École nationale polytechnique
Maurice Audin- Oran
Département de FPST

Module : Mécanique des fluides
Date : *18* Jan. *2024*
Durée : *02* h et *00* min

Examen Final - Semestre 03 -

Exercice 01 : (*6 pts*)

Un camion-citerne transporte de l'eau à un niveau $H = 1.25$ m dans un réservoir parallélépipédique de dimensions $L \times \ell \times H_0$. Il se déplace horizontalement sur selon un mouvement rectiligne avec une accélération a, comme illustré dans la figure **1**. Ce réservoir est équipé d'une conduite cylindrique ayant une section de diamètre D, située à une distance h à partir du fond du réservoir. À l'intérieur de cette conduite, une vanne d'un disque de masse négligeable est installée.

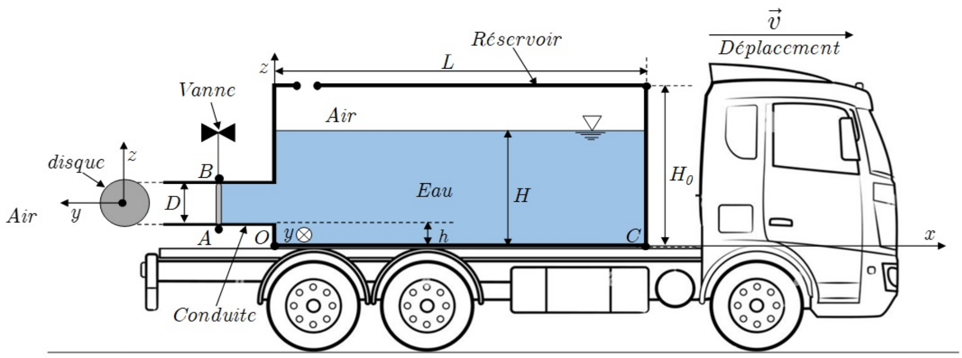


Figure **1**. Camion-citerne transportant de l'eau.

On a : $L = 3$ m, $H_0 = \ell = 1.5$ m, $D = 3$ cm, $h = 5$ cm, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, $\mu = 0.001$ Pa.s.

I. En supposant que le camion-citerne se déplace avec une accélération nulle ($a = 0$) :
1. Déterminer la distribution de pression dans le réservoir.
2. Calculer la force de pression agissant sur le disque de la vanne (AB).
3. Déterminer la profondeur du centre de poussée du disque (AB).

II. Le camion-citerne décélère brusquement avec une accélération $a = -1.5$ m.s^{-2}.
1. Déterminer la distribution de pression dans le réservoir.
2. Déterminer la pression au fond du réservoir (OC).
3. Calculer l'intensité de la force de pression agissant sur ce fond (OC).

Exercice 02 : (*6 pts*)

On examine un écoulement stationnaire d'un fluide près d'un point d'arrêt, identifié par son potentiel complexe de vitesse, décrit par la fonction analytique f de la variable complexe $z = x + iy$, donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{a}{2}z^2 + bz, \quad \text{avec } a = 2\,\mathrm{s}^{-1} \text{ et } b = 1\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

1. L'écoulement conserve-t-il la masse ? est-il incompressible ? rotationnel ?
2. Déterminer le potentiel de vitesse ϕ et la fonction de courant ψ.
3. Déterminer l'équation algébrique des lignes de courant et celle des trajectoires.
4. Calculer les champs de vitesse et d'accélération du fluide.

Problème : (*8 pts*)

Dans le cadre d'une étude théorique, une suspension contenant une fraction volumique ϕ de nanoparticules d'alumine suspendues dans de l'eau pure est introduite dans un réservoir cylindrique de grand diamètre. Pour évacuer cette suspension, une conduite cylindrique étroite, d'un diamètre $D = 0.2$ cm et d'une longueur $L = 1.5$ m, est positionnée en bas du réservoir d'une profondeur $H = 1$ m qui reste constante, auquel un manomètre est installé. Cette conduite est inclinée par rapport au plan horizontal avec un angle α. La figure **2** illustre une section longitudinale du système du réservoir dans un plan (Oxz).

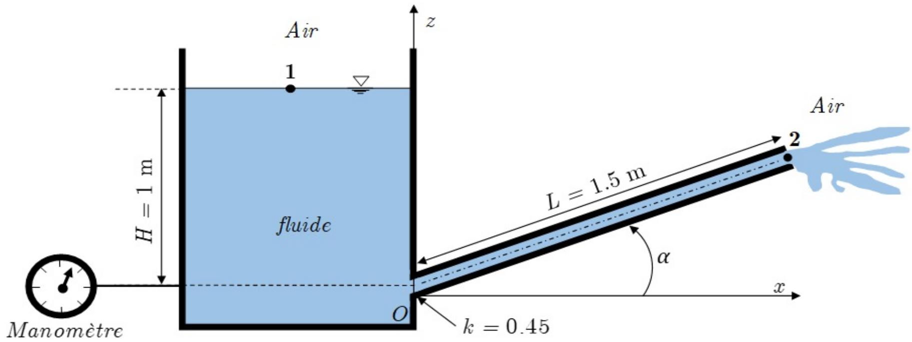


Figure **2**. Réservoir contenant une suspension fluidique.

On a : $\rho_{eau} = 1000$ kg.m^{-3}, $\rho_{alumine} = 3970$ kg.m^{-3}, $\mu_{eau} = 0.001$ Pa.s.

Partie 01- Statique (1.5 pts)

1. Déterminer l'angle α au-delà duquel le fluide soit en état statique.
2. Calculer la fraction ϕ sachant que le manomètre affiche en état statique 10975 Pa
3. Calculer la masse volumique et la viscosité de cette suspension.

Partie 02- Dynamique (4 pts)

Dans le cas d'une conduite horizontale ($\alpha = 0$) avec une suspension ayant une fraction volumique $\phi = 0.04$, l'état devient dynamique dont l'écoulement est stationnaire. Cet écoulement subit des pertes de charge régulières et singulières. Ces dernières sont induites par le rétrécissement au point de contact entre le réservoir et la conduite et caractérisées par un coefficient $k = 0.45$. On suppose que le régime d'écoulement soit laminaire.

1. Calculer la vitesse à la sortie de la conduite (point 2).
2. Vérifier la supposition du régime laminaire.
3. Calculer la différence de pression au sein de la conduite Δp.

Partie 03- Profil de vitesse (2.5 pts)

L'écoulement stationnaire de la suspension ($\phi = 0.04$) à l'intérieur de la conduite horizontale ($\alpha = 0$) est unidimensionnel et est provoqué par une différence de pression $\Delta p = 10628$ Pa. En supposant que l'écoulement se produise entièrement dans un plan (Oxz), il devient caractérisé par un champ de vitesse $\vec{v} = (u, w)$. Les forces de gravité sont négligées.

1. Formuler les équations de conservation qui gouvernent l'écoulement.
2. Déterminer le profil de vitesse $u = u(z)$.
2. L'écoulement est-il rotationnel

Mécanique des fluides

Propriétés des fluides

Propriétés physiques

Densité	Frottement	Cisaillement	Viscosité cin.
$\rho = \dfrac{m}{V}$	$F_T = \mu S \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$	$\tau = \mu \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$	$\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$

Fluides complexes (Non-Newtoniens)

Loi de Herschel-Bulkley

$$\tau = \tau_c + m\dot{\gamma}^n$$

$\tau_c \neq 0$	$\tau_c \neq 0$ et n = 1	$\tau_c = 0$
Fluide seuil	Fluide de Bingham	n = 1 : Fluide Newtonien n > 1 : Fluide dilatant n < 1 : Fluide fluidifiant

Loi de mélanges miscibles (solution)

Densité : deux fluides

$$\rho_m = \frac{V_{fluide_1}\rho_{fluide_1} + \rho_{fluide_2}V_{fluide_2}}{V_{fluide_1} + V_{fluide_2}}$$

Densité : Fluide + particules

$$\rho_m = \frac{V_{fluide}\rho_{fluide} + \rho_{particules}V_{particules}}{V_{fluide} + V_{particules}}$$

Loi de suspension de fraction volumique φ

Masse volumique

$$\rho_{suspension} = \varphi\rho_{particules} + (1-\varphi)\rho_{fluide}$$

Viscosité selon Brinkmann

$$\mu_{suspension} = \mu_{fluid}(1-\varphi)^{-2.5}$$

Statique des fluides

Equation fondamentale d'hydrostatique absolue

Equation globale

$$-\nabla p + \rho\vec{g} = 0$$

Distribution de pression (*Oz*)

$$p(z) - p_0 = -\rho g(z - z_0)$$

Loi fondamentale d'hydrostatique relative

Equation globale

$$-\nabla p + \rho\vec{g} + \rho\vec{a} = 0$$

Distribution de pression (*Oxz*)

$$p(x,z) - p_0 = \rho a\left(\tfrac{L}{2} - x\right) + \rho g\left(H - z\right)$$

Equation de la surface libre : $z = H + \frac{a}{2g}\left(L - 2x\right)$

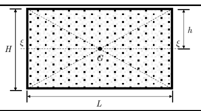
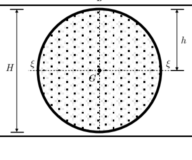
Force de pression sur une surface

Globale	Archimède	Paroi plane
$\vec{F} = \iint_S p\ \mathrm{d}\vec{S}$	$\vec{F} = \rho_{fluide}V_{objet}\vec{g}$	$\vec{F} = p_G S.\vec{n}$

Centre de poussée d'une paroi plane $G_0(y_0,z_0)$

$$z_0 = -\frac{I_{G,xx}\sin\alpha}{h_G S},\ y_0 = -\frac{I_{G,xy}\sin\alpha}{h_G S}$$

Moments d'inertie

Forme de la surface		Distance h / Aire S / Moment d'inertie I		
Rectang		$h = \dfrac{H}{2}$	$S = LH$	$I_{\xi\xi} = \dfrac{LH^3}{12}$
Cercle		$h = \dfrac{H}{2}$	$S = \dfrac{\pi H^2}{4}$	$I_{\xi\xi} = \dfrac{\pi H^4}{64}$

Cinématique des fluides

Equation de continuité

Equation globale

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{v}) = 0$$

En coordonnées Cartésienne

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Continuité d'un écoulement incompressible

Equation globale

$$\nabla.\vec{v} = 0$$

En coordonnées Cartésienne

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Débit

Débit massique	Débit volumique
$Q_m = \iint_S \rho\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}$	$Q_v = \iint_S \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}$

Champ d'accélération Eulérienne

Equation globale

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}$$

En coordonnées Cartésienne

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Lignes de courant et trajectoires

Lignes de courant	Trajectoires
$\dfrac{\mathrm{d}x}{u} = \dfrac{\mathrm{d}y}{v} = \dfrac{\mathrm{d}z}{w}$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{u} = \dfrac{\mathrm{d}y}{v} = \dfrac{\mathrm{d}z}{w} = \mathrm{d}t$

Fonction de courant ψ

Equation de courant pour un écoulement plan

Equations globales	Débit masse	Lignes de courant
$\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -v\ /\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = u$	$Q = \psi_2 - \psi_1$	$\psi(x,y) = cte$

Rotation d'écoulement

Vorticité ω	Ecoulement	Potentiel de vitesse φ
$\vec{\omega} = \nabla\times\vec{v}$	$\omega = 0$: irrotationnel	$\vec{v} = \nabla\varphi$
	$\omega \neq 0$: rotationnel	N'existe pas

Champ de vitesse

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \text{ et }\ w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Potentiel complexe Φ

Pour un écoulement plan irrotationnel incompressible

$$\Phi(z) = \Phi(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

Dynamique des fluides incompressibles

Equations de Navier-Stokes

Pour un écoulement incompressible laminaire

$$\nabla.\vec{v} = 0 \qquad \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g}$$

En coordonnées Cartésienne

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \rho g$$

Equation de Bernoulli généralisée

Le long d'une ligne de courant entre deux points 1 et 2

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_{net}}{gQ_m} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \Delta H_r + \Delta H_s$$

Pertes de charges

Régulière	Singulière	Nombre de Reynolds
$\Delta H_r = \lambda\dfrac{L}{D}\dfrac{v^2}{2g}$	$\Delta H_s = \sum k_i \dfrac{v_i^2}{2g}$	$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v D}{\mu}$

Coefficient de frottement

$\mathrm{Re} \prec 2000$	$2000 \leq \mathrm{Re} \prec 10^5$	$\mathrm{Re} \geq 10^5$
Laminaire	Transitoire	Turbulent
$\lambda = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$	$\lambda = 0.316\,\mathrm{Re}^{-0.25}$	$\lambda = 0.79\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{D}}$