r_i^g + r_i^d + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} \dots\dots\dots(1)$$

- L'effort tranchant :

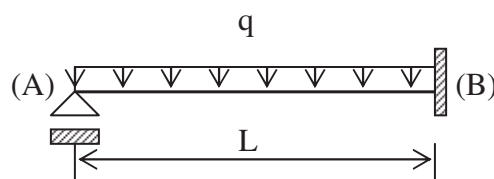
$$T_i(x) = t_i(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} \dots\dots\dots(2)$$

- Le moment fléchissant :

$$M_i(x) = m_i(x) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \frac{x}{L_i} \dots\dots\dots(3)$$

**Exercice** : Soit une structure représentée sur la figure suivante, simplement appuyée en (A) et encastree en (B), l'inertie (EI) est constante et soumise à une charge uniformément répartie (q).

- 1- Calculer le degré d'hyperstaticité de la structure.
- 2- Etablir l'équation des trois moments et calculer les moments au niveau des appuis.
- 3- Déterminer les expressions de T(x), M(x) et les réactions d'appuis.



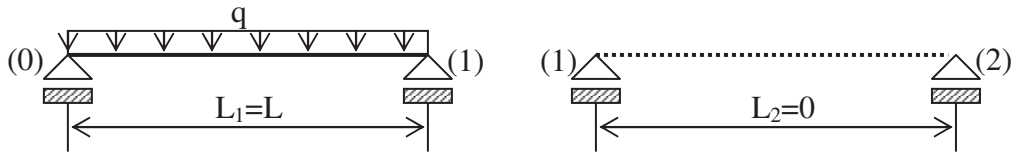
**Solution :**

1-  $D = 4 - 3 = 1$

2- L'équation générale des trois moments a la forme suivante :

$$M_{i-1}L_i + 2(L_i + L_{i+1})M_i + L_{i+1}M_{i+1} + 6A_i = 0$$

On supprime l'encastrement et on le remplace par une travée fictive.



**i = 1 :  $M_0L_1 + 2(L_1 + L_2)M_1 + L_2M_2 + 6A_1 = 0$**

$M_0 = M_2 = 0$  (appuis d'extrémités),  $L_1 = L$ ,  $L_2 = 0$

$$4LM_1 + 6A_1 = 0 \dots (1)$$

$$A_1 = 2 \cdot \left(\frac{qL^3}{24}\right) = \frac{qL^3}{12}$$

$$4LM_1 + 6 \frac{qL^3}{12} = 0 ; \text{ donc :}$$

$$\left[ M_1 = -\frac{qL^2}{8}, M_0 = M_2 = 0 \right]$$

**3- Poutre (0)-(1) :**

a) Réactions d'appuis : On fait appel à l'équation N° (1)

$$R_i = r_i^g + r_i^d + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} \dots (1)$$

$$i = 0 : R_0 = \frac{qL}{2} + \frac{M_1 - M_0}{L} = \frac{qL}{2} - \frac{qL}{8} \Rightarrow \left[ R_0 = \frac{3qL}{8} \right]$$

$$i = 1 : R_1 = \frac{qL}{2} + \frac{M_0 - M_1}{L} = \frac{qL}{2} + \frac{qL}{8} \Rightarrow \left[ R_1 = \frac{5qL}{8} \right]$$

b) Expression de l'effort tranchant T(x) : On fait appel à l'équation N° (2)

$$T_i(x) = t_i(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} \dots (2)$$

$$(i = 1) \quad T_1(x) = \frac{qL}{2} - qx + \frac{M_1 - M_0}{L}$$

$$T_1(x) = \frac{qL}{2} - qx + \frac{M_1 - M_0}{L}$$

$$T_1(x) = \frac{qL}{2} - qx - \frac{ql}{8}$$

$$\left[ T_1(x) = 3 \frac{qL}{8} - qx \right]$$

c) Expression du moment fléchissant(x): On fait appel à l'équation N° (3)

$$M_i(x) = m_i(x) + M_{i-1}\left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \frac{x}{L_i} \dots \dots (3)$$

$$(i = 1) : M_1(x) = \frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2} + M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_1 \frac{x}{L}$$

$$M_1(x) = \frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2} - \frac{qL^2}{8} \left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\left[ M_1(x) = 3 \frac{qL}{8} x - \frac{qx^2}{2} \right]$$

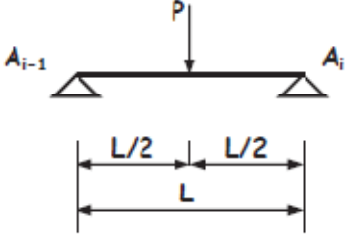
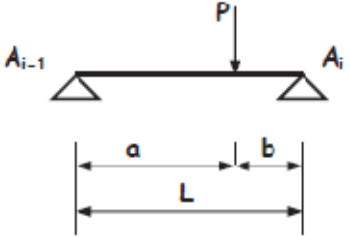
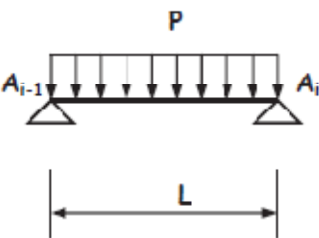
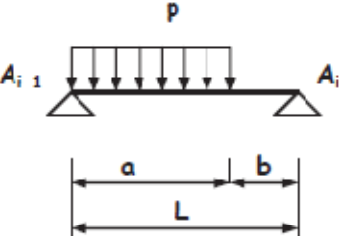


# **Annexe**

## Poutres continues – Théorème des trois moments

- Formulaire sous forme d'un tableau des rotations usuelles.

Cas de poutre sur deux appuis simple de rigidité  $E.I = Cte$

Cas de charge	$\theta_i'$ à droite de $A_{i-1}$	$\theta_i''$ à gauche de $A_i$
	$-\frac{PL^2}{16EI}$	$\frac{PL^2}{16EI}$
	$-\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$
	$-\frac{pL^3}{24EI}$	$\frac{pL^3}{24EI}$
	$\frac{pa^2(2L-a)^2}{24EIL}$	$\frac{pa^2(2L^2-a^2)}{24EIL}$