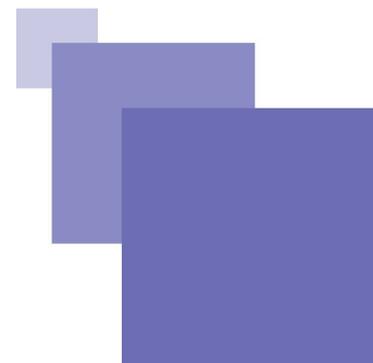


Chapitre 02

7.0

DR. ABDERRAHIM MOKHEFI
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ORAN
DÉPARTEMENT DE FORMATION PRÉPARATOIRE EN TECHNOLOGIE
EMAIL : ABDERRAHIM.MOKHEFI@ENP-ORAN.DZ

Table des matières



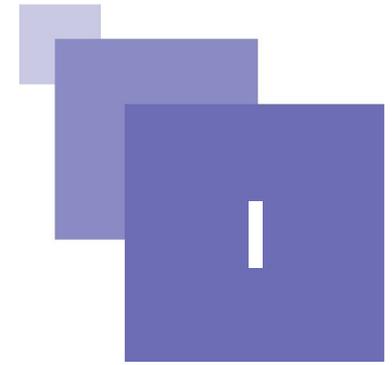
I - Chapitre 02. Statique des fluides	5
A. Notion de pression.....	6
1. Contraintes tangentielle et normale.....	6
2. Pression statique d'un fluide.....	7
3. Isotropie de la pression en point.....	8
4. Pression absolue et relative.....	9
B. Équation fondamentale de la statique des fluides.....	9
1. Détermination de l'équation de la statique des fluides.....	9
2. Transformation en coordonnées cylindriques.....	12
3. Transformation en coordonnées sphériques.....	14
C. Statique des fluides incompressibles - Hydrostatique.....	15
1. Équation fondamentale de l'hydrostatique.....	15
2. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans un réservoir.....	18
3. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans des tubes en U.....	21
D. Instrument de mesure de la pression.....	24
1. Instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre.....	24
2. Instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre.....	28
E. Théorème de Pascal.....	28
1. Énoncé du théorème.....	28
2. Preuve du théorème.....	28
3. Principe vérin hydraulique.....	29
F. Théorème d'Archimède.....	30
1. Énoncé du théorème.....	30
2. Principe de la force d'Archimède.....	30
3. Flottabilité des objets.....	31
4. Centre de poussée et de gravité d'un objet immergé.....	32
G. Calcul des forces de pression.....	32
1. Force de pression sur une paroi d'un réservoir.....	33
2. Centre de poussée hydrostatique sur une paroi plane.....	34
H. Hydrostatique dans un champ quelconque de forces.....	43
1. Hydrostatique dans un champ d'accélération constant.....	44
2. Hydrostatique dans un champ d'accélération constant horizontal.....	45
3. Hydrostatique dans un champ d'accélération de rotation uniforme.....	48
I. Notion sur la statique des fluides compressibles.....	52
J. Conclusion.....	54
K. Exercices du chapitre 02.....	55
1. Exercice : Exercice 01.....	55
2. Exercice : Exercice 02.....	55
3. Exercice : Exercice 03.....	55
4. Exercice 04.....	56

Solution des exercices

57

Chapitre 02.

Statique des fluides



Notion de pression	6
Équation fondamentale de la statique des fluides	9
Statique des fluides incompressibles - Hydrostatique	15
Instrument de mesure de la pression	24
Théorème de Pascal	28
Théorème d'Archimède	30
Calcul des forces de pression	32
Hydrostatique dans un champ quelconque de forces	43
Notion sur la statique des fluides compressibles	52
Conclusion	54
Exercices du chapitre 02	55

Objectifs

A l'issue de ce chapitre l'apprenant sera capable de :

- Identifier les concepts fondamentaux de la statique des fluides.
- Expliquer les principes de la statique des fluides tels que le principe de Pascal, la force de flottabilité et l'équilibre des fluides.
- Appliquer les principes de la statique des fluides à des situations concrètes, telles que la conception d'un barrage, le fonctionnement d'un manomètre ou la mesure de la pression atmosphérique.
- Décomposer les problèmes complexes en éléments plus simples et de les analyser.
- Identifier les causes et les effets des phénomènes observés en statique des fluides.

La statique des fluides ou est une discipline qui explore les propriétés et le comportement des fluides au repos, c'est-à-dire lorsque les forces en jeu sont équilibrées et qu'aucun mouvement global n'est observé. Dans ce chapitre, nous plongerons dans les concepts fondamentaux de la statique des fluides, mettant en lumière les pressions, les forces de flottabilité et les lois qui régissent ces phénomènes. L'étude de la statique des fluides est essentielle pour comprendre

comment les liquides et les gaz réagissent aux forces qui agissent sur eux, qu'il s'agisse d'applications simples telles que les baromètres, ou de situations plus complexes ou la conception de structures immergées.

Hypothèse de la statique des fluides

Les lois de calcul exposées dans ce chapitre trouvent leur fondement dans l'hypothèse essentielle d'un référentiel fixe ou encore absolu. Cette hypothèse postule l'existence d'un cadre de référence immobile par rapport auquel les forces, les pressions et les interactions au sein des fluides sont étudiées.

Conditions d'équilibre des fluides

Les conditions d'équilibre des fluides, au cœur de la statique des fluides, définissent les états cinétiques spécifiques pour lesquels les lois de calcul de la statique des fluides peuvent être appliquées. Ces lois, qui guident notre compréhension des forces et des pressions dans les fluides, sont élaborées en se basant sur deux scénarios clés :

- **Fluide au repos** : l'équilibre se traduit par une absence de mouvement global dans le liquide, et les forces internes et externes sont équilibrées sous le champ de gravité.
- **Fluide subissant une accélération en bloc** : le système est introduit dans un champ de force uniforme en tout point. Même si le système est en mouvement, il peut néanmoins être en équilibre lorsque toutes les parties du liquide subissent la même accélération, garantissant ainsi son déplacement est en bloc, voir figure 2.1 (cf. FIGURE 2.1 Fluide au repos sous gravité et fluide accéléré en bloc. p 6).

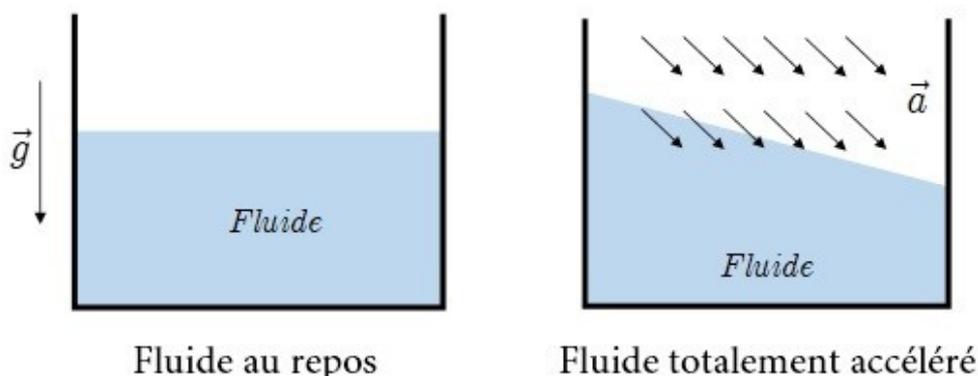


FIGURE 2.1 Fluide au repos sous gravité et fluide accéléré en bloc.

Quel que soit le scénario considéré, qu'il s'agisse d'un fluide au repos ou soumis à un champ d'accélération uniforme, l'absence de mouvement relatif entre les différentes couches du fluide (due à l'absence de frottement interne) permet de considérer le fluide comme un fluide parfait.

A. Notion de pression

1. Contraintes tangentielle et normale

Dans un milieu fluide schématisé dans la figure 2.2 (cf. FIGURE 2.2 Forces normale et tangentielle sur un élément de surface d'un fluide. p 7) par deux partie (1) et (2), la force F que la partie (1) exerce sur la partie (2) à travers un élément de surface réel ou fictif dS a une direction quelconque. Cependant, cette force se

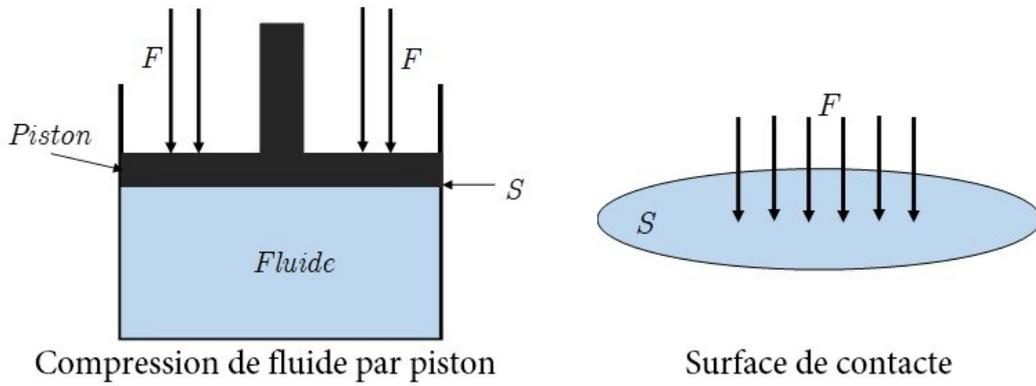


FIGURE 2.3 Fluide soumis une force uniforme de pression par un piston.

La connaissance de la pression en un point revêt une importance en statique des fluides. En effet, lorsque la force de pression F n'est pas uniformément répartie sur une surface S , il est impératif de déterminer la pression à chaque point afin de calculer la pression totale.

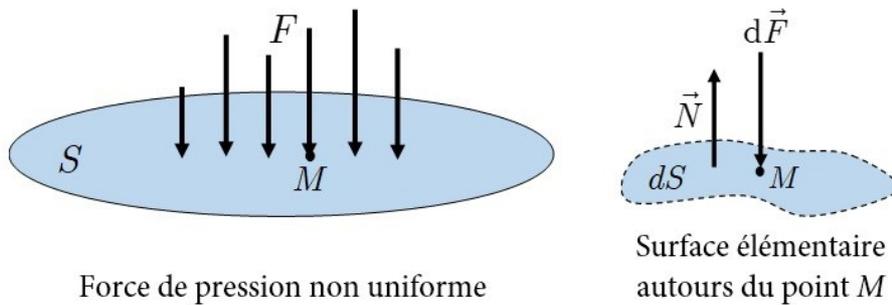


FIGURE 2.4 Pression en un point.

La force totale F agissant sur la surface S est déterminée par :

$$\vec{F} = \iint_S p dS \implies F \vec{N} = \iint_S p \vec{N} dS \implies F = \iint_S p dS \quad (2.4)$$

La pression statique dans ce cas-là est représenté par la variation de la force de pression F dans une surface élémentaire dS au point M , voir figure 2.4 (cf. FIGURE 2.4 Pression en un point. p 8). En dérivant Eq. (2.4) (cf. p 8) :

$$\frac{dF}{dS}_M = \frac{d}{dS} \iint_S p dS_M \implies p_M = \frac{dF}{dS}_M \quad (2.5)$$

On obtient de Eq. (2.5) (cf. p 8) tout simplement :

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (2.6)$$

3. Isotropie de la pression en point

Dans un fluide statique, la pression est isotrope, ce qui signifie que la même valeur de pression est exercée dans toutes les directions à partir d'un point donné M (White, 2016) [1]

4. Pression absolue et relative

a) Pression absolue

La pression absolue P_a est la pression mesurée par rapport au vide complet, c'est-à-dire la pression absolue zéro. Elle inclut la pression atmosphérique ambiante en plus de la pression résultant d'autres sources, comme une pression de liquide ou de gaz dans un récipient.

b) Pression relative

La pression relative P_r , également appelée pression différentielle, est la différence entre la pression absolue à un point donné et une référence de pression spécifique. Cette référence peut être la pression atmosphérique environnante ou toute autre valeur de pression choisie comme point de référence.

$$p_a = p_r + p_{atm} \quad (2.7)$$

La pression relative permet de mesurer les variations de pression par rapport à une valeur de référence, indépendamment de la pression absolue ambiante. Cette pression présente la valeur affichée par le manomètre mécanique présenté dans la figure 2.5 (cf. FIGURE 2.5 Instrument de mesure de la pression relative - Manomètre. p 9).



FIGURE 2.5 Instrument de mesure de la pression relative - Manomètre.

B. Équation fondamentale de la statique des fluides

1. Détermination de l'équation de la statique des fluides

Le but de cette partie est de fournir une relation quantitative entre la pression, la densité du fluide, l'accélération et la position d'un point de fluide au repos. Par conséquent, cette relation permettra de calculer la pression à différentes positions dans un fluide statique. Pour ce faire, on considère un élément parallélépipédique ΔV d'un fluide de masse volumique ρ au repos dans un réservoir muni de repère Cartésien $(Oxyz)$ dont \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires comme il est présenté dans la figure 2.6 (cf. FIGURE 2.6 Volume de contrôle d'un fluide au repos. p 10).

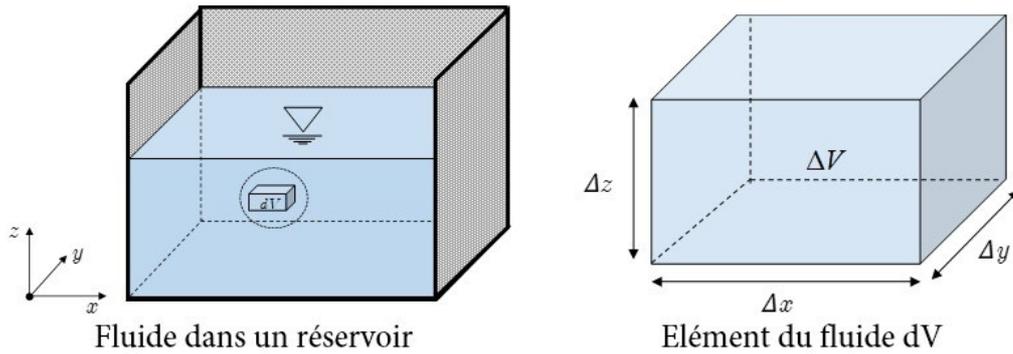


FIGURE 2.6 Volume de contrôle d'un fluide au repos.

L'élément du fluide ΔV a la dimension $\Delta x \Delta y \Delta z$. Les seules forces agissant sur cet élément de fluide sont les forces de pression et les forces de volume.

Les forces de pression notée F_p agissent sur les surfaces latérales de l'élément de fluide dV c'est-à-dire sur les 6 facettes du parallélépipède. Les forces de pressions F_{p_x} et $F_{p_{x+\Delta x}}$ agissent sur les deux facettes parallèles d'aire $\Delta y \Delta z$, les forces F_{p_y} et $F_{p_{y+\Delta y}}$ sur les deux facettes parallèles d'aire $\Delta x \Delta z$ et les forces F_{p_z} et $F_{p_{z+\Delta z}}$ sur les deux facettes parallèles d'aire $\Delta x \Delta y$, voir figure 2.7 (cf. FIGURE 2.7 Forces de surface (pression) et de volume agissant sur un élément de fluide. p 10).

Quant aux forces de volume, elles agissent sur le volume de contrôle et sont globaliser par leur vecteur résultant \vec{F} de composantes Cartésiennes F_x , F_y et F_z , voir figure 2.7 (cf. FIGURE 2.7 Forces de surface (pression) et de volume agissant sur un élément de fluide. p 10).

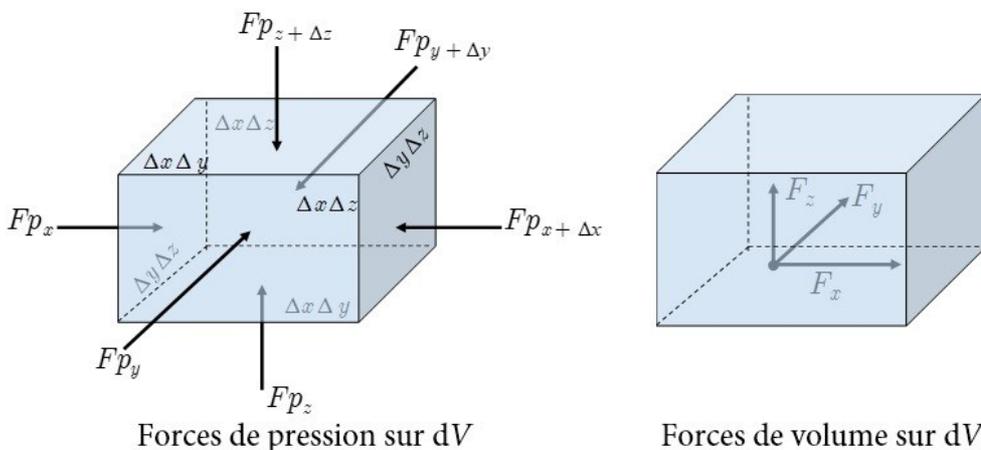


FIGURE 2.7 Forces de surface (pression) et de volume agissant sur un élément de fluide.

Nous appliquons le premier principe de Newton, le principe fondamental de la statique sur le volume ΔV , puis on prolonge pour tous le fluide au repos, ainsi nous avons :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_p + \vec{F} \quad (2.8)$$

Projections les vecteurs des deux membres de l'équation Eq. (2.8) (cf. p 10) suivant les axes de coordonnées Cartésiennes x , y et z en se basant sur la figure 2.1 (cf. FIGURE 2.1 Fluide au repos sous gravité et fluide accéléré en bloc. p 6):

$$\begin{aligned} O_x : F_{px} - F_{x+\Delta x} + F_x &= 0 \\ O_y : F_{py} - F_{y+\Delta y} + F_y &= 0 \\ O_z : F_{pz} - F_{z+\Delta z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'après la définition de la pression Eq. (2.3) (cf. p 7), la force de pression est $F_p = p \cdot S$. Ainsi :

$$\begin{aligned} O_x : F_{px} &= p_x dydz \\ O_y : F_{py} &= p_y dx dz \\ O_z : F_{pz} &= p_z dx dy \end{aligned} \quad (2.10)$$

Comme les aires des facettes parallèles sont égales, on a également :

$$\begin{aligned} O_x : F_{p_{x+\Delta x}} &= p_{x+\Delta x} dydz \\ O_y : F_{p_{y+\Delta y}} &= p_{y+\Delta y} dx dz \\ O_z : F_{p_{z+\Delta z}} &= p_{z+\Delta z} dx dy \end{aligned} \quad (2.11)$$

D'autre part, nous pouvons exprimer toujours les force de volume F comme le produit de la masse du fluide de l'élément ΔV qui est $\rho \Delta V$ par l'inverse d'une accélération, soit $a = (a_x, a_y, a_z)$. La masse du fluide est également donnée par :

$$m = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.12)$$

Ainsi les composantes de la résultante des forces de volume F sont :

$$\begin{aligned} O_x : F_x &= \rho a_x \Delta x \Delta y \Delta z \\ O_y : F_y &= \rho a_y \Delta x \Delta y \Delta z \\ O_z : F_z &= \rho a_z \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.13)$$

Substituons ces forces Eqs. (2.10) (cf. p 11)-(2.12) (cf. p 11) dans les équations projetées Eq. (2.9) (cf. p 11) :

$$\begin{aligned} O_x : p_x \Delta y \Delta z - p_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \rho a_x \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \\ O_y : p_y \Delta x \Delta z - p_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \rho a_y \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \\ O_z : p_z \Delta x \Delta y - p_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y + \rho a_z \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Divisons maintenant les deux membres de chaque équation Eq. (2.14) (cf. p 11) par le volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} O_x : \frac{p_x - p_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho a_x &= 0 & O_x : -\frac{p_{x+\Delta x} - p_x}{\Delta x} + \rho a_x &= 0 \\ O_y : \frac{p_y - p_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \rho a_y &= 0 \implies O_y : -\frac{p_{y+\Delta y} - p_y}{\Delta y} + \rho a_y &= 0 \\ O_z : \frac{p_z - p_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \rho a_z &= 0 & O_z : -\frac{p_{z+\Delta z} - p_z}{\Delta z} + \rho a_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si l'élément de contrôle est infiniment petit, c'est-à-dire de dimensions infiniment petites, nous avons : $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ et $\Delta z = dz$ et tendent vers 0. D'autre part, d'après la définition du nombre dérivé nous avons :

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{p_{\xi+\Delta\xi} - p_{\xi}}{\Delta\xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (2.16)$$

Par conséquent, en calculant la limites des deux membres des équations Eq. (2.15) (cf. p 11) :

$$\begin{aligned} O_x : -\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{p_{x+\Delta x} - p_x}{\Delta x} + \rho a_x = 0 & \quad O_x : -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_x = 0 \\ O_y : -\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{p_{y+\Delta y} - p_y}{\Delta y} + \rho a_y = 0 & \implies O_y : -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho a_y = 0 \\ O_z : -\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{p_{z+\Delta z} - p_z}{\Delta z} + \rho a_z = 0 & \quad O_z : -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ces équations Eq. (2.17) (cf. p 12) présentent les équations fondamentales de la statique des fluides. Sachant que le vecteur de dérivées de pression par rapport aux trois coordonnées de l'espace $(\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, \partial p/\partial z)$ présente le gradient de pression noté ∇p , ou encore *grad* p , l'écriture vectorielle des équations fondamentales de la statique des fluides Eq. (2.17) (cf. p 12) donne une seule équation différentielle telle que :

$$-\nabla p + \rho \vec{a} = 0 \quad (2.18)$$

Ou encore :

$$-\text{grad}p + \rho \vec{a} = 0 \quad (2.19)$$

Cette équation Eq. (2.19) (cf. p 12) permet de déterminer la pression du fluide au sein du réservoir à n'importe quelle position (x, y, z) et en fonction de la masse volumique. On note que la pression statique est une fonction scalaire de la position $p = p(x, y, z, \rho)$.

2. Transformation en coordonnées cylindriques

Après avoir établi l'équation fondamentale de l'hydrostatique en coordonnées cartésiennes et sous forme vectorielle, il est temps d'élargir cette notion en passant aux coordonnées cylindriques. En effectuant cette transformation, nous pouvons reformuler l'équation Eq. (2.19) (cf. p 12) en une forme plus adaptée permettant d'aborder des situations et des configurations différentes à savoir des systèmes présentant des symétries cylindriques.

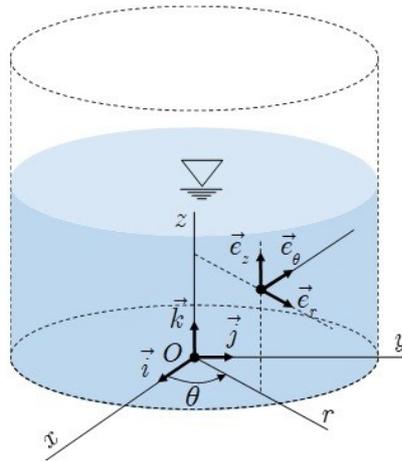


FIGURE 2.8 Système de coordonnées cylindriques.

Dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , comme montré dans la figure 2.8 (cf. FIGURE 2.8 Système de coordonnées cylindriques. p 13), $r \geq 0$ décrit la direction radiale, le nombre réel θ décrit la direction tangentielle et z présente la direction verticale. La relation entre ces coordonnées et les coordonnées Cartésiennes est établie par :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (2.20)$$

Si $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et \vec{e}_z présentent les vecteurs unitaires du système cylindrique, leur relation avec les vecteurs unitaires du système Cartésien est :

$$\vec{i} = (\cos \theta)\vec{e}_r - (\sin \theta)\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{j} = (\sin \theta)\vec{e}_r + (\cos \theta)\vec{e}_\theta \quad (2.21)$$

L'opérateur nabla en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad (2.22)$$

Le vecteur accélération \vec{a} est défini par :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a_x((\cos \theta)\vec{e}_r - (\sin \theta)\vec{e}_\theta) + a_y((\sin \theta)\vec{e}_r + (\cos \theta)\vec{e}_\theta) + a_z\vec{e}_z \quad (2.23)$$

Ou encore :

$$\vec{a} = [a_x \cos \theta + a_y \sin \theta]\vec{e}_r + [-a_x \sin \theta + a_y \cos \theta]\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z \quad (2.24)$$

Notons tout simplement :

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z \quad (2.25)$$

Avec $a_r = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta$ désigne l'accélération radiale et $a_\theta = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta$ désigne l'accélération tangentielle. Développons ainsi l'équation fondamentale en coordonnées cylindriques en substituant Eqs. (2.22) (cf. p 13) et (2.25) (cf. p 13) dans Eq. (2.19) (cf. p 12) :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)p + \rho(a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z) = 0 \quad (2.26)$$

Simplifions cette dernière équation Eq. (2.26) (cf. p 14), nous obtenons :

$$-\frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z + \rho a_r\vec{e}_r + \rho a_\theta\vec{e}_\theta + \rho a_z\vec{e}_z = 0 \quad (2.27)$$

Après factorisation des vecteur unitaires dans Eq. (2.27) (cf. p 14), on obtient :

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_r\right)\vec{e}_r + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho a_\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z\right)\vec{e}_z \quad (2.28)$$

Selon les directions radiale, tangentielle et axiale, le système fondamental de la statique des fluides en coordonnées cylindriques Eq. (2.28) (cf. p 14) s'écrit :

$$\begin{aligned} r : -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_r &= 0 \\ \theta : -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho a_\theta &= 0 \\ z : -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

3. Transformation en coordonnées sphériques

La transformation de l'équation fondamentale de la statique des fluides en coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) est une étape importante pour étendre la compréhension de la statique des fluides à des situations où les symétries sphériques sont présentes. Les coordonnées sphériques varient dans les intervalles suivants : $r \geq 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

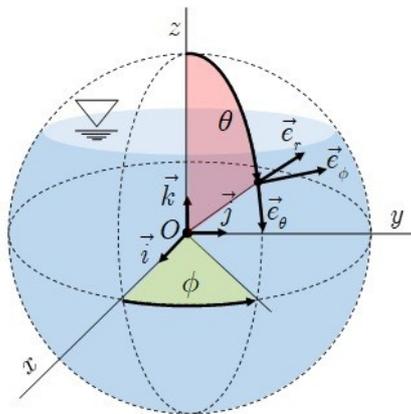


FIGURE 2.9 Système de coordonnées sphériques.

Dans un système de coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) comme présente la figure 2.9 (cf. FIGURE 2.9 Système de coordonnées sphériques. p 14), r décrit la direction radiale, ϕ la direction tangentielle et θ la direction longitudinale. La relation entre ces coordonnées et les coordonnées Cartésiennes est établie par :

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.30)$$

Si \vec{e}_r , \vec{e}_ϕ et \vec{e}_θ présentent les vecteurs unitaires du système sphérique, leur relation avec les vecteurs unitaires du système Cartésien est :

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (\sin \theta \cos \phi) \vec{e}_r + (\sin \phi) \vec{e}_\phi + (\cos \theta \cos \phi) \vec{e}_\theta \\ \vec{j} &= (\sin \theta \sin \phi) \vec{e}_r + (\cos \phi) \vec{e}_\phi + (\cos \theta \sin \phi) \vec{e}_\theta \\ \vec{k} &= (\cos \theta) \vec{e}_r + (\sin \theta) \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

L'opérateur « ∇ » en coordonnées sphérique est donné par :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (2.32)$$

Le vecteur accélération \vec{a} en coordonnée sphérique est exprimé par :

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\phi \vec{e}_\phi + a_\theta \vec{e}_\theta \quad (2.33)$$

Avec a_r , a_ϕ et a_θ décrivent respectivement les accélérations, radiale, tangentielle et longitudinale. L'équation fondamentale de la statique en coordonnées sphérique est obtenue en substituant Eqs. (2.33) (cf. p 15) et (2.32) (cf. p 15) dans Eq. (2.19) (cf. p 12), ainsi :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \vec{e}_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \rho(a_r \vec{e}_r + a_\phi \vec{e}_\phi + a_\theta \vec{e}_\theta) = 0 \quad (2.34)$$

On obtient tout simplement après factorisation des vecteurs unitaires dans Eq. (2.34) (cf. p 15) :

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a_r\right) \vec{e}_r + \left(-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho a_\phi\right) \vec{e}_\phi + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho a_\theta\right) \vec{e}_\theta \quad (2.35)$$

Suivant les directions radiale, tangentielle et longitudinale le système fondamental de la statique des fluides en coordonnées sphériques Eq. (2.35) (cf. p 15) s'écrit :

C. Statique des fluides incompressibles - Hydrostatique

L'hydrostatique représente une branche spécifique de la statique des fluides, se focalisant sur les liquides incompressibles au repos ou encore en équilibre en présence de la gravité. Contrairement à l'équation fondamentale de la statique des fluides, qui reste valable pour les fluides compressibles, l'hydrostatique étudie des fluides avec une masse volumique constante, en limitant les forces de volume aux forces gravitationnelles (Maalem, 1993) [2].

1. Équation fondamentale de l'hydrostatique

En substituant l'accélération \vec{a} apparaissant dans l'expression de la force de volume F du système d'équations dans le bilan général Eq. (2.17) (cf. p 12) par l'accélération gravitationnelle g , l'équation fondamentale de l'hydrostatique Eq. (2.17) (cf. p 12) se simplifie à :

$$-\text{grad}p + \rho\vec{g} = 0 \quad (2.37)$$

Étant donné que l'accélération due à la gravité agit le long de l'axe vertical, décrivant la cote z , elle peut être représentée comme $\vec{g} = (0, 0, g)$. Cette représentation tient compte du fait que l'accélération gravitationnelle est dirigée vers le bas, le long de l'axe positif z , en coordonnées Cartésiennes.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 & (a) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 & (b) \\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g &= 0 & (c) \end{aligned} \quad (2.38)$$

D'après les deux premières équations Eqs. (2.38a) (cf. p 16) et (2.38b) (cf. p 16), les dérivées partielles de la pression par rapport aux variables de Coordonnées x et y sont nulles. Alors que la pression hydrostatique ne dépend pas de la masse volumique, elle ne dépend pas de coordonnées x et y . Ainsi, la pression devient une fonction de z , $p = p(z)$. Par conséquent, seule l'équation Eq. (2.38c) (cf. p 16) reste présente dans le système Eq. (2.38) (cf. p 16). En outre, comme la pression dépend d'une seule variable d'espace, le terme de dérivée partielle est remplacé par celui de la dérivée totale et l'équation Eq. (2.38c) (cf. p 16) devient ordinaire :

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \quad (2.39)$$

Nous pouvons en effet intégrer indéfiniment l'équation Eq. (2.39) (cf. p 16) pour obtenir la distribution de pression le long de la direction verticale z comme suit :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \implies dp = -\rho g dz \implies \int dp = \int (-\rho g) dz \quad (2.40)$$

La distribution de la pression depuis l'équation Eq. (2.40) (cf. p 16) est donnée par :

$$p(z) = -\rho g z + C \quad (2.41)$$

Avec C une constante. Si l'on connaît la valeur d'une pression p_0 à certain niveau z_0 , on peut déterminer la constante d'intégration C en substituant dans l'équation Eq. (2.41) (cf. p 16) :

$$p(z_0) = -\rho g z_0 + C = p_0 \implies C = p_0 + \rho g z_0 \quad (2.42)$$

En substituant Eq. (2.42) (cf. p 16) dans Eq. (2.41) (cf. p 16), on obtient :

$$p(z) = -\rho g z + p_0 + \rho g z_0 \quad (2.43)$$

On obtient tout simplement après simplification :

$$p(z) - p_0 = -\rho g(z - z_0) \quad (2.44)$$

L'équation Eq. (2.44) (cf. p 17) exprime que la variation de pression entre deux points au sein d'un fluide incompressible en équilibre est équivalente au poids du volume de fluide multiplié par la hauteur ($z-z_0$). Ce volume possède une base ayant une unité de surface et une hauteur égale à la différence de niveau entre les deux points considérés.

Il est important de noter qu'en hydrostatique, la distribution de la pression ne dépend pas des coordonnées horizontales x et y . Par conséquent, la pression admet une valeur constante en tous points de chaque plan horizontal. Cela se traduit par la formation de plans d'iso-pression, isobare ou surface équipotentielle de pression, où les valeurs de pression restent uniformes sur des surfaces parallèles au sol.

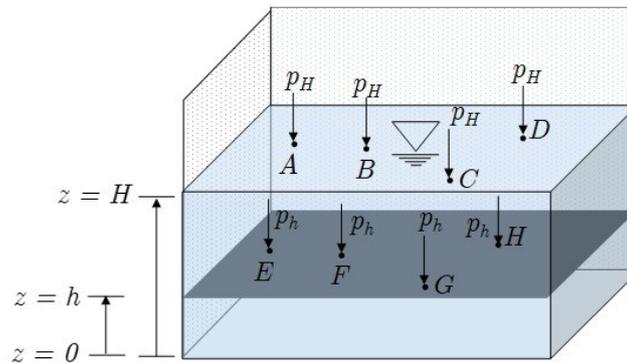


FIGURE 2.10 Surfaces isobares d'un fluide dans un réservoir.

D'après la figure 2.10 (cf. FIGURE 2.10 Surfaces isobares d'un fluide dans un réservoir. p 17), les points A, B, C et D se situant au niveau du plan horizontal $z = H$ ont la pression p_H . C'est-à-dire $p_A = p_B = p_C = p_D = p_H$. D'autre part, les points E, F, G et H se situant dans le plan $z = h$ ont également la même pression p_h . En connaissant, la pression au plan $z = H$, nous pouvons aboutir en se basant sur la loi fondamentale de l'hydrostatique Eq. (2.44) (cf. p 17) à :

$$p(z) - p_{ref} = -\rho g(z - z_{ref}) \quad (2.45)$$

La pression de référence est p_H correspondante à $z_{ref} = H$, ainsi :

$$p_h = p(H) - p_H = -\rho g(h - H) \quad (2.46)$$

C'est-à-dire :

$$p_h = p_H + \rho g(H - h) \quad (2.47)$$

Puisque $H - h$ est positive, la pression p_h est plus importante que p_H . En conséquence, la pression du fond du réservoir p_0 est encore plus importante. De Eq. (2.47) (cf. p 17) On peut écrire :

$$p_h + \rho gh = p_H + \rho gH \quad (2.48)$$

Si l'on divise les deux membres de Eq. (2.48) (cf. p 17) par ρg , on obtient :

$$\frac{p_h}{\rho g} + h = \frac{p_H}{\rho g} + H \quad (2.49)$$

La constante $ph/\rho g + h = Cte$ présente une unité de dimension, elle est appelée hauteur piézométrique notée h_z . Étant donné qu'il est envisageable de répéter le même processus de démonstration pour chaque point, nous sommes en mesure de formuler :

$$h_z = \frac{p}{\rho g} + h \tag{2.50}$$

En définissant la pression constante p_z appelée pression motrice, on peut écrire :

$$p + \rho gh = p_z \tag{2.51}$$

Résumé

Dans un fluide incompressible au repos, la pression motrice reste constante. Cette relation est applicable indépendamment de la forme que prend le liquide, pourvu qu'il soit homogène et immobile. Généralement nous calculons la pression comme suit :

- La pression en bas = La pression en haut + ρg distance
- La pression en haut = La pression en bas - ρg distance

2. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans un réservoir

L'hydrostatique des fluides non miscibles, tels que l'eau et l'huile, englobe les interactions entre ces deux liquides miscibles au repos sous l'influence de la gravité. La pression à l'interface entre les deux fluides dépend de leurs densités respectives et de la hauteur de réservoir. Conformément à l'équilibre hydrostatique, les pressions aux interfaces doivent être équilibrées pour maintenir un état stable.

a) Deux fluides non-miscibles dans un réservoir

Soient de fluides (1) et (2) non miscibles de masses volumique ρ_1 et ρ_2 (respectivement) telles que $\rho_1 > \rho_2$. Dans cette configuration, deux fluides non miscibles sont placés dans un réservoir dont la surface libre du second fluide est exposée à l'air libre (pression atmosphérique), comme illustré dans la figure 2.11 (cf. FIGURE 2.10 Surfaces isobares d'un fluide dans un réservoir. p 17). La première couche de fluide s'étend sur une hauteur h_1 , tandis que la deuxième couche de fluide occupe une hauteur h_2 .

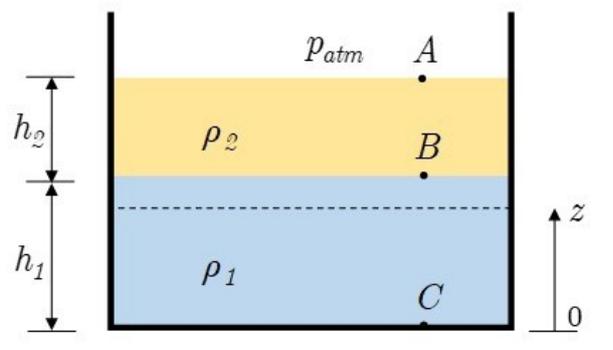


FIGURE 2.11 Deux fluides non-miscibles dans un réservoir.

Déterminons la distribution de la pression le long de la verticale à une position quelconque de coordonnée z . Pour ce faire, nous appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique Eq. (2.51) (cf. p 18). Ainsi, à chaque niveau z , la pression motrice est constante :

$$p(z) + \rho g z = cte \quad (2.52)$$

Avec $0 < z < h_1 + h_2$. Nous connaissons d'autre part la pression à la surface libre $p_A = p_{atm}$ au niveau $z = h_1 + h_2$, ainsi nous avons :

$$p(z) + \rho g z = p_{atm} + \rho g(h_1 + h_2) \quad (2.53)$$

Mais la masse volumique dans Eq. (2.53) (cf. p 19) varie selon la position comme suit :

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & \text{si } 0 < z < h_1 \\ \rho_2, & \text{si } h_1 < z < h_1 + h_2 \end{cases} \quad (2.54)$$

Déterminons alors la pression à l'interface entre le fluide (1) et (2) notée p_B . L'interface correspond à $z = h_1$ au-dessus de laquelle se trouve le fluide (2), ainsi, on a :

$$p_B + \rho_2 g h_1 = p_{atm} + \rho_2 g(h_1 + h_2) \implies p_B = p_{atm} + \rho_2 g(h_1 + h_2) - \rho_2 g h_1 \quad (2.55)$$

Nous trouvons après simplification :

$$p_B = p_{atm} + \rho_2 g h_2 \quad (2.56)$$

La distribution de la pression dans la couche du fluide (2) pour $h_1 < z < h_1 + h_2$:

$$p(z) + \rho_2 g z = p_{atm} + \rho_2 g(h_1 + h_2) \quad (2.57)$$

On a également l'expression suivante :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_2 g(h_1 + h_2 - z) \quad (2.58)$$

Dans la deuxième couche, on a la pression p_B , ainsi pour $0 < z < h_1$:

$$p(z) + \rho_1 g z = p_B + \rho_1 g h_1 \implies p(z) = p_B + \rho_1 g(h_1 - z) \quad (2.59)$$

Si l'on substitue la pression p_B dans cette dernière équation, on obtient :

$$p(z) = p_{atm} + g[\rho_2 h_2 + \rho_1(h_1 - z)] \quad (2.60)$$

Nous assemblons les distributions de la pression Eqs. (2.58) (cf. p 19) et (2.60) (cf. p 19):

$$p(z) = \begin{cases} p_{atm} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g(h_1 - z), & \text{si } 0 < z < h_1 \\ p_{atm} + \rho_2 g(h_1 + h_2 - z), & \text{si } h_1 < z < h_1 + h_2 \end{cases} \quad (2.61)$$

Nous pouvons aboutir à une expression sans l'utilisation de type conditionnel d'expression Eq. (2.61) (cf. p 19) en se basant sur la règle mathématique analytique suivante :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \leq x_0 \\ f_2(x), & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} \frac{f_2(x) + f_1(x)}{2} + \frac{|x - x_0|}{x - x_0} \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2}, & \text{si } x \neq x_0 \\ f(x_0), & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Ainsi, nous obtenons la formule globale de la distribution de pression suivante :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_2 g h_2 - \frac{1}{2} g [(\rho_1 + \rho_2)(z - h_1) + (\rho_2 - \rho_1)|z - h_1|] \quad (2.63)$$

b) n fluides non-miscibles dans un réservoir

Soient n fluides non miscibles (1), (2), ..., et (n) de masses volumique $\rho_1, \rho_2, \dots,$ et ρ_n (respectivement) telles que $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_n$ disposés. Dans cette configuration, les n fluides non miscibles sont placés dans un réservoir dont la surface libre du n ième fluide, est exposée à l'air libre (pression atmosphérique), comme illustré dans la figure 2.12 (cf. FIGURE 2.12 n fluides non-miscibles dans un réservoir. p 20). Les hauteurs de chaque couche de fluides sont respectivement $h_1, h_2, \dots,$ et h_n .

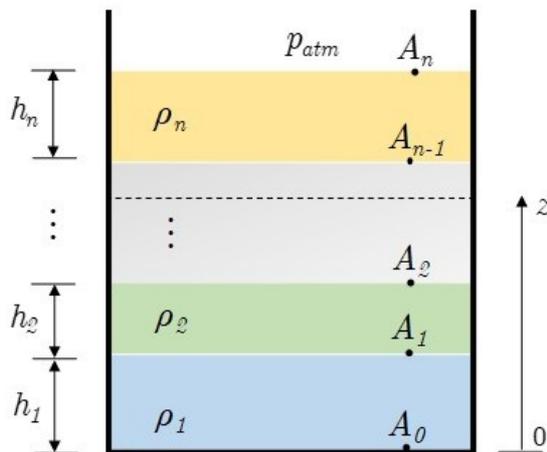


FIGURE 2.12 n fluides non-miscibles dans un réservoir.

Le but est similaire à la partie précédente, est de déterminer la distribution de la pression dans tous les niveaux du réservoir. Nous commençons par la n ième couche :

- Pour $h_1 + h_2 + \dots + h_n - 1 \leq z \leq h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1} + h_n$, la pression est donnée par :

$$p_n(z) = p_{atm} + \rho_n g (h_1 + h_2 + \dots + h_n - z) \quad (2.64)$$

À l'interface entre le fluide (n) et (n - 1), nous avons

$$p_{A_{n-1}} = p_{atm} + \rho_n g h_n \quad (2.65)$$

- Pour $h_1 + h_2 + \dots + h_n - 2 \leq z \leq h_1 + h_2 + \dots + h_{n-2} + h_{n-1}$, la pression est donnée par :

$$\begin{aligned} p(z) &= p_{A_{n-1}} + \rho_{n-1}g(h_1 + h_2 \cdots h_{n-1} - z) \\ p(z) &= p_{atm} + \rho_ngh_n + \rho_{n-1}g(h_1 + h_2 \cdots h_{n-1} - z) \end{aligned} \quad (2.66)$$

À l'interface entre le fluide $(n - 1)$ et $(n - 2)$, nous avons

$$p_{A_{n-1}} = p_{A_{n-2}} + \rho_ngh_n \implies p_{A_{n-2}} = p_{atm} + \rho_ngh_n + \rho_{n-1}gh_{n-1} \quad (2.67)$$

En suivant un chemin récursif depuis Eq. (2.67) (cf. p 21) de $n-2$ à 2, on obtient :

- Pour $h_1 \leq z \leq h_1 + h_2$, la pression est donnée par :

$$p_2(z) = p_{atm} + \rho_ngh_n + \cdots + \rho_3gh_3 + \rho_2g(h_1 + h_2 - z) \quad (2.68)$$

- Enfin pour $0 \leq z \leq h_1$, la pression est donnée par :

$$p_1(z) = p_{atm} + \rho_ngh_n + \cdots + \rho_2gh_2 + \rho_1g(h_1 - z) \quad (2.69)$$

La pression au fond du réservoir est obtenue en substituant z par 0 dans Eq (2.69) (cf. p 21) :

$$p_0 = p_{atm} + \rho_ngh_n + \cdots + \rho_2gh_2 + \rho_1gh_1 = p_{atm} + \sum_{i=1}^n \rho_i gh_i \quad (2.70)$$

Pour uniformiser la description de la pression à travers les couches présentées par Eqs. (2.64) (cf. p 20), (2.68) (cf. p 21), (2.69) (cf. p 21) et (2.70) (cf. p 21) et celles des autres couches intermédiaires, nous établirons une expression générale reliant la pression au niveau z pour toutes les couches (1) à (n) . Cette expression peut être formulée sous la forme d'une somme, comme suit :

$$p(z) = (1 - \delta_{m1}) \sum_{i=1}^{m-1} h_i \leq z \leq \sum_{i=1}^m h_i, \quad p_m(z) = p_{atm} + (1 - \delta_{mm}) \sum_{i=m+1}^n \rho_i gh_i + \rho_m g \left(\sum_{i=1}^m h_i - z \right) \quad (2.71)$$

Avec δ_{mn} est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases} \implies 1 - \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{si } m = n \\ 1, & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (2.72)$$

3. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans des tubes en U

Soient deux fluides (1) et (2) non miscibles de masses volumique ρ_1 et ρ_2 (respectivement) telles que $\rho_1 > \rho_2$. Dans cette configuration, les deux fluides non miscibles sont placés dans un tube en U (vases communicants) de section circulaire uniforme dont la surface libre des deux fluides sont exposées à l'air libre, comme illustré dans la figure 2.13 (cf. FIGURE 2.13 Deux fluides non-miscibles dans un tube en U. p 22).

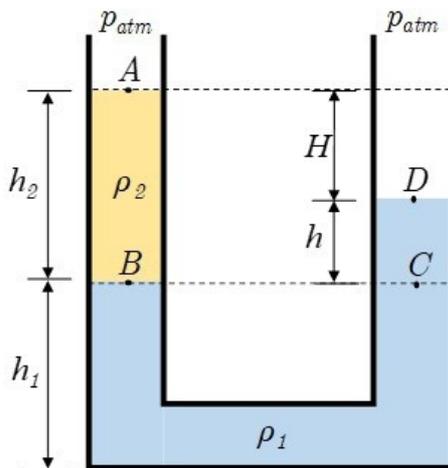


FIGURE 2.13 Deux fluides non-miscibles dans un tube en U.

Dans cette configuration, le premier fluide occupe une hauteur h_1 dans la partie gauche du tube en U et une hauteur $h_1 + h$ dans sa partie droite. En parallèle, la deuxième couche de fluide occupe une hauteur h_2 dans la partie gauche, au-dessus du premier fluide. A, B, C et D sont trois points localisés respectivement au niveau de la surface libre de la partie gauche, l'interface des deux liquides, le même niveau de l'interface dans la partie droite et la surface libre de la partie droite. Nous remarquons que :

$$p_A = p_D = p_{atm} \tag{2.73}$$

a) Pression à l'interface entre les deux fluides

L'interface entre des deux fluides se trouve au point B , la pression dans ce point est déterminée à partir de la partie gauche par :

$$p_B = p_A + \rho_2 g h_2 \implies p_B = p_{atm} + \rho_2 g h_2 \tag{2.74}$$

D'autre part à partir de la partie droite, la pression dans le même niveau (point C) que celui de l'interface (point B) est égale à la même pression p_B , ainsi :

$$p_C = p_B \tag{2.75}$$

$$p_B = p_D + \rho_1 g h \implies p_B = p_{atm} + \rho_1 g h$$

b) Distance entre les deux surfaces du fluide (1) – Dénivellation h

En se basant sur l'égalité des pressions dans le même niveau d'interface entre les deux fluides dans les vases communicants gauche et droit Eq. (2.75) (cf. p 22), on a :

$$p_B = p_{atm} + \rho_2 g h_2 = p_{atm} + \rho_1 g h \implies \rho_2 g h_2 = \rho_1 g h \tag{2.76}$$

On obtient ainsi :

$$h = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \tag{2.77}$$

c) Distance entre les deux surfaces libres : Distance H

Elle présente est la distance séparant les deux surfaces libres des fluides. Elle notée H et, est donnée par la différence $h_2 - h$. En introduisant Eq. (2.77) (cf. p 22) on obtient :

$$H = h_2 - h = h_2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \implies H = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} h_2 \quad (2.78)$$

d) Pression du la partie basse du tube en U

Cette pression notée p_0 peut être déterminée à partir des deux surfaces libres des deux parties du tube. A partir du de la partie gauche :

$$p_0 = p_{atm} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 \quad (2.79)$$

A partir de la partie droite :

$$p_0 = p_{atm} + \rho_1 g (h_1 + h) = p_{atm} + \rho_1 g \left(h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \right) = p_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 \quad (2.80)$$

e) Distribution de la pression dans le tube en U

Il s'agit de déterminer la pression en fonction du niveau vertical z dans les deux parties du tube en U. Pour ce faire, nous déterminons indépendamment la pression des deux partie, gauche et droite.

- Partie gauche : dans cette partie se trouve le fluide (1) et (2).

Pour le fluide (2) où : $h_1 \leq z \leq h_1 + h_2$, il claire que :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_2 g (h_1 + h_2 - z) \quad (2.81)$$

Pour le fluide (1) où : $0 \leq z \leq h_1$, on a :

$$\begin{aligned} p(z) = p_B + \rho_1 g (h_1 - z) &\implies p(z) = p_{atm} + \rho_1 g h + \rho_1 g (h_1 - z) \\ p(z) &= p_{atm} + \rho_1 g (h_1 + h - z) \end{aligned} \quad (2.82)$$

- Partie droite : dans cette partie on a seulement le fluide (1), ainsi pour $0 \leq z \leq h_1 + h$, on a tout simplement :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_1 g (h_1 + h - z) \quad (2.84)$$

La figure 2.14 (cf. FIGURE 2.14 Distribution de pression au sein du tube en U. p 24) résume la distribution de la pression des deux parties communicantes des deux fluides au sein du tube en U : Eqs. (2.81) (cf. p 23)-(2.84) (cf. p 25).

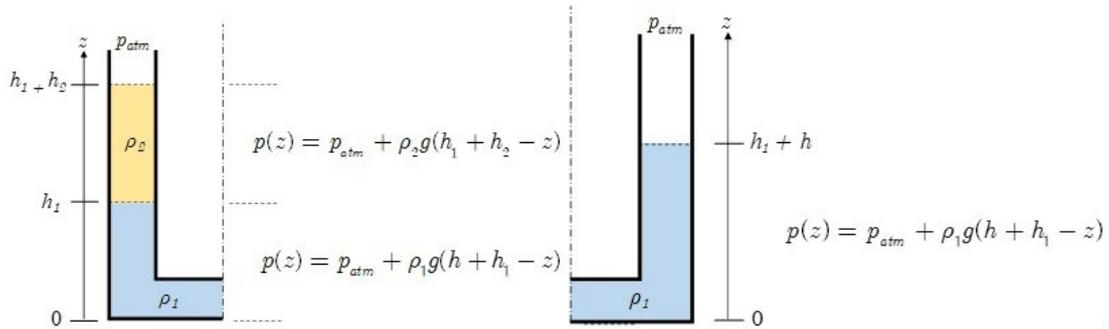


FIGURE 2.14 Distribution de pression au sein du tube en U.

f) Égalité des masses volumiques

Si les deux masses volumiques des deux fluides (1) et (2) sont égales c'est-à-dire $\rho_1 = \rho_2$ alors la dénivellation devient nulle. Dans ce cas-là h et h_2 deviennent égales et h_1 diminue par la moitié de l'ancienne H . Cette situation est illustrée dans la figure 2.15 (cf. FIGURE 2.15 Fluides miscibles de même densité au sein du tube en U. p 24).

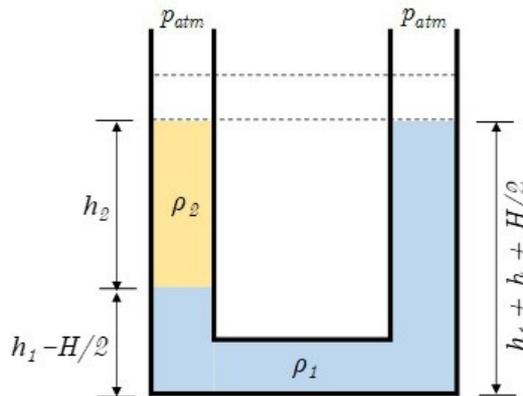


FIGURE 2.15 Fluides miscibles de même densité au sein du tube en U.

D. Instrument de mesure de la pression

La mesure de la pression revêt une importance dans de nombreuses applications scientifiques, industrielles et technologiques. Elle permet de surveiller et de contrôler des processus, de garantir la sécurité dans les systèmes sous pression, d'optimiser l'efficacité des moteurs, et bien plus encore. Deux principaux types d'instruments sont utilisés pour cette mesure à savoir les instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre et les instruments basés sur le principe de déformation d'un élément élastique sous l'action de pression (White, 2016 [1] ; Instrumentation CIRA, 2006 [3]).

1. Instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre

Ces instruments mesurent la pression en évaluant la force exercée par un fluide (généralement liquide) sur une surface. Ils déterminent la pression en mesurant la hauteur d'une colonne de liquide en équilibre avec la pression atmosphérique ou une autre pression de référence. Parmi ces instruments, on distingue :

a) Baromètre de Torricelli

Le baromètre, inventé par Evangelista Torricelli (1644), est un instrument spécialement conçu pour mesurer la pression atmosphérique. Il utilise un tube en verre fermé à une extrémité, rempli de mercure, et plongé dans une cuve contenant également du mercure, voir figure 2.16 (cf. FIGURE 2.16 Baromètre de Torricelli. p 25). Lors de cette expérience, Torricelli a observé que le niveau de mercure dans le tube diminuait, laissant un espace vide au-dessus.

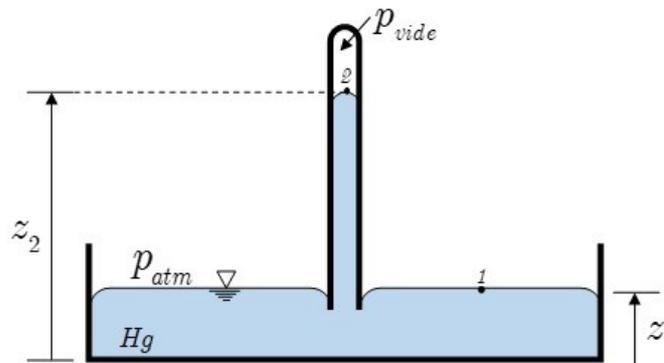


FIGURE 2.16 Baromètre de Torricelli.

La détermination de la pression atmosphérique repose sur le principe fondamental de l'hydrostatique tout en mesurant la hauteur $h = z_2 - z_1$ que produit le mercure dans le tube. On applique cette loi entre les points 1 et 2 (figure 2.16 (cf. FIGURE 2.16 Baromètre de Torricelli. p 25)) :

$$p_1 = p_2 + \rho_{Hg}g(z_2 - z_1) \implies p_{atm} = p_{vide} + \rho_{Hg}g(z_2 - z_1) \quad (2.84)$$

Comme la pression du vide est nulle, cela signifie tout simplement que :

$$p_{atm} = \rho_{Hg}g(z_2 - z_1) \quad (2.85)$$

La masse volumique du mercure est de 13600 kg/m^3 , d'autre part, la hauteur h que Torricelli a enregistré dans le tube est de : 76 cm (ou également 760 mm). Par substitution et en prenant $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ on trouve la valeur de la pression atmosphérique en Pa :

$$p_{atm} = 13600 \times 9.81 \times 0.76 \implies p_{atm} = 101292 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} = 1.01292 \text{ bar} \quad (2.86)$$

Nous définissons ainsi l'unité millimètre de mercure notée mmHg telle que : $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$.

b) Tube manométrique simple - piézomètre

Le piézomètre est un instrument de mesure de la pression relativement simple,

constitué d'un tube rempli du même fluide et relié au point où l'on souhaite évaluer la pression. Il est principalement utilisé pour mesurer les pressions dans les liquides et n'est pas adapté à la mesure des pressions dans les gaz, voir figure 2.17 (cf. FIGURE 2.17 Tube manométrique simple (piézomètre) p 26).

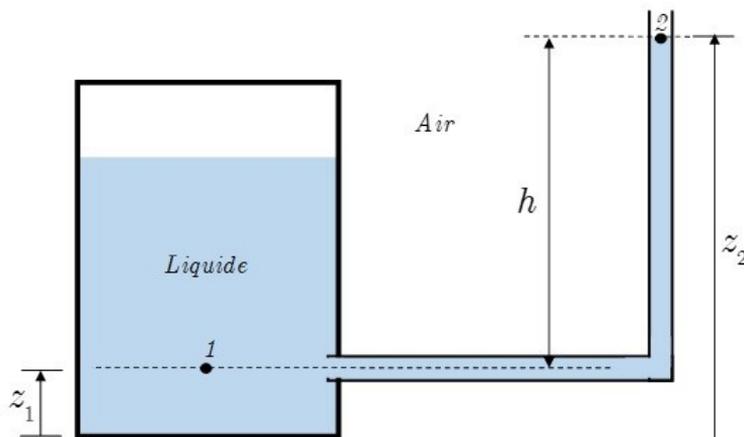


FIGURE 2.17 Tube manométrique simple (piézomètre)

Pour déterminer la pression d'un liquide au point 1 du réservoir montré dans la figure 2.17 (cf. FIGURE 2.17 Tube manométrique simple (piézomètre) p 26) en connaissant la hauteur h et la pression au point 2 (pouvant être atmosphérique), il suffit d'appliquer la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les point 1 et 2 :

$$p_1 = p_2 - \rho g(z_1 - z_2) \quad (2.87)$$

c) Tube manométrique en forme de « U » - Manomètre

Le manomètre est un dispositif composé d'un tube en forme de "U" transparent, qui sert à mesurer la pression en utilisant un liquide manométrique dont la masse volumique, noté ρ_m , est généralement plus élevée que celui du fluide dont on souhaite mesurer la pression de masse volumique ρ .

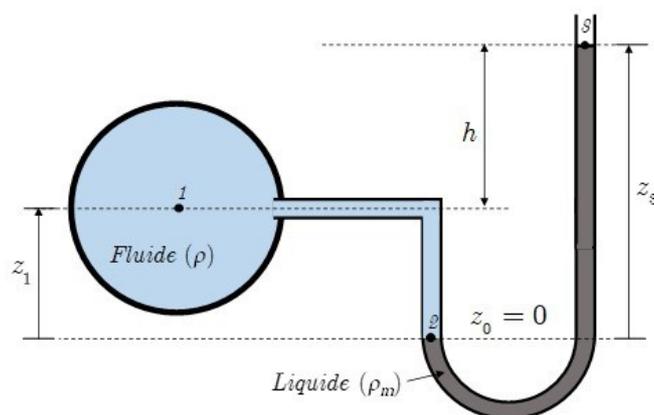


FIGURE 2.18 Manomètre en tube en U.

La détermination de la pression au point 1 du fluide montré dans la figure 2.18 (cf. FIGURE 2.18 Manomètre en tube en U. p 26) consiste à appliquer la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les points 1 et 3 en passant par l'interface au point 2 tout en connaissant la pression au point 3. On a à l'interface :

$$p_2 = p_3 - \rho_m g(z_2 - z_3) \quad (2.88)$$

D'autre part, la pression au point 1 est :

$$p_1 = p_2 - \rho g(z_1 - z_2) \quad (2.89)$$

En substituant Eq. (2.88) (cf. p 27) dans Eq. (2.89) (cf. p 27), on trouve la pression au point 1 :

$$p_1 = p_3 - \rho_m g(z_2 - z_3) - \rho g(z_1 - z_2) \quad (2.90)$$

d) Manomètre différentiel

Ce manomètre est un tube utilisé pour mesurer la différence de pression ou la hauteur piézométrique entre deux points. Il est configuré avec un seul liquide et une valve d'entrée d'air ou avec deux liquides différents pour des applications spécifiques (Fox et al., 2004 [4]).

En prenant comme exemple un écoulement d'un fluide de masse volumique ρ dans une conduite horizontale équipée d'un manomètre partiel aux points 1 et 2, on peut déterminer la différence de pression entre les points 1 et 2 en mesurant la dénivellation h entre les deux interfaces du liquide manométrique de masse volumique ρ_m avec le fluide, voir figure 2.19 (cf. FIGURE 2.19 Manomètre partielle de mesure de pression d'écoulement. p 27).

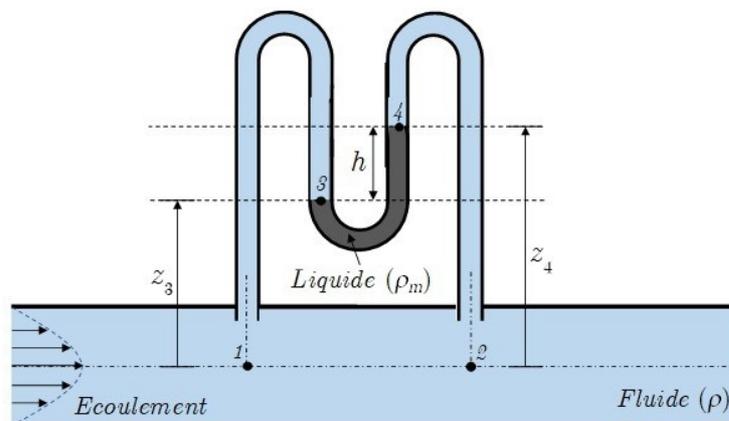


FIGURE 2.19 Manomètre partielle de mesure de pression d'écoulement.

En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique du point 1 à 2 en passant par les points 3 et 4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p_3 &= p_1 - \rho g(z_3 - z_1) \\ p_4 &= p_3 - \rho_m g(z_4 - z_3) \end{aligned} \quad (2.91)$$

D'autre part, on a :

$$p_2 = p_4 - \rho g(z_2 - z_4) \quad (2.92)$$

En substituant Eq. (2.92) (cf. p 27) dans Eq. (2.91) (cf. p 27), on trouve :

$$p_2 = p_1 - \rho g(z_3 - z_2) - \rho_m g(z_4 - z_3) - \rho g(z_2 - z_4) \quad (2.93)$$

En réarrangeant les termes de Eq. (2.93) (cf. p 28), la différence de pression $p_2 - p_1$ devient :

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) + (\rho - \rho_m)g(z_4 - z_3) \quad (2.94)$$

Les point 1 et 2 se trouvent dans le même niveau, on a $z_2 - z_1 = 0$, ainsi Eq. (2.94) (cf. p 28) devient :

$$p_2 - p_1 = (\rho - \rho_m)g(z_4 - z_3) \quad (2.95)$$

2. Instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre

Ces instruments mesurent la pression en détectant la déformation d'un élément élastique, comme un diaphragme, une membrane ou un ressort, sous l'action des forces de pression. Les capteurs de pression piézorésistifs, les jauges de contrainte et les transducteurs de pression sont des exemples d'instruments qui utilisent ce principe. La déformation de l'élément élastique est convertie en une lecture de pression (Fox et al., 2004 [4]).

Dans ce contexte, le baromètre anéroïde, également appelé manomètre mécanique, est un instrument de mesure de la pression atmosphérique. Il repose sur la déformation d'une boîte métallique scellée sous vide, appelée anéroïde, en réponse aux variations de pression atmosphérique. Lorsque la pression atmosphérique change, la boîte anéroïde se dilate ou se contracte, ce qui est mesuré à l'aide d'un mécanisme qui indique la pression atmosphérique en unités telles que les millibars ou les pouces de mercure, (Semat et Katz, 1958 [5]).

E. Théorème de Pascal

1. Enoncé du théorème

Dans un fluide incompressible en équilibre, une pression exercée en un point quelconque du fluide se propage uniformément dans toutes les directions et s'exerce avec la même intensité sur toutes les surfaces en contact avec le fluide. En d'autres termes, une variation de pression appliquée en un point d'un liquide immobile se transmet intégralement à l'ensemble du fluide, sans se soucier de la forme du contenant.

2. Preuve du théorème

Dans un fluide incompressible en équilibre hydrostatique, nous définissons deux point M_1 et M_2 dans lesquels les agissent les pression p_1 et p_2 . Supposons qu'au point M_1 intervienne une variation de pression supplémentaire Δp_1 , voir figure 20 (cf. FIGURE 2.20 Principe du théorème de Pascal. p 29).

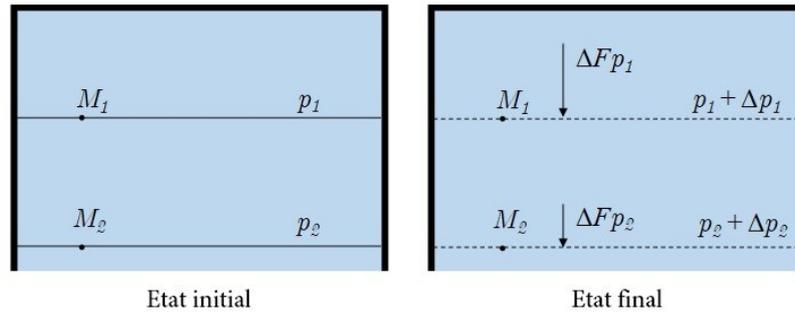


FIGURE 2.20 Principe du théorème de Pascal.

La pression en ce point devient $p_1 + \Delta p_1$. Par conséquent, une variation de pression Δp_2 est induite au point M_2 modifiant la pression en ce point à $p_2 + \Delta p_2$. Le but est de démontrer que $\Delta p_1 = \Delta p_2$. Pour ce faire, nous appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique dans les deux états, initial et final : nous avons respectivement :

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= -\rho g(z_2 - z_1) \\ (p_2 + \Delta p_2) - (p_1 + \Delta p_1) &= -\rho g(z_2 - z_1) \end{aligned} \tag{2.96}$$

En faisant la soustraction entre les équations de l'expression Eq. (2.96) (cf. p 29), nous trouvons :

$$\Delta p_2 - \Delta p_1 = 0 \implies \Delta p_2 = \Delta p_1 \tag{2.97}$$

Ce qui implique la même variation de pression (Eq. (2.97) (cf. p 29)) induite dans le point M_2 .

3. Principe vérin hydraulique

Nous considérons le vérin hydraulique schématisée dans la figure 2.21 (cf. FIGURE 2.21 Schéma d'un Vérin hydraulique. p 29). Ce vérin hydraulique est un dispositif mécanique utilisé pour convertir l'énergie hydraulique en mouvement linéaire. Il se compose de deux cylindres grands présentant le vérin et petit présentant la pompe de diamètres d_1 et d_2 (respectivement). Les cylindres sont munis de pistons mobiles et d'un fluide hydraulique circulant entre eux à travers une canalisation (Briggs, 2018 [6]).

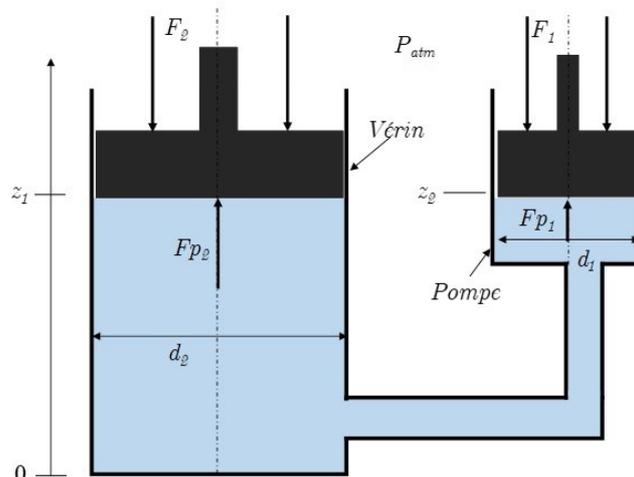


FIGURE 2.21 Schéma d'un Vérin hydraulique.

La pression exercée sur le piston de la pompe se propage uniformément à travers le fluide et agit également sur le piston du vérin. Cette pression transmise crée une force qui est ensuite multipliée par la différence de surface entre les deux pistons. Cette configuration permet de créer une force de sortie plus grande que la force d'entrée, conformément au principe des vases communicants et à l'hydrostatique.

Pour calculer la charge possible pouvant être soulevée, nous pouvons utiliser le principe fondamental de l'hydrostatique :

À l'équilibre de vérin :

$$F p_{atm} + F_2 - F p_2 = 0 \implies p_{atm} S_2 + F_2 - p_2 S_2 = 0 \implies p_2 = p_{atm} + S_2 F_2 \quad (2.98)$$

A l'équilibre de la pompe :

$$F p_{atm} + F_1 - F p_1 = 0 \implies p_{atm} S_1 + F_1 - p_1 S_1 = 0 \implies p_1 = p_{atm} + S_1 F_1 \quad (2.99)$$

A cet équilibre, on a : $z_1 = z_2$ et $p_1 = p_2$. La charge possible pouvant être soulevée par le vérin est obtenue quand $p_1 = p_2$, en faisant l'égalité entre Eq. (2.98) (cf. p 30) et Eq. (2.99) (cf. p 30), on a :

$$p_1 = p_2 \implies p_{atm} + \frac{4}{\pi d_1^2} F_1 = p_{atm} + \frac{4}{\pi d_2^2} F_2 \implies \frac{F_1}{d_1^2} = \frac{F_2}{d_2^2} \implies \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad (2.100)$$

La charge possible pouvant être soulevée par le vérin est donnée par :

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 = F_2 = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 F_1 \quad (2.101)$$

F. Théorème d'Archimède

1. Énoncé du théorème

Lorsqu'un objet est immergé dans un fluide, il subit une force verticale dirigée vers le haut, connue sous le nom de force d'Archimède. Cette force est égale au poids du volume du fluide déplacé par l'objet. Ce volume déplacé correspond au volume de l'objet qui est immergé dans le fluide.

$$F_{Archimede} = \rho_{fluide} V_{Objet} g \quad (2.102)$$

2. Principe de la force d'Archimède

La force d'Archimède est la force de flottabilité exercée sur un objet homogène immergé dans un fluide, tel qu'un liquide ou un gaz maintenant cet objet en équilibre. Elle est dirigée vers le haut, opposée à la direction de la force gravitationnelle. Elle est déterminée par la différence entre la masse du fluide déplacé par l'objet et la masse effective de l'objet lui-même. Lorsqu'un objet est plongé dans un fluide, il pousse une quantité de fluide hors de son chemin, créant ainsi une région de faible pression au-dessus de l'objet, voir figure 2.22 (cf. FIGURE 2.22 Objet solide immergé (en équilibre) dans un liquide. p 31). Cela entraîne une poussée vers le haut qui équilibre partiellement le poids de l'objet. Elle est

appliquée au centre de gravité du fluide G déplacé appelé : centre de poussée.

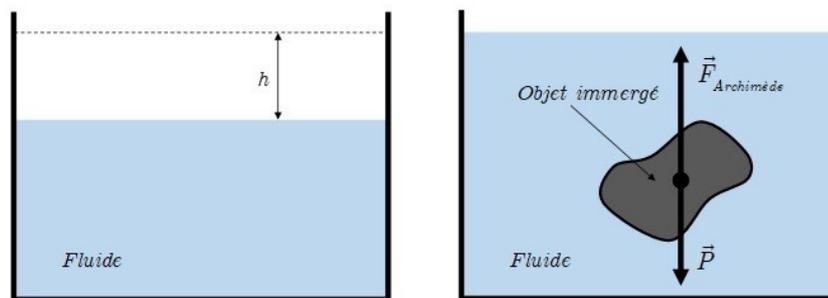


FIGURE 2.22 Objet solide immergé (en équilibre) dans un liquide.

3. Flottabilité des objets

Un objet homogène immergé dans un fluide peut se trouver dans l'une des trois situations suivantes en fonction de la relation entre son poids, la force d'Archimède et la force de résistance du fluide (si applicable).

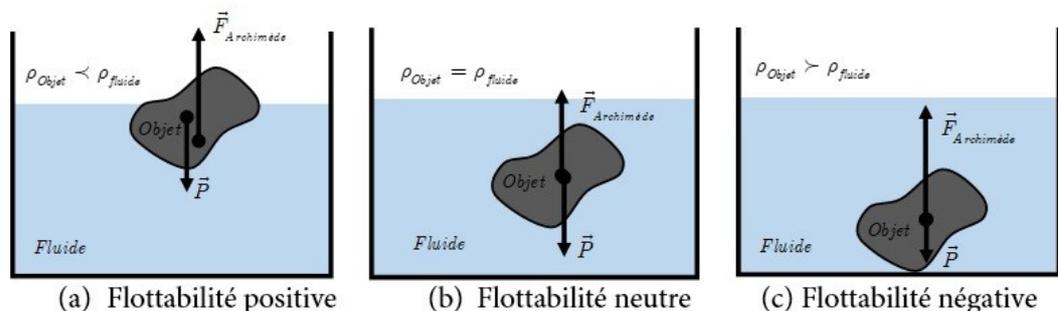


FIGURE 2.23 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide.

a) Flottabilité positive (flottabilité)

Dans cette situation, la force d'Archimède est plus grande que le poids de l'objet. L'objet est donc moins dense que le fluide et il flotte à la surface. Sa partie immergée est égale au volume du fluide déplacé. C'est le cas typique des bateaux, voir figure 2.23a (cf. FIGURE 2.23 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide. p 31).

b) Flottabilité neutre (Equilibre)

Lorsque l'objet est soumis à une force d'Archimède égale à son propre poids, il demeure en équilibre dans le fluide, à n'importe quelle profondeur. Il ne monte pas à la surface ni ne descend au fond. Les sous-marins sont un exemple, voir figure 2.23b (cf. FIGURE 2.23 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide. p 31).

c) Flottabilité négative (descendance)

Si la force d'Archimède est plus faible que le poids de l'objet, l'objet coule dans le fluide. Il est plus dense que le fluide dans lequel il est immergé. Cette situation se retrouve souvent avec des objets tels que les roches qui coulent dans l'eau, voir figure 2.23c (cf. FIGURE 2.23 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide. p 31).

4. Centre de poussée et de gravité d'un objet immergé

Le centre de poussée, également connu sous le nom de centre de flottabilité, est le point à travers lequel la force d'Archimède (la poussée exercée par un fluide sur un objet immergé) semble agir. Il représente le point d'application vertical de la force d'Archimède. Le centre de poussée varie en fonction de la forme et de la position de l'objet immergé dans le fluide ainsi que son homogénéité.

Le centre de gravité, quant à lui, est le point où la totalité du poids d'un objet semble concentrée. Il s'agit du point à travers lequel la force gravitationnelle exercée sur l'objet peut être considérée comme s'appliquant. Le centre de gravité dépend de la distribution de masse de l'objet et peut être également influencé par sa forme et sa composition.

La relation entre le centre de poussée et le centre de gravité est importante dans le contexte de la stabilité des objets immergés. Lorsqu'un objet homogène est en équilibre dans un fluide, le centre de poussée doit coïncider avec le centre de gravité pour que l'objet reste stable et ne bascule pas. Si un objet homogène repose au fond, les centres de gravité et de poussée peuvent coïncider. Cependant, lorsque l'objet est semi-immersé, ces centres ne sont généralement pas confondus en raison de la répartition inégale du poids dans le fluide., voir figure 2.24a (cf. FIGURE 2.24 Centre de poussé et de gravité des objets homogène et hétérogène. p 32).

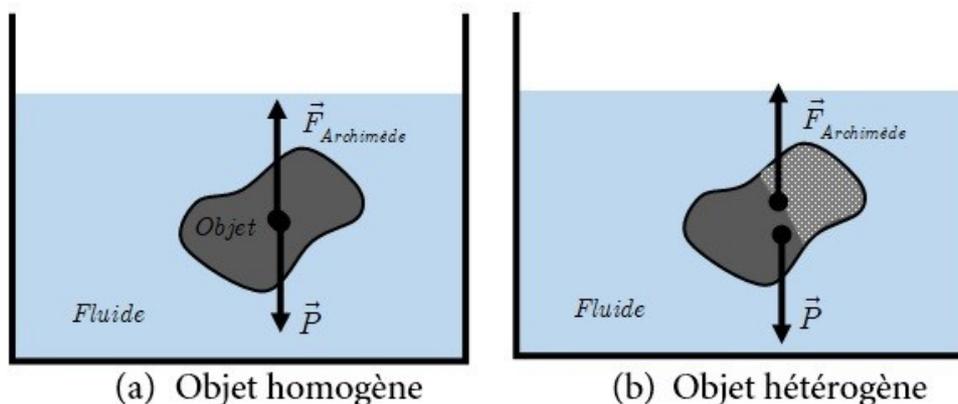


FIGURE 2.24 Centre de poussé et de gravité des objets homogène et hétérogène.

Lorsque l'objet n'est pas homogène autrement dit hétérogène, la distribution non uniforme de la densité entraîne souvent des déplacements distincts entre les centres de gravité et de poussée, voir figure 2.24b (cf. FIGURE 2.24 Centre de poussé et de gravité des objets homogène et hétérogène. p 32).

G. Calcul des forces de pression

Les pressions exercées par un fluide sur une paroi sont déterminantes dans diverses situations impliquant des fluides en mouvement ou au repos. Lorsqu'un fluide est en contact avec une surface, les molécules du fluide exercent une force perpendiculaire à la surface. Cette force est répartie sur la zone de contact et génère une pression, qui s'exerce sur la paroi provoquant par conséquent une poussée hydrostatique.

Dans le cas d'un fluide incompressible au repos, la pression exercée sur une paroi est uniforme à une profondeur donnée. La pression augmente avec la profondeur en raison du poids du fluide au-dessus et varie uniquement en fonction de cette profondeur.

1. Force de pression sur une paroi d'un réservoir

Soit un fluide incompressible appliquant une force de pression à une paroi (S) (surface) de masse négligeable comme illustrée dans la figure 2.25 (cf. FIGURE 2.25 Force de pression d'un fluide sur une surface quelconque. p 33). Le fluide incompressible existe à gauche de la paroi (S), cependant à droite de cette paroi, il existe de l'air. Les forces de pression Fp_1 et Fp_2 exercées sur la paroi (S) sont respectivement générées par la pression hydrostatique du fluide et l'air ambiant en contact avec la surface S .

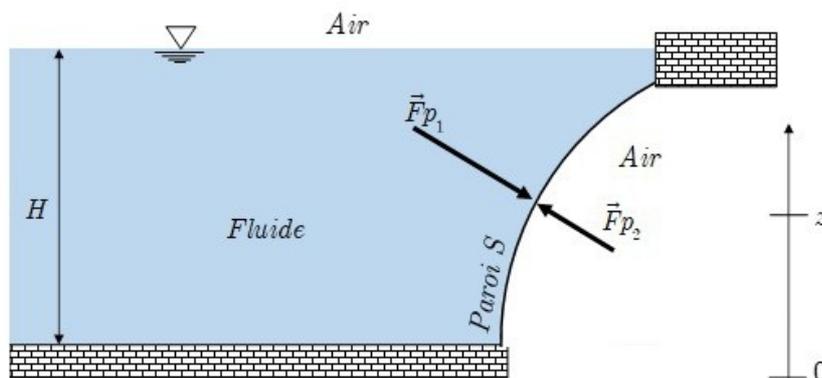


FIGURE 2.25 Force de pression d'un fluide sur une surface quelconque.

La résultante des forces de pression Fp_1 et Fp_2 présente la force de poussée hydrostatique qui applique le fluide sur la paroi.

$$\vec{F}_{poussee} = \vec{F} = \vec{F}p_1 + \vec{F}p_2 \quad (2.103)$$

Cette force également présente la résultante vectorielle de toutes les forces de pression réparties sur toute la surface S et s'exerçant perpendiculairement à chaque élément de surface dS de S , voir figure 2.26 (cf. FIGURE 2.26 Répartition des forces de pression sur une surface de paroi. p 33).

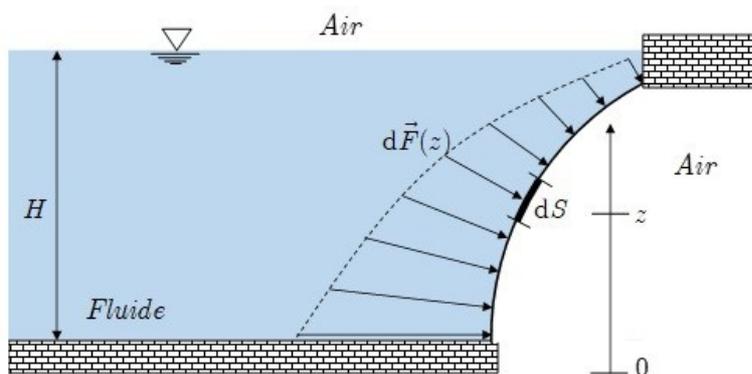


FIGURE 2.26 Répartition des forces de pression sur une surface de paroi.

Si dF représente la force de pressions exercées sur un élément infinitésimal de surface dS de la surface S à un niveau z , alors la force totale F exercée par le fluide est donnée par l'intégration de ces éléments de surface :

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F} \quad (2.104)$$

Le vecteur normal \vec{n} à la surface dS est utilisé pour déterminer la direction de la force de pression élémentaire dF . Le module de la force dF est proportionnelle à la pression p à cet endroit, et à dS .

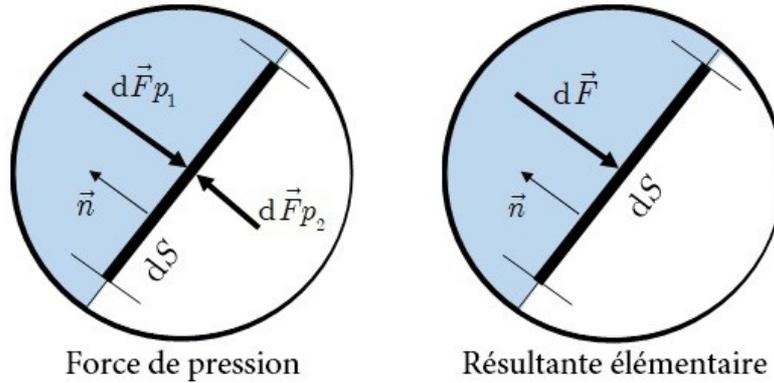


FIGURE 2.27 Force de pression d'un fluide sur une surface élémentaire d'une paroi. Calculons dF comme étant la résultante des forces de pressions dF_{p1} et dF_{p2} sur l'élément de surface :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{p1} + d\vec{F}_{p2} = [p_{atm} + \rho g(H - z)] dS \cdot \vec{n} - p_{atm} dS \vec{n} \quad (2.105)$$

Après simplification de Eq. (2.105) (cf. p 34), on peut conclure que :

$$d\vec{F} = \rho g(H - z) dS \vec{n} \implies d\vec{F} = p_{eff} dS \vec{n} \quad (2.106)$$

Avec la quantité $\rho g(H - z)$ présente la pression effective appliquée par le fluide sur la paroi S . L'utilisation de la pression effective équivaut en effet à la pression réelle exercée sur la surface (S) depuis le côté du fluide. Étant donné que la pression absolue p du fluide se compose à la fois de la pression atmosphérique et de la pression effective, et que de l'autre côté de la paroi se trouve de l'air qui exerce une force de pression sur dS en sens inverse de la poussée du fluide, la résultante des forces dF dans un élément de surface correspond simplement à la pression effective du fluide. La force de poussée est donc :

$$d\vec{F} = \iint_S \rho g(H - z) dS \vec{n} \quad (2.107)$$

En termes de module de force, on a :

$$F = \iint_S \rho g(H - z) dS \quad (2.108)$$

2. Centre de poussée hydrostatique sur une paroi plane

Nous examinons le réservoir illustré dans la figure 2.28 (cf. FIGURE 2.28 Réservoir muni d'une paroi plane. p 35), lequel est rempli d'un fluide incompressible au repos à un niveau H . La frontière droite du réservoir comporte une paroi plane (pas forcément rectangulaire) (S) de surface globale S et de largeur L , exposée au fluide exerçant une pression d'un côté et à l'air libre exerçant une pression de l'autre. Cette configuration est établie dans un espace muni d'un repère cartésien orthonormé $(Oxyz)$, où les vecteurs unitaires sont \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

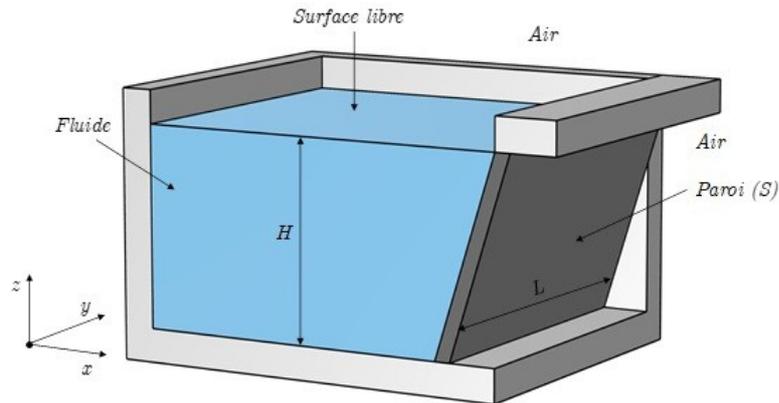


FIGURE 2.28 Réservoir muni d'une paroi plane.

Le centre de gravité G de la paroi S présente le centre de masse, de surface ou encore le barycentre. Dans le cas général, ses abscisses sont calculées par :

$$x_G = \frac{1}{S} \iint_S x dS, \quad y_G = \frac{1}{S} \iint_S y dS, \quad z_G = \frac{1}{S} \iint_S z dS, \quad (2.109)$$

Nous pouvons écrire d'après la formule de la force de poussée Eq. (2.108) (cf. p 34) :

$$F = \iint_S \rho g(H - z) dS = \iint_S \rho g H dS - \iint_S \rho g z dS = \rho g H \iint_S dS - \rho g S \frac{1}{S} \iint_S z dS \quad (2.110)$$

Ceci donne :

$$F = \rho g H S - \rho g S z_G = \rho g S (H - z_G) \quad (2.111)$$

Tout simplement en connaissant la pression dans le centre de gravité, la force de pression est donnée par :

$$F = \rho g H S - \rho g S z_G = \rho g S (H - z_G) \quad (2.111)$$

Le centre de poussée G_0 sur la paroi plane (S), également appelé centre de pression, est le point d'application de la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur une surface immergée ou en contact avec celui-ci.

Le centre de poussée n'est pas nécessairement situé au même endroit que le centre de gravité de l'objet. Il dépend de la distribution de la pression exercée par le fluide sur la surface, et donc de la forme de l'objet et de la distribution de la masse volumique du fluide. En général, le centre de poussée tend à être plus élevé que le centre de gravité pour les objets immergés dans un fluide plus dense en partie supérieure et moins dense en partie inférieure, comme un objet creux, voir figure 2.29 (cf. FIGURE 2.29 Centre de poussée d'une paroi S. p 36).

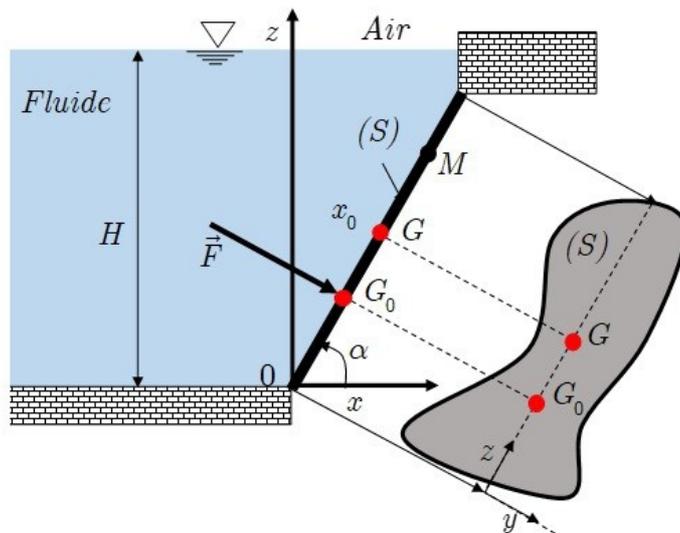


FIGURE 2.29 Centre de poussée d'une paroi S.

Il est nécessaire par ailleurs de connaître les coordonnées du centre de poussée afin que nous puissions présenter la force de poussée. En réalité, comme la pression hydrostatique du fluide dépend seulement de la abscisse verticale z , il est suffisant de connaître cette coordonnée pour déterminer le profondeur centre de poussée, voir figure 2.29 (cf. FIGURE 2.29 Centre de poussée d'une paroi S. p 36).

Dans le cas d'une paroi plane, lorsque la pression est uniforme sur toute la surface, le centre de poussée coïncide avec le centre géométrique de la paroi. Cependant, lorsque la pression n'est pas uniforme, le centre de poussée peut se déplacer vers les zones de pression plus élevée.

En définissant les coordonnées des centres de gravité et de poussée dans le repère Cartésien par $G(x_G, y_G, z_G)$ et $G_0(x_0, y_0, z_0)$, la détermination du centre de poussée repose sur l'application du principe d'équilibre des moments, comme le moment de la force de pression est au centre de poussée est nul :

$$\vec{M}_{G_0} = 0 \implies \vec{M}_G + G\vec{G}_0 \times \vec{F} = 0 \quad (2.113)$$

Ceci conduit à :

$$\vec{M}_G = G\vec{G}_0 \times \vec{F} = 0 \quad (2.114)$$

Le moment M_G se calcule comme suit :

$$\vec{M}_G = \iint_S \vec{GM} \times d\vec{F} \quad (2.115)$$

Le calcul d'après ces dernières expressions Eqs. (2.115) (cf. p 36) et (2.114) (cf. p 36) dépend de la nature de la paroi plane, horizontale, verticale ou inclinée.

Pour mener à bien cette analyse, dans la continuation de notre présentation, étant donné que la paroi (S) pour laquelle nous calculons le centre de poussée est plane, son centre de gravité G sera adopté comme point d'origine du repère Cartésien ($Gxyz$).

a) Centre de poussée sur une paroi plane horizontale

Dans le contexte du réservoir présenté dans la figure 2.30 (cf. FIGURE 2.30 Centre de poussée d'une paroi horizontale (fond d'un réservoir) (S). p 37), le fond plat du réservoir constitue une surface horizontale qui se trouve à une distance H de la surface libre du liquide contenu dans le réservoir. À ce niveau, la pression absolue peut être évaluée en tenant compte de la profondeur à laquelle se situe la paroi :

$$p_0 = p_{atm} + \rho g H \quad (2.116)$$

La surface du fond (Oxy) du réservoir d'aire S et de largeur L est soumise à une force de poussée qui résulte du poids du fluide situé au-dessus de cette surface.

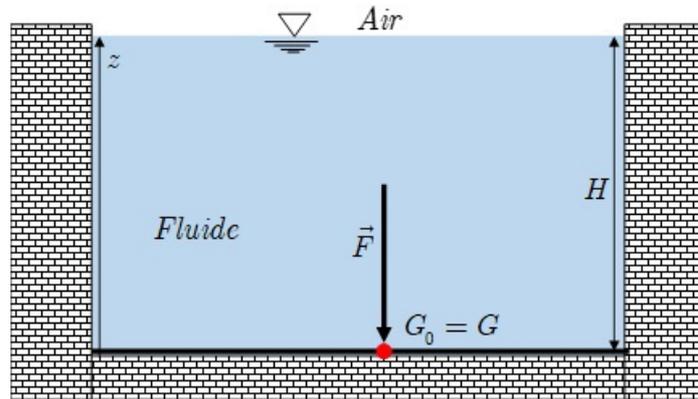


FIGURE 2.30 Centre de poussée d'une paroi horizontale (fond d'un réservoir) (S).

Étant donné qu'il n'y a pas d'air en dessous de la paroi et que la distribution de pression est uniforme, Eq. (2.116) (cf. p 37), la force de poussée est directement liée au poids du fluide contenu dans le réservoir. Elle est donnée au niveau $z = 0$ par :

$$\vec{F} = \iint_S (p_{atm} + \rho g H) \vec{n} dS = - \iint_S (p_{atm} + \rho g H) \vec{k} dS = -(p_{atm} + \rho g H) \iint_S dS \vec{k} \quad (2.117)$$

Donc, comme la pression est uniformément distribuée au niveau du fond, on a tout simplement :

$$\vec{F} = -(p_{atm} + \rho g H) S \vec{k} \implies F = (p_{atm} + \rho g H) S = p_G S \quad (2.118)$$

Soit un point $M(x, y, 0)$ appartenant au fond du réservoir. En définissant le repère $(Gxyz)$, avec G est le centre de gravité de la surface horizontale, et comme le point de poussée G_0 appartient au fond du réservoir, ses coordonnées sont $(x_0, y_0, 0)$, d'après l'équation d'équilibre des moments au point de poussée Eqs. (2.114) (cf. p 36) et (2.115) (cf. p 36) on a :

$$\vec{GG}_0 \times \vec{F} = \iint_S \vec{GM} \times d\vec{F} \implies \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_G S \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_G \end{pmatrix} dS \quad (2.119)$$

Nous obtenons après les calculs des produits vectoriels :

$$\begin{pmatrix} -y_0 p_G S \\ -x_0 p_G S \\ 0 \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} -y p_G \\ -x p_G \\ 0 \end{pmatrix} dS \implies \begin{cases} -y_0 p_G S = \iint_S y p_G dS \\ -x_0 p_G S = \iint_S x p_G dS \end{cases} \quad (2.120)$$

Donc :

$$\begin{cases} -y_0 S = - \iint_S y dS \\ -x_0 S = - \iint_S x dS \end{cases} \implies \begin{cases} y_0 S = \frac{1}{S} \iint_S y dS \\ x_0 S = \frac{1}{S} \iint_S x dS \end{cases} \quad (2.121)$$

D'après Eq. (2.121) (cf. p 38) Les coordonnées du centre de poussée G_0 sont $(0, 0, 0)$. Ainsi, pour une paroi horizontale, le centre de poussée coïncide avec centre de gravité ($G_0 = G$).

b) Centre de poussée sur une paroi plane verticale

Nous considérons la force de poussée appliquée sur une paroi vertical de longueur H égale à la hauteur du réservoir comme présentée dans la figure 2.31 (cf. FIGURE 2.31 Centre de poussée d'une paroi verticale (S). p 38) (Ben Hamouda, 2008 [7]) :

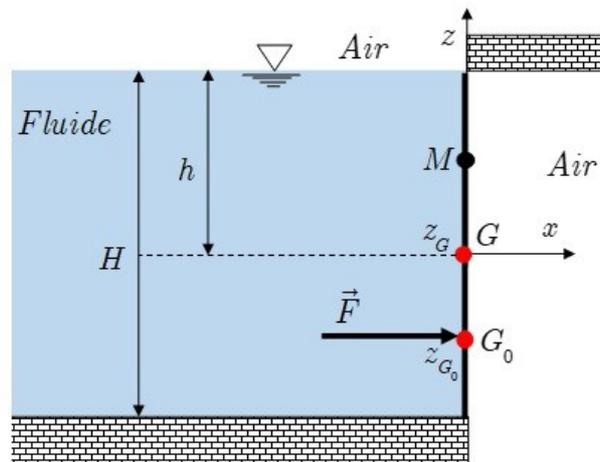


FIGURE 2.31 Centre de poussée d'une paroi verticale (S).

Pour faciliter les calculs du centre de poussée, supposons que le point d'application de la force de gravité G se trouve à une distance h de la surface libre du réservoir. Nous définissons alors le repère $(Gxyz)$. Étant donné que G est l'origine de ce repère, les coordonnées du centre de gravité sont $x_G = y_G = z_G = 0$. Dans ce cas, la détermination de la coordonnée z_0 correspond en effet à la distance algébrique qui sépare le centre de poussée du centre de gravité au sein du plan vertical. D'après la règle du barycentre, on a :

$$\frac{1}{S} \iint_S x dS = \frac{1}{S} \iint_S y dS = \frac{1}{S} \iint_S z dS = 0 \quad (2.122)$$

La force de poussée exercée sur cette paroi découle de la pression relative (effective) du fluide. Le long de la paroi, on a à n'importe quel niveau z , la pression effective suivante :

$$p_{eff} = \rho g(h - z) \quad (2.123)$$

La force de poussée sur un élément de surface vertical est donc :

$$d\vec{F} = \rho g(h - z)\vec{n}dS \quad (2.124)$$

La force de poussée appliquée normalement selon la direction de x est ainsi calculée par l'intégration de la force élémentaire Eq. (2.124) (cf. p 39) :

$$F = \iint_S \rho g(h - z)\vec{n}dS = \iint_S \rho g(h - z)\vec{i}dS = p_G S \vec{i} \quad (2.125)$$

Pour un point $M(0, y, z)$ appartenant à la paroi verticale (S) du réservoir dans repère $(Oxyz)$, comme le point de poussée G_0 appartient à cette paroi, ses coordonnées sont $(0, y_0, z_0)$. D'après Eqs. (2.114) (cf. p 36) et (2.115) (cf. p 36), on a à l'équilibre statique :

$$\vec{GG}_0 \times \vec{F} = \iint_S \vec{GM}d \times \vec{F} \implies \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_G S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho g(h - z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS \quad (2.126)$$

$$\implies \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 p_G S \\ -y_0 p_G S \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ z \rho g(h - z) \\ -y \rho g(h - z) \end{pmatrix} dS \implies \begin{cases} z_0 p_G S = z \rho g(h - z) \\ y_0 p_G S = y \rho g(h - z) \end{cases} \quad (2.127)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} z_0 p_G S &= \iint_S z \rho g(h - z) dS \implies z_0 p_G = \rho g \left[\frac{h}{S} \iint_S z dS - \frac{1}{S} \iint_S z^2 dS \right] \\ z_0 p_G S &= -\frac{\rho g}{S} \iint_S z^2 dS \implies z_0 = -\frac{\rho g}{p_G S} \iint_S z^2 dS \end{aligned} \quad (2.128)$$

Avec l'intégrale de z^2 sur la surface S présente le moment quadratique noté $I_{(G,yy)}$ de la surface S par rapport à l'axe (Gy) passant par le centre de surface G . Enfin, on obtient :

$$z_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yy)}}{p_G S} \text{ Avec } I_{(G,yy)} = \iint_S z^2 dS \quad (2.129)$$

Ceci indique que le centre de poussée se trouve d'une distance z_0 au-dessous du centre de gravité. En termes de profondeur, si h_0 désigne la profondeur du centre de poussée et en tenant compte que l'équation Eq. (2.114) (cf. p 36) et que $p_G = \rho g h$, on obtient :

$$h_0 = h_G - (-z_0) \implies h_0 = h + \frac{I_{(G,yy)}}{hS} \quad (2.129)$$

Quant à la coordonnée du centre de poussée suivant l'axe (Gy) , on a :

$$y_0 p_G S = \iint_S y \rho g (h - z) dS \implies y_0 p_G = \rho g \left[\frac{h}{S} \iint_S y dS - \frac{1}{S} \iint_S yz dS \right] \quad (2.131)$$

$$y_0 p_G S = -\frac{\rho g}{S} \iint_S yz dS \implies y_0 = -\frac{\rho g}{p_G S} \iint_S yz dS$$

Nous avons ainsi :

$$y_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yz)}}{p_G S} \text{ Avec } I_{(G,yz)} = \iint_S yz dS \quad (2.132)$$

En considérant l'exemple d'une paroi verticale rectangulaire, représentée dans la figure 2.32 (cf. FIGURE 2.32 Paroi verticale de forme rectangulaire (S). p 40), le centre de gravité G est situé à l'intersection de ses deux diagonales, constituant ainsi son centre. Cette position le place à une distance de $H/2$ par rapport à la surface libre du liquide.

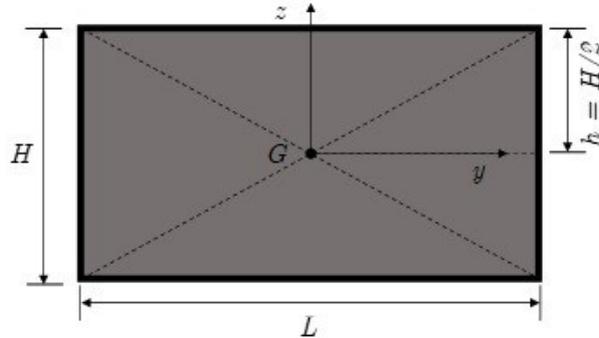


FIGURE 2.32 Paroi verticale de forme rectangulaire (S).

La surface S définit un pavé $[-L/2, L/2][-H/2, H/2]$. Le moment d'inertie ou encore quadratique (Eq. (2.129) (cf. p 39)) de la paroi par rapport à son centre G se calcule par :

$$I_{(G,yy)} = \iint_S z^2 dS = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz \right) dy = \int_{-H/2}^{H/2} dy \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz = L \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-H/2}^{H/2} = \frac{LH^3}{12} \quad (2.133)$$

Selon formule Eq. (2.110) donnant la distance algébrique entre des centres de poussée et de gravité, on a :

$$z_0 = -\frac{-\rho g I_{(G,yy)}}{p_G S} = -\frac{-\rho g I_{(G,yy)}}{\rho g (H/2) HL} \frac{LH^3}{12} = -\frac{H}{6} \quad (2.134)$$

Cela signifie que le centre de poussée G_0 se situe en dessous du centre de gravité G , à une distance de $H/6$. En d'autres termes, il est situé à une distance totale de $H/2 + H/6 = 2H/3$ depuis la surface libre du liquide. Quant à l'abscisse y , d'après Eq. (2.134) (cf. p 40), on a :

$$I_{(G,yz)} = \iint_S yz dS = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\int_{-H/2}^{H/2} yz dz \right) dy = \int_{-H/2}^{H/2} y dy \int_{-H/2}^{H/2} z dz = 0 \quad (2.135)$$

Cela signifie que le centre de poussée se trouve dans le même plan vertical que

celui du centre de gravité.

c) Centre de poussée sur une paroi plane inclinée

Dans le même réservoir, on considère cette fois-ci un cas plus général. Il s'agit d'une paroi inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal, comme indique la figure 2.33 (cf. FIGURE 2.33 Centre de poussée d'une paroi inclinée (S). p 41).

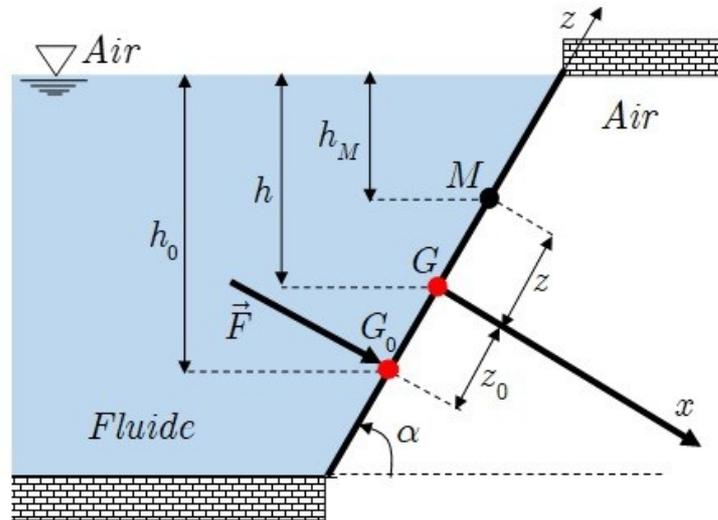


FIGURE 2.33 Centre de poussée d'une paroi inclinée (S).

La force de poussée est calculée en se basant sur la pression effective au point $M(0, y, z)$ dans le repère $(Gxyz)$, où G représente le centre de gravité de la paroi plane qui se trouve d'une profondeur h de la surface libre. Pour simplifier les calculs, nous avons choisi l'axe z le long de la paroi inclinée. À un point quelconque M , la profondeur h_M est donnée par :

$$h_M = h - z \sin \alpha \quad (2.136)$$

La pression effective au point M est donnée par :

$$p_{eff} = \rho g(h - z \sin \alpha) \quad (2.137)$$

Sur un élément de surface dS on a :

$$d\vec{F} = \rho g(h - z \sin \alpha) \vec{i} dS \quad (2.138)$$

La force de poussée appliquée sur la paroi est donnée par :

$$F = p_G S \quad (2.140)$$

En appliquant la loi d'équilibre des moments Eqs. (2.114) (cf. p 36) et (2.115) (cf. p 36), on a :

$$\vec{GG}_0 \times \vec{F} = \iint_S \vec{GM} \times \vec{F} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_G S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho g(h - z \sin \alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS \quad (2.141)$$

En effectuant les produits vectoriels, on aura :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 p_G S \\ -y_0 p_G S \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ z \rho g (h - z \sin \alpha) \\ -y \rho g (h - z \sin \alpha) \end{pmatrix} dS \Rightarrow \begin{cases} z_0 p_G S = z \rho g (h - z \sin \alpha) \\ y_0 p_G S = y \rho g (h - z \sin \alpha) \end{cases} \quad (2.142)$$

On trouve après simplification :

$$\begin{aligned} z_0 p_G S &= \iint_S z \rho g (h - z \sin \alpha) dS \\ y_0 p_G S &= \iint_S y \rho g (h - z \sin \alpha) dS \end{aligned} \quad (2.143)$$

La première équation du système Eq. (2.143) (cf. p 40) devient :

$$\begin{aligned} z_0 p_G S &= \rho g h \iint_S z dS - \rho g h \sin \alpha \iint_S z^2 dS \\ z_0 &= \frac{\rho g h}{p_G} \frac{1}{S} \iint_S z dS - \frac{\rho g h \sin \alpha}{p_G S} \iint_S z^2 dS \end{aligned} \quad (2.144)$$

Comme G est un centre de gravité, la moyenne de l'intégrale double de z sur la surface S est $z_G = 0$, voir Eq. (2.122) (cf. p 38). Ainsi, on obtient :

$$z_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yy)}}{p_G S} \quad (2.145)$$

D'autre part selon la deuxième équation du système Eq. (2.143) (cf. p 42), on a :

$$\begin{aligned} y_0 p_G S &= \rho g h \iint_S y dS - \rho g h \sin \alpha \iint_S y z dS \\ y_0 &= \frac{\rho g h}{p_G} \frac{1}{S} \iint_S y dS - \frac{\rho g h \sin \alpha}{p_G S} \iint_S y z dS \end{aligned} \quad (2.146)$$

En se basant sur Eq. (2.122) (cf. p 38), la coordonnée suivant (Gy) du centre de poussée est :

$$y_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yz)}}{p_G S} \quad (2.147)$$

En résumé, depuis Eqs. (2.145) (cf. p 42) et (2.147) (cf. p 42), les coordonnées du centre de poussée sont :

$$z_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yy)}}{p_G S} \quad y_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yz)}}{p_G S} \quad (2.148)$$

On peut également présenter ces coordonnées, Eq. (2.148) (cf. p 42), en termes de la distance algébrique du centre de gravité (White, 2016 [1]). Ainsi, en substituant $p_G = \rho g h$:

$$z_0 - z_G = -\frac{\rho g I_{(G,yy)}}{p_G S} \quad y_0 - y_G = -\frac{\rho g I_{(G,yz)}}{p_G S} \quad (2.149)$$

Cherchons maintenant la profondeur du centre de poussée. D'après la figure 2.33 (cf. FIGURE 2.33 Centre de poussée d'une paroi inclinée (S). p 41) :

$$h_0 = h - z_0 \sin \alpha \quad (2.150)$$

En substituant par Eq. (2.145) (cf. p 42) :

$$h_0 = h + \frac{I_{(G,yy)} \sin^2 \alpha}{hS} \quad (2.151)$$

Conventionnellement, nous pouvons écrire :

$$HP = HG + \frac{I_{(G,yy)} \sin^2 \alpha}{HG \times S} \quad (2.152)$$

HC et HG présentent les profondeurs des centres de gravité et de poussée respectivement. Nous avons trouvé la même expression que celle des parois verticales.

H. Hydrostatique dans un champ quelconque de forces

Comme nous l'avons introduit au début de ce chapitre, la statique des fluides concerne non seulement les fluides au repos sous l'influence de la gravité, mais également leur comportement lorsqu'ils subissent une transformation en bloc en réponse à une accélération constante ainsi à une force de volume, que la gravité soit présente ou non.

Imaginons un camion-citerne transportant un liquide rempli dans sa citerne, avec le niveau du liquide situé en dessous de la hauteur totale de la citerne. Au-dessus du liquide se trouve de l'air.

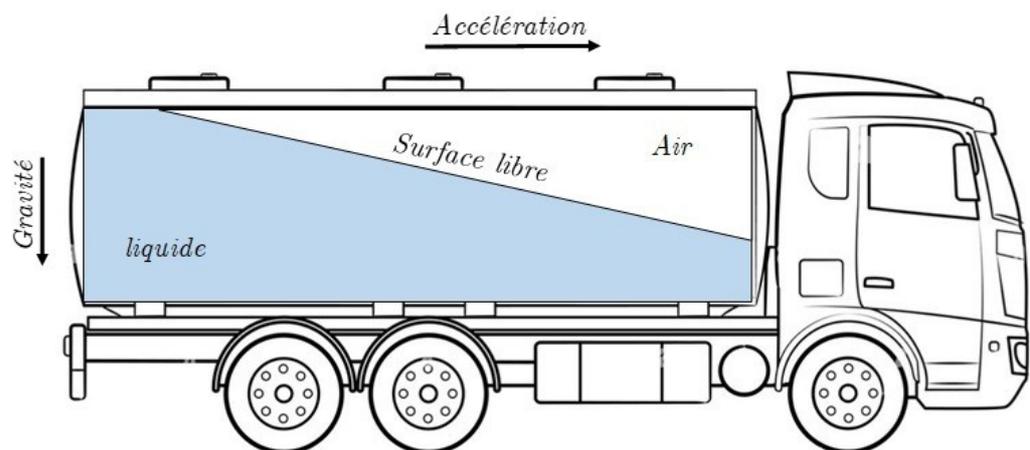


FIGURE 2.34 Camion-citerne en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Le camion se déplace en ligne droite avec une accélération constante. Pendant ce déplacement accéléré, la surface libre du liquide s'incline avec un angle α par rapport au plan horizontal (sol), ce qui entraîne une élévation progressive de la surface du liquide dans la direction opposée à l'accélération. Toutefois, si nous imaginons un observateur à l'intérieur de la citerne, il percevra l'état statique du liquide. Cependant, si cet observateur observe le mouvement depuis l'extérieur du

camion, depuis un point fixe, il constatera que le liquide se déplace en bloc, où chaque point du liquide se déplace avec la même accélération constante que le camion, voir figure 2.34 (cf. FIGURE 2.34 Camion-citerne en mouvement rectiligne uniformément accéléré. p 43).

En réalité, la statique des fluides englobe ce scénario de mouvement relatif uniformément accéléré, principalement en raison qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules du fluide, et par conséquent de l'absence de contrainte de cisaillement entre les différentes couches du fluide (également en raison de l'absence de différence de pression provoquant un état dynamique) que l'on appelle un écoulement visqueux.

1. Hydrostatique dans un champ d'accélération constant

Dans un référentiel Cartésien ($Oxyz$) dont l'axe z allant vers le zénith, considérons un liquide contenu dans un réservoir, soumis une force de volume due à une accélération constante a de coordonnées (a_x, a_y, a_z) en plus de l'accélération de la gravité (figure 2.35 (cf. FIGURE 2.35 Réservoir soumis à une force de volume (accélération). p 44)).

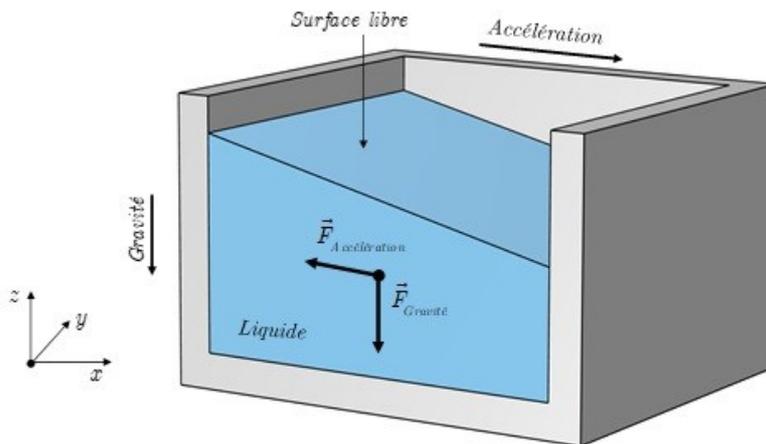


FIGURE 2.35 Réservoir soumis à une force de volume (accélération).

Cette accélération caractérise un mouvement rectiligne uniformément accéléré ou décéléré dans l'espace. En appliquant la loi fondamentale de la statique des fluides à cette situation Eq. (2.17) (cf. p 12), on obtient :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_x = 0 \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho a_y = 0 \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z = 0 \quad (2.153)$$

En raison de la présence des trois équations, Eq. (2.153) (cf. p 44), selon les différents axes, la pression est une fonction de la position x , y et z . Il est nécessaire de résoudre les trois équations, Eq. (2.17) (cf. p 12), afin que nous puissions déterminer le profil de pression. De la première équation du bilan Eq. (2.153) (cf. p 44), on a :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_x = 0 \implies \frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x \implies p(x, y, z) = \rho a_x x + f(y, z) \quad (2.154)$$

Avec f une fonction arbitraire de y et z . D'autre part, de la deuxième équation du bilan Eq. (2.153) (cf. p 44), avec substituant de l'équation Eq. (2.154) (cf. p 44), on a :

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho a_x x + f(y, z)) + \rho a_y = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} = \rho a_y \implies f(y, z) = \rho a_y y + k(z) \quad (2.155)$$

Avec k une fonction qui dépend que de z . Ainsi on trouve :

$$p(x, y, z) = \rho a_x x + \rho a_y y + k(z) \quad (2.156)$$

De la troisième équation du bilan Eq. (2.153) (cf. p 44), avec substitution de Eq. (2.156) (cf. p 45), on a :

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho a_x x + \rho a_y y + k(z)) + \rho a_z - \rho g = 0 \implies \frac{\partial k}{\partial z} = \rho(a_z - g) \implies k(z) = \rho(a_z - g)z + C \quad (2.157)$$

Avec C est une constante réelle. Le profil de pression est donc déterminé par la substitution de Eq. (2.157) (cf. p 45) dans Eq. (2.156) (cf. p 45). En conséquence, on a :

$$p(x, y, z) = \rho [\rho a_x x + \rho a_y y + (a_z - g)z] \quad (2.158)$$

La détermination de la constante C dépend de la dimension du réservoir, la pression de fluide en contact avec le liquide et de la déformation de la pression à surface libre.

La résultante des forces de volume permet de calculer le degré d'inclinaison de la surface libre. La force de gravité dans le repère donné est $\vec{F}_g = (0, 0, -\rho V g)$, avec V est le volume du fluide. Cependant, la force de volume due à l'accélération est donnée par : $\vec{F}_a = (\rho V a_x, \rho V a_y, \rho V a_z)$. La résultante des forces R est ainsi :

$$\vec{R} = \vec{F}_g + \vec{F}_a = \rho V (a_x, a_y, a_z - g) \quad (2.159)$$

Nous en déduisons que le vecteur $(a_x, a_y, a_z - g)$ se présente comme un vecteur normal de la surface libre ainsi que de toute surface isobare. Ces surfaces définissent un plan d'équation algébrique Cartésienne :

$$(plans\ isobares) : a_x x + a_y y + (a_z - g)z + Cte = 0 \quad (2.160)$$

Nous pouvons également exprimer Eq. (2.160 (cf. p 45)) par :

$$(plans\ isobares) : z = -\frac{a_x}{a_z - g}x - \frac{a_y}{a_z - g}y + Cte \quad (2.161)$$

2. Hydrostatique dans un champ d'accélération constant horizontal

Un mouvement rectiligne uniformément accéléré ou décéléré de ce réservoir rempli d'un liquide peut toujours être associé à une direction spécifique. En conséquence, en choisissant l'axe d'abscisse le long du vecteur d'accélération et en prenant en compte l'influence de la gravité, l'analyse de la statique des fluides en présence

d'une accélération constante se simplifie en deux dimensions. Dans cette section, nous nous focalisons sur le cas d'une accélération horizontale, c'est-à-dire perpendiculaire à la gravité, figure 2.36 (cf. FIGURE 2.36 Réservoir soumis à une force de volume (accélération) horizontale. p 46).

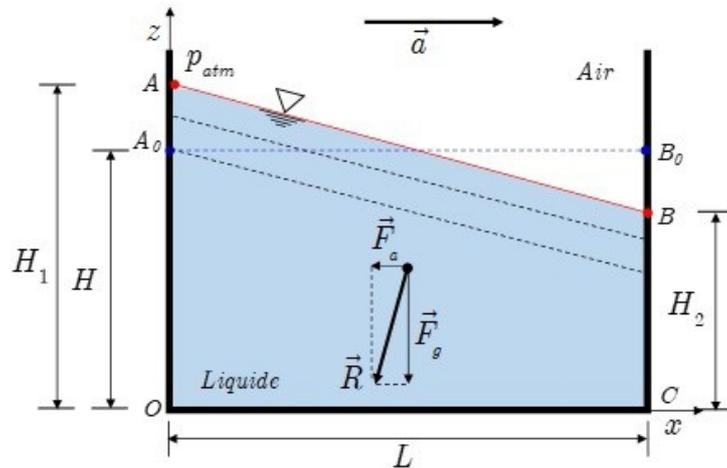


FIGURE 2.36 Réservoir soumis à une force de volume (accélération) horizontale.

a) Loi fondamentale d'hydrostatique

Cette étude se base sur les deux équations fondamentales définies dans le repère (Oxz) . Si a , représente l'accélération du réservoir, la force de volume le long de l'axe x agit en opposition à l'accélération, alors nous avons : $a_x = -a, a_y = a_z = 0$. Le bilan hydrostatique devient Eq. (2.17) (cf. p 12) :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \rho a = 0 \quad -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (2.162)$$

La partie plane de la section verticale du réservoir représentant le liquide possède une forme trapézoïdale $OABC$. La distribution de la pression dans cette surface est obtenue en intégrant les équations Eq. (2.162) (cf. p 46).

$$p(x, z) = -\rho a x - \rho g z + c \quad (2.163)$$

On peut écrire l'expression Eq. (2.163) (cf. p 46) également par :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{a}{g} x + z = Cte \quad (2.164)$$

Suivant la direction de la résultante des force R , en connaissant une pression p_0 à un point donné (x_0, z_0) nous pouvons définir la loi d'hydrostatique dans le présent cas par :

$$p - p_0 = -\rho a(x - x_0) - \rho g(z - z_0) \quad (2.165)$$

b) Surfaces isobares

Les surfaces isobares sont formées à partir de chaque pression constante Eq. (2.163) (cf. p 46). Elles se présentent sous la forme de plans définis par des équations cartésiennes :

$$p(x, z) = Cte \implies -\rho ax - \rho gz + C = cte \implies ax + gz = cte \quad (2.166)$$

Dans le plan de symétrie verticale, on peut définir des lignes isobares de pente $-a/g$ par l'équation suivante :

$$(Lignes isobares) : z = -\frac{a}{g}x + C \quad (2.167)$$

c) Surface libre

La surface libre, présentée par le segment $[AB]$, présente une inclinaison par rapport à la surface libre horizontale d'un fluide au repos gravitationnel, présentée par le segment $[A_0B_0]$. Comme nous connaissons la pente, l'angle d'inclinaison est de α . Pour déterminer l'équation de la surface libre, nous nous appuyons principalement sur les points A et B possédant des pressions atmosphériques et appartenant au segment $[AB]$. Nous déterminons la constante C de telle façon à obtenir l'équation de la surface libre :

$$A(0, H_1) \implies H_1 = C \quad B(L, H_2) \implies H_2 = -\frac{a}{g}L + C \quad (2.168)$$

En exprimant la surface libre en fonction de la hauteur H du fluide au repos uniquement sous l'effet de la gravité, nous appliquons l'équivalence des volumes du fluide dans deux états : au repos sous l'effet de la gravité et au repos soumis à l'accélération en bloc. En raison de la symétrie, il suffit de considérer l'équivalence des surfaces verticales :

$$A(ABCO) = A(OCA'B') \implies LH = \frac{(H_1 + H_2)L}{2} \quad (2.169)$$

En tenant compte Eqs. (2.168) (cf. p 47) et (2.169) (cf. p 47) La constante C , est donnée par :

$$2LH = (C - \frac{a}{g}L) \implies C = H + \frac{a}{2g}L \quad (2.170)$$

L'équation de la ligne isobare présentant la surface libre est par conséquent :

$$z = H + \frac{a}{2g}(L - 2x) \quad (2.171)$$

d) Distribution de la pression

En connaissant la pression atmosphérique dans un point de la surface libre, soit $A(0, z_A)$, nous pouvons écrire d'après l'équation Eq. (2.165) (cf. p 46) :

$$p - p_{atm} = -\rho a(x - 0) - \rho g \left(z - H - \frac{a}{2g} L \right) \quad (2.172)$$

Nous obtenons enfin la distribution de la pression dans le fluide au sein du réservoir :

$$p(x, z) = p_{atm} + \rho g(H - z) + \rho a \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (2.173)$$

Dans cette configuration, il est important de prendre en compte les intervalles de x et z . En effet, nous pouvons toujours considérer que :

$$0 \leq x \leq L \quad 0 \leq z \leq H + \frac{a}{2g}(L - 2x) \quad (2.174)$$

3. Hydrostatique dans un champ d'accélération de rotation uniforme

Étant donné que la statique des fluides se prolonge sur les équilibres dans des fluides au soumis à des forces d'accélération uniforme en bloc lors de mouvements rectilignes, il est possible d'étendre cette discipline aux fluides en rotation avec une vitesse angulaire uniforme. Par exemple, envisageons un liquide contenu dans un réservoir cylindrique en rotation autour de son axe vertical. Dans ce scénario, la pression évoluera en fonction de la distance radiale depuis l'axe, et l'équilibre sera préservé grâce à la variation de la pression en fonction de la profondeur et à la force centrifuge.

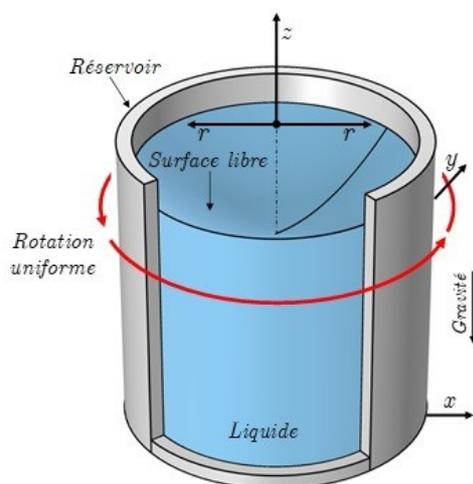


FIGURE 2.37 Liquide dans réservoir cylindrique en rotation uniforme.

L'accélération de rotation a que soumis le fluide dans le réservoir est une accélération qui résulte du changement de la direction de la vitesse en mouvement circulaire, voir figure 2.37 (cf. FIGURE 2.37 Liquide dans réservoir cylindrique en rotation uniforme. p 48). Lorsqu'un fluide est en rotation avec une vitesse angulaire uniforme ω , chaque particule du fluide subit une accélération radiale (r) centrée sur

l'axe de rotation $a = a_r$. La force centrifuge F_a résultante de cette accélération de rotation agit radialement vers l'extérieur à partir de l'axe de rotation (sens inverse de l'accélération a), voir figure 2.38 (cf. FIGURE 2.38 Sections horizontale d'un réservoir cylindrique en rotation. p 49).

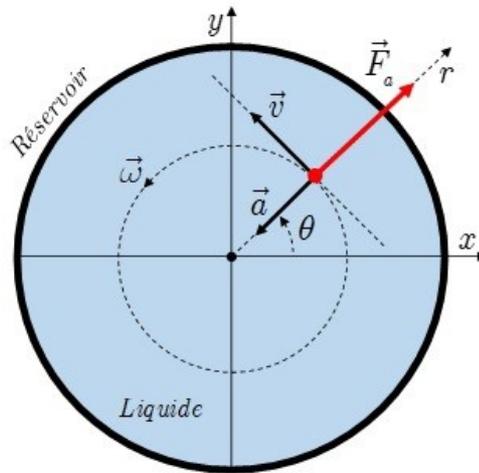


FIGURE 2.38 Sections horizontale d'un réservoir cylindrique en rotation.

Cette force est due à l'inertie du fluide qui tend à conserver son mouvement rectiligne même lorsque le contenant tourne. Dans le cas d'un fluide en rotation, la force centrifuge crée un déséquilibre entre les pressions sur les côtés intérieur et extérieur du fluide. Cela conduit à une pression accrue à l'extérieur et à une pression réduite à l'intérieur.

La résultante R des forces de gravité F_g et centrifuge F_a entraînent une déformation de la surface libre du fluide, prenant la forme d'un parabolôïde de sommet se situant à l'axe vertical (z).

a) Loi fondamentale d'hydrostatique

En raison de axisymétrie du problème et de l'indépendance vis-à-vis de la direction tangentielle θ , l'analyse peut être restreinte à un plan vertical (Orz), voir figure 2.39 (cf. FIGURE 2.39 Section verticale (axisymétrique) d'un réservoir cylindrique en rotation uniforme. p 50).

Dans ce contexte, seules deux forces de volume sont présente : la force gravitationnelle et celle due à l'accélération radiale a_r . En conséquence, la loi fondamentale de l'hydrostatique ne dépend que des directions radiale et verticale. Cette particularité nous incite à utiliser les équations de la statique des fluides dans leur forme cylindrique Eq. (2.29) (cf. p 14). Nous avons respectivement suivant les directions radiale et axiale :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho a(r) = 0 \quad -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (2.175)$$

Avec $a_r = a(r)$. Puisque l'accélération radiale change selon la position radiale, nous cherchons son expression en fonction de r :

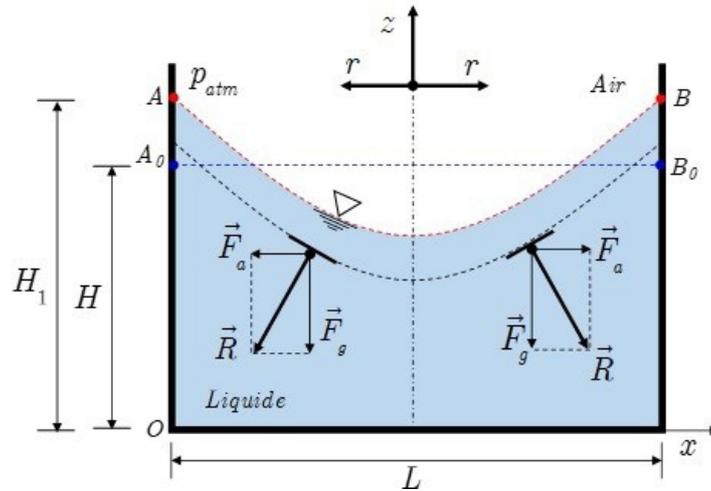


FIGURE 2.39 Section verticale (axisymétrique) d'un réservoir cylindrique en rotation uniforme.

$$a_r = v\omega = (r\omega)\omega \implies a_r = r\omega^2 \quad (2.176)$$

Nous obtenons depuis l'équation de l'hydrostatique radiale de Eq. (2.175) (cf. p 49) :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho r\omega^2 = 0 \implies \frac{\partial p}{\partial r} = \rho r\omega^2 - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho r\omega^2 = 0 \implies p(r, z) = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + f(z) \quad (2.177)$$

En substituant Eq. (2.177) (cf. p 50) dans l'équation suivant (z) apparaissant dans Eq. (2.175) (cf. p 49) :

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + f(z) \right) - \rho g = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial z} = -\rho g \implies f(z) = -\rho g z + C \quad (2.178)$$

Donc, on obtient en substituant Eq. (2.178) (cf. p 50) dans Eq. (2.177) (cf. p 50) :

$$p(r, z) = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C \quad (2.179)$$

On peut écrire Eq. (2.179) (cf. p 50) également :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z = Cte \quad (2.180)$$

Suivant la direction de la résultante des force R , en connaissant une pression p_0 à un point donné (r_0, z_0) nous pouvons définir la loi d'hydrostatique dans le présent cas par :

$$p - p_0 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2) - \rho g(z - z_0) \quad (2.181)$$

b) Surfaces isobares

Les surfaces isobares sont formées à partir de chaque pression constante. Elles se présentent depuis Eq. (2.179) (cf. p 50) sous la forme de paraboloïde d'équation cartésienne :

$$p(r, z) = Cte \implies \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 - \rho gz + C = Cte \implies \frac{\omega^2}{2}r^2 - gz = C \quad (2.182)$$

Dans le plan axisymétrique verticale, on peut définir des courbes (lignes) paraboliques isobares de sommet se situant sur l'axe vertical par la forme canonique suivante :

$$(Lignes isobares) : z = \frac{\rho\omega^2}{2g}r^2 + C \quad (2.183)$$

c) Surface libre

La surface libre est présentée par la courbe parabolique passant du point A vers B . Dans le plan vertical, la ligne de la surface libre subit une déformation au niveau du plan vertical par rapport à la surface libre horizontale d'un fluide au repos gravitationnel présentée par le segment $[A_0B_0]$. Pour déterminer l'équation de la surface libre, nous nous appuyons principalement sur l'égalité du volume du fluide en rotation et à celui du fluide au repos sous l'effet de la gravité uniquement.

$$V_{Accelere} = V_{repos} \quad (2.184)$$

Le volume du fluide au repos gravitationnel, présente un volume d'un cylindre de rayon $L/2$ et d'hauteur H . Nous avons à cet égard :

$$V_{repos} = \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 H \quad (2.185)$$

Le volume du fluide en rotation uniforme, présente le volume du solide compris entre la base du réservoir cylindrique (B) et la surface libre. Comme la base est un disque nous avons $r \leq L/2$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$V_{Accelere} = \iiint_{(B)} z r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{L/2} \left(\frac{\omega^2}{2g}r^2 + C \right) r dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{L/2} \left(\frac{\omega^2}{2g}r^3 + Cr \right) dr \quad (2.186)$$

Nous simplifions les calculs :

$$V_{Accelere} = 2\pi \left(\frac{\omega^2}{8g}r^4 + C \frac{r^2}{2} \right)_0^{L/2} = \frac{\omega^2}{4g} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 C \quad (2.187)$$

En faisant l'égalité entre les deux volumes, autrement dit par substitution de Eq. (2.187) (cf. p 51) et (2.185) (cf. p 51) dans Eq. (2.184) (cf. p 51), on obtient la constante C :

$$\frac{\omega^2}{4g} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 C = \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2 H \implies \frac{\omega^2 L^2}{16g} + C = H \implies C = H - \frac{\omega^2 L^2}{16g} \quad (2.188)$$

L'équation de la surface libre devient donc :

$$(Surface\ libre) : z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + H - \frac{\omega^2 L^2}{16g} \quad (2.189)$$

En simplifiant cette équation, on obtient :

$$(Surface\ libre) : z = \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{L^2}{8} \right) + H \quad (2.190)$$

d) Distribution de la pression

En connaissant la pression atmosphérique dans un point de la surface libre, soit $O(0, z_0)$, nous pouvons écrire d'après Eq. (2.181) (cf. p 50) :

$$z_0 = H - \frac{\omega^2 L^2}{16g} \implies p - p_{atm} = \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - 0) - \rho g \left(z - H + \frac{\omega^2 L^2}{16g} \right) \quad (2.191)$$

On obtient enfin la distribution de la pression dans le fluide :

$$p - p_{atm} = \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{L^2}{8} \right) - \rho g (z - H) \quad (2.192)$$

Dans cette configuration, il est important de prendre en compte les intervalles de r et z . En effet, nous pouvons toujours considérer :

$$0 \leq r \leq \frac{L}{2} \quad 0 \leq z \leq \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{L^2}{8} \right) + H \quad (2.193)$$

I. Notion sur la statique des fluide compressibles

Dans la statique des fluides, nous avons jusqu'à présent abordé principalement les fluides incompressibles, c'est-à-dire des liquides dont la densité reste constante. Cependant, il existe également des situations où les variations de pression peuvent affecter la densité du fluide. Dans cette section, nous explorerons brièvement la statique des fluides compressibles, où les variations de pression ont un impact significatif sur le comportement du fluide. Nous examinerons comment les lois et les concepts que nous avons étudiés pour les fluides incompressibles peuvent être étendus pour prendre en compte ces variations de densité (White, 2016 [1]).

Les gaz sont des fluides compressibles avec une densité presque proportionnelle à la pression. Ainsi, la masse volumique dans le bilan fondamental de l'hydrostatique est considéré comme variable également en fonction de la pression $\rho = \rho(p)$. A cet égard, on écrit l'équation Eq. (2.18) (cf. p 12) comme suit :

$$-\nabla p + \rho(p)\vec{a} = 0 \quad (2.194)$$

Dans cette section, on se concentre exclusivement sur la statique gravitationnelle des fluides. Par conséquent, l'équation différentielle qui en découle le long de l'axe z dirigé vers le zénith obtenu depuis Eq. (2.194) (cf. p 52) peut être exprimée sous la forme d'une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dp}{dz} + \rho(p)g = 0 \quad (2.195)$$

En supposant que le gaz se présente comme un fluide parfait, on a la relation fondamentale des gaz parfaits suivantes :

$$PV = nR_0T \quad (2.196)$$

Avec R_0 présente la constante des gaz réels et T sa température. En se basant sur le fait que $n = m/M$, avec M est la masse molaire du gaz, l'équation Eq. (2.196) (cf. p 53) devient :

$$PV = \frac{m}{M}R_0T \implies p = \frac{m}{V} \frac{R_0T}{M} \implies p = \frac{\rho R_0T}{M} \implies \rho(p) = \frac{M}{R_0T}p \quad (2.197)$$

En Substituant la masse volumique obtenus de Eq. (2.197) (cf. p 53) dans Eq. (2.195) (cf. p 53), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp}{dz} + \frac{M}{R_0T}pg = 0 \quad (2.198)$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Sa résolution se base sur la méthode de séparation des variables :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{M}{R_0T}pg \implies \frac{dp}{p} = -\frac{M}{R_0T}g dz \implies \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{M}{R_0T}g dz \quad (2.199)$$

L'intégration sera réalisée en supposant que le gaz se trouve à une température constante, créant ainsi un environnement isotherme avec $T = T_0$. En conséquence, nous parvenons à l'expression suivante :

$$\log |p| = -\frac{Mg}{R_0T_0}z + Cte \implies p = \exp\left(-\frac{Mg}{R_0T_0}z + Cte\right) \quad (2.200)$$

Comme l'exponentiel d'une constante est une constante, nous pouvons écrire tout simplement la distribution de la pression dans le gaz parfaits par :

$$p = C \exp\left(-\frac{Mg}{R_0T_0}z\right) \quad (2.201)$$

Avec C est une constante à déterminer selon les conditions aux limites introduites sur le gaz étudié. Nous pouvons d'autre part exprimer la loi de la statique des gaz parfaits dans un milieu isotherme Eq. (2.201) (cf. p 53) comme suit :

$$p \exp\left(\frac{Mg}{R_0T_0}z\right) = Cte \quad (2.202)$$

En connaissant une pression p_0 dans un point z_0 , à partir de Eq. (2.202) (cf. p 53) nous sommes en mesure d'écrire :

$$p_0 \exp\left(\frac{Mg}{R_0 T_0} z_0\right) = p \exp\left(\frac{Mg}{R_0 T_0} z\right) \quad (2.203)$$

Autrement dit, on a :

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Mg}{R_0 T_0} (z - z_0)\right) \quad (2.204)$$

J. Conclusion

Ce chapitre sur la statique des fluides a abordé des concepts fondamentaux qui jettent les bases de notre compréhension des comportements statiques des fluides, que ce soit en situation d'équilibre sous l'influence de la gravité, dans des champs d'accélération constants ou dans des conditions particulières.

Loi fondamentale de la statique des fluides : cette loi fondamentale énonce que tout fluide en équilibre est soumis à une force de pression perpendiculaire à sa surface libre. Elle permet de comprendre comment la pression varie avec la profondeur dans un fluide statique.

Hydrostatique : elle traite du comportement des fluides incompressibles au repos sous l'influence de la gravité. Elle démontre comment la pression varie avec la hauteur dans un liquide en équilibre hydrostatique, et comment les forces de pression s'exercent sur les surfaces immergées et en contact avec des fluides.

Théorème de Pascal : stipule que toute variation de pression exercée sur un fluide incompressible se propage de manière uniforme dans toutes les directions. Cela aide à comprendre comment les pressions s'ajustent dans un fluide en équilibre.

Théorème d'Archimède : décrit la force de poussée exercée par un fluide sur un objet immergé. Cette force est égale au poids du fluide déplacé par l'objet. Il permet de comprendre comment les objets flottent ou s'enfoncent dans un fluide en équilibre.

Force de pression : c'est la force exercée par un fluide sur une paroi. En se basant sur la pression effective au point considéré, le calcul de la force de poussée sur une surface immergée ou en contact avec un fluide se base sur la détermination de la pression au point de gravité. Cependant, la détermination du centre de poussée, point au quel cette force est appliqué se base sur le principe d'équilibre des moments en ce point.

Hydrostatique dans un autre champ d'accélération : c'est une généralisation de l'hydrostatique en considérant des champs d'accélération constants autres que la gravité. Cette discipline adapte les équations de l'hydrostatique pour analyser des fluides en équilibre dans ces conditions.

Notion sur la statique des gaz : met en avant le comportement statique des gaz dans le cas où la température est constante. Elle explore les pressions dans un gaz en équilibre, en tenant en compte que la densité varie en fonction de la pression par le biais d'une relation obtenue depuis la loi des gaz parfait.

Ces concepts forment la base de notre compréhension des comportements des fluides en équilibre, et ils sont essentiels pour aborder des problèmes plus complexes dans le domaine de la mécanique des fluides.

K. Exercices du chapitre 02

Objectifs

À la fin de cette série, l'apprenant devrait être capable de comprendre et d'appliquer plusieurs concepts clés :

- Les lois fondamentales de la statique des fluides, notamment la loi de Pascal et la loi d'Archimède
- Comprendre le principe d'Archimède et son lien avec la flottabilité.
- Être capable de résoudre des problèmes plus complexes impliquant des fluides compressibles, des systèmes ouverts et fermés, etc.

1. Exercice : Exercice 01

[Solution n°1 p 57]

La pression agissant sur le fond d'un réservoir contenant de l'eau de masse volumique de 1000 kg à un niveau de 3 m est de :

29430 Pa

130755 Pa

140755 Pa

630755 Pa

2. Exercice : Exercice 02

[Solution n°2 p 57]

Le principe de Pascal est vérifié pour les fluides :

Newtonien

Compressible

Incompressible

Incompressible non-Newtonien

3. Exercice : Exercice 03

[Solution n°3 p 57]

La distribution de la pression statique d'un gaz parfait prend une allure :

Linéaire

Non linéaire

Exponentielle

Parabolique

4. Exercice 04

Un réservoir situé à bord d'un camion-citerne, mesurant 4 mètres de long et 2.5 mètres de haut, contient de l'eau jusqu'à une profondeur de 1.5 mètre, exposée à la pression atmosphérique. Ce camion-citerne est en déplacement, subissant une accélération constante de 3 m/s^2 . La figure 1 (cf. Figure 1. Camion-citerne transportant l'eau. p 56) illustre une coupe longitudinale du réservoir.

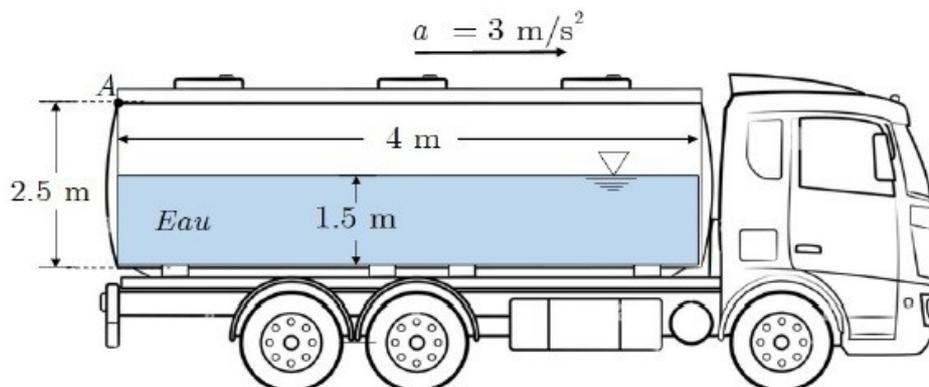


Figure 1. Camion-citerne transportant l'eau.

Question 1

[Solution n°4 p 57]

Déterminer la distribution de pression au niveau de la coupe indiquée.

Question 2

[Solution n°5 p 59]

Trouver l'accélération minimale nécessaire pour que le liquide atteigne la paroi supérieure du réservoir.

5. Travaux dirigés

Série d'exercice 02. Statique des fluides

Série 02- Statique des fluides.pdf
Document 1

Solution de la série d'exercice 02. Statique des fluides

Solution de Série 02- Statique des fluides.pdf
Document 2

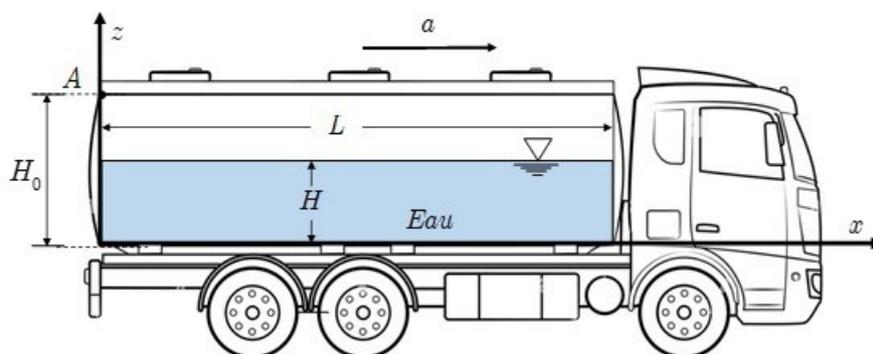


Figure 2. Camion-citerne transportant l'eau se déplace avec $a = 0$.

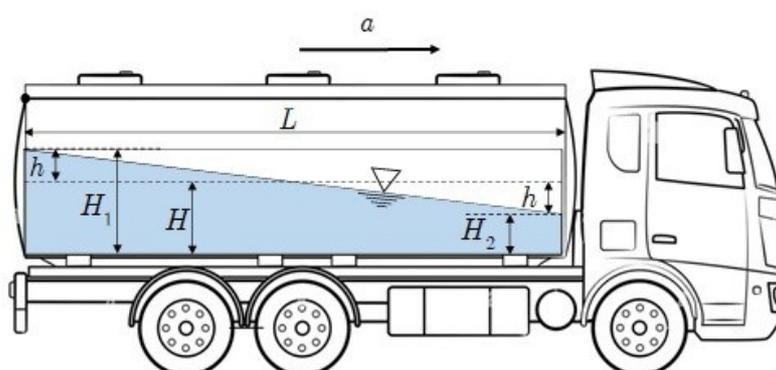


Figure 3. Camion-citerne transportant l'eau se déplace avec $a > 0$.

La loi fondamentale de la statique relative est donnée par les formules Eqs. (2.173) (cf. p 48) et (2.174) (cf. p 48)

$$p(x, z) = p_{atm} + \rho g(H - z) + \rho a \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq L \quad 0 \leq z \leq H + \frac{a}{2g}(L - 2x) \quad (2)$$

Application numérique donne la distribution de la pression dans le réservoir comme suit :

$$p(x, z) = 1.015 \times 10^5 + 9810(1.5 - z) + 3000(2 - x) \quad (3)$$

Avec :

$$0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq z \leq 1.5 + 0.1529(2 - 2x) \quad (4)$$

Le fluide dans le camion-citerne atteint le point A de coordonnées $(0, H_0)$, signifie que l'isobare de la surface libre passe par le point A . Il est nécessaire de déterminer l'isobare de la surface libre en fonction de a . La surface libre présente la surface d'équation $p(x, z) = p_{atm}$ depuis Eq. (2.171) (cf. p 47):

$$z = H + \frac{a}{2g}(L - 2x) \quad (5)$$

Pour que cette surface (ligne isobare) atteigne le point A , il faut que :

$$z(0) = H_0 \quad (6)$$

C'est-à-dire :

$$H_0 = H + \frac{a}{2g}(L - 2 \times 0) \implies a = \frac{2g(H_0 - H)}{L} \quad (7)$$

Application numérique :

$$a = \frac{2 \times 9.81(2.5 - 1.5)}{4} = 4.905 \text{ m/s}^2 \quad (8)$$