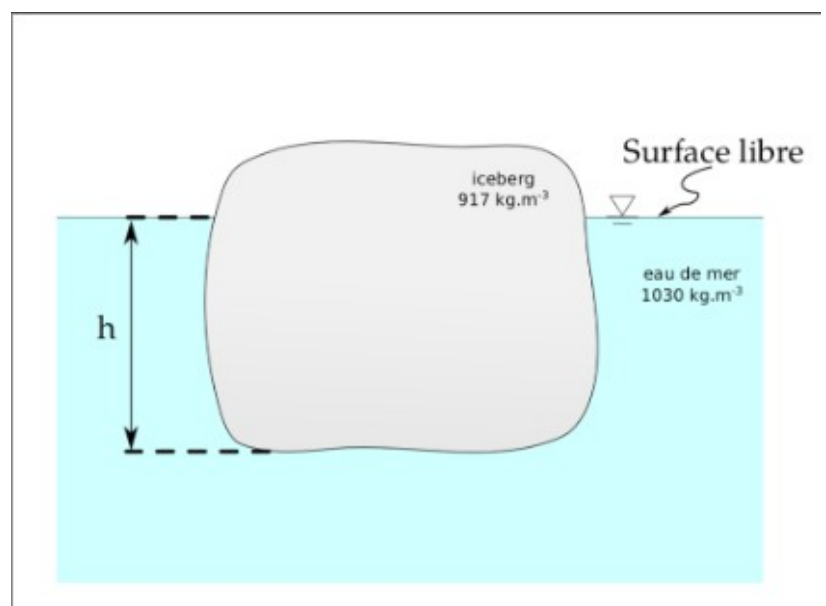


Chapitre 2

Statiques des

fluides

1.0



DR DJAMILA DERBAL

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ORAN

DÉPARTEMENT DE FORMATION PRÉPARATOIRE EN TECHNOLOGIE

E MAIL : Wafa.DERBAL@YAHOO.FR

03/06/2024

Table des matières



Objectifs	5
I - Chapitre 02 Statiques des fluides	7
A. Introduction.....	7
B. Notion de pression.....	8
1. Contraintes tangentielle et normale.....	8
2. Pression statique d'un fluide.....	9
3. Isotropie de la pression en point.....	10
4. Pression absolue et relative.....	11
C. Équation fondamentale de la statique des fluides.....	11
1. Détermination de l'équation de la statique des fluides.....	11
D. Statique des fluides incompressibles - Hydrostatique.....	14
1. Équation fondamentale de l'hydrostatique.....	14
2. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans un réservoir.....	17
3. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans des tubes en U.....	19
E. Instrument de mesure de la pression.....	21
1. Instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre.....	21
2. Instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre.....	25
F. Théorème de Pascal.....	25
1. Preuve du théorème.....	25
2. Principe vérin hydraulique.....	26
G. Théorème d'Archimède.....	27
1. Énoncé du théorème.....	27
2. Principe de la force d'Archimède.....	27
3. Flottabilité des objets.....	28
4. Centre de poussée et de gravité d'un objet immergé.....	28
H. Calcul des forces de pression.....	29
1. Force de pression sur une paroi d'un réservoir.....	29
2. Centre de poussée hydrostatique sur une paroi plane.....	31
I. Conclusion.....	37
J. Exercice.....	38
K. Série d'exercice N° 02. Statique des fluides.....	39
1. Série d'exercices avec solution.....	39
Solution des exercices	41
Bibliographie	43

Objectifs

A l'issue de ce chapitre l'apprenant sera capable de :

- Comprendre les principes de la statique des fluides, tels que le principe de Pascal et le principe d'Archimède ;
- Expliquer la variation de la pression avec la profondeur dans un fluide ;
- Appliquer les principes de la statique des fluides à des situations concrètes, telles que la conception d'un barrage, le fonctionnement d'un manomètre ou la mesure de la pression atmosphérique ;
- Décomposer les problèmes complexes en éléments plus simples et de les analyser ;
- Identifier les causes et les effets des phénomènes observés en statique des fluides.

Chapitre 02

Statiques des fluides



Introduction	7
Notion de pression	8
Équation fondamentale de la statique des fluides	11
Statique des fluides incompressibles - Hydrostatique	14
Instrument de mesure de la pression	21
Théorème de Pascal	25
Théorème d'Archimède	27
Calcul des forces de pression	29
Conclusion	37
Exercice	38
Série d'exercice N° 02. Statique des fluides	39

A. Introduction

On aborde dans ce chapitre la statique des fluides qui est une discipline explorant les propriétés et le comportement des fluides au repos, c'est-à-dire lorsque les forces en jeu sont équilibrées et qu'aucun mouvement global n'est observé. Alors, nous plongerons dans les concepts fondamentaux de la statique des fluides, mettant en lumière les pressions, les forces de flottabilité et les lois qui régissent ces phénomènes. L'étude de la statique des fluides est essentielle pour comprendre comment les liquides et les gaz réagissent aux forces qui agissent sur eux, qu'il s'agisse d'applications simples telles que les baromètres, ou de situations plus complexes ou la conception de structures immergées.

Dans ce chapitre, nous utilisons l'idée d'un point de vue immobile : **Hypothèse de la statique des fluides**, appelé référentiel, comme base pour comprendre comment les forces et les interactions fonctionnent dans les fluides. Nous imaginons un cadre fixe par rapport auquel nous étudions les mouvements et les pressions des liquides et des gaz. Alors les lois de calcul exposées dans ce chapitre trouvent leur fondement dans l'hypothèse essentielle cet référentiel fixe ou encore absolu.

Au cœur de la statique des fluides se trouvent **conditions d'équilibre des fluides**, qui définissent les situations où les lois de la statique des fluides s'appliquent. Ces lois nous aident à comprendre les forces et les pressions dans les fluides, et elles reposent sur deux situations importantes :

- **Fluide au repos** : l'équilibre se traduit par une absence de mouvement global dans le liquide, et les forces internes et externes sont équilibrées sous le champ de gravité.
- **Fluide subissant une accélération en bloc** : le système est introduit dans un champ de force uniforme en tout point. Même si le système est en mouvement, il peut néanmoins être en équilibre lorsque toutes les parties du liquide subissent la même accélération, garantissant ainsi son déplacement est en bloc, voir Figure 2.1 (cf. FIGURE 2.1 Fluide au repos sous gravité et fluide accéléré en bloc. p 8)

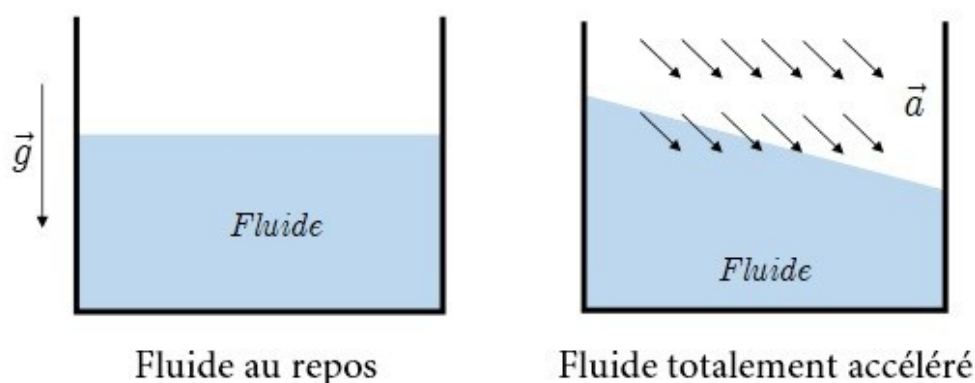


FIGURE 2.1 Fluide au repos sous gravité et fluide accéléré en bloc.

B. Notion de pression

1. Contraintes tangentielle et normale

Dans un milieu fluide schématisé dans la figure 2.2 (cf. FIGURE 2.2 Forces normale et tangentielle sur un élément de surface d'un fluide. p 9) par deux partie (1) et (2), la force F que la partie (1) exerce sur la partie (2) à travers un élément de surface réel ou fictif dS a une direction quelconque. Cependant, cette force se décompose souvent en deux composantes : normale F_N et tangentielle F_T . La partie (2) exerce ainsi une force de réaction équivalente en intensité et inversée en sens sur la partie (1).

L'effet que produit la force sur la surface d'interface entre les deux parties est appelée contrainte. On appelle contrainte normale notée σ , l'effet de la force normale sur cette interface. En N.m^{-2} , la contrainte normale est donnée par :

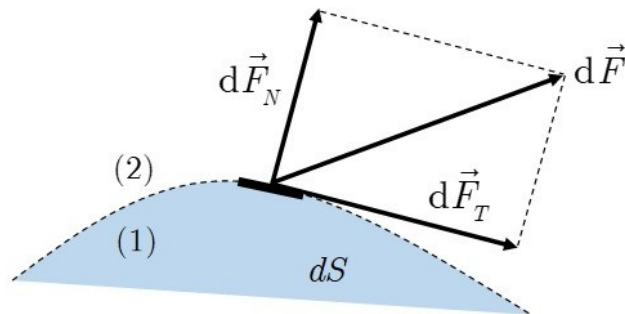


FIGURE 2.2 Forces normale et tangentielle sur un élément de surface d'un fluide.

$$\sigma = \frac{d\|\vec{F}_N\|}{dS} \quad (2.1)$$

Cependant, la contrainte tangentielle, présente l'effet de la force tangentielle (frottement) entre les deux parties, elle est donnée également en N.m^{-2} par :

$$\tau = \frac{d\|\vec{F}_T\|}{dS} \quad (2.2)$$

En statique des fluides seules les forces normales conduisant aux contraintes normales interviennent (Ben Hamouda, 2008 [7]).

2. Pression statique d'un fluide

La pression est une grandeur fondamentale en statique des fluides qui mesure la force exercée normalement par une substance sur une unité de surface. Mathématiquement, la pression (P) est définie comme la force (F) appliquée perpendiculairement à une surface divisée par la superficie (S) sur laquelle cette force agit. Autrement dit, la pression statique présente une contrainte normale en absence absolue de toute contrainte tangentielle. Si F est une force normale uniformément distribuée sur la surface S (figure 2.3 (cf. FIGURE 2.3 Fluide soumis une force uniforme de pression par un piston. p 10)), alors la pression statique en tous points de S est donnée en se basant sur Eq. (2.1) (cf. p 9) par :

$$p = \frac{F}{S} \quad (2.3)$$

La pression est souvent mesurée en N.m^{-2} ou encore par son unité usuelle Pa (Pascal). Il est à noter que, contrairement à la force, à l'accélération et à la vitesse, la pression est une grandeur scalaire, dépourvue de direction.

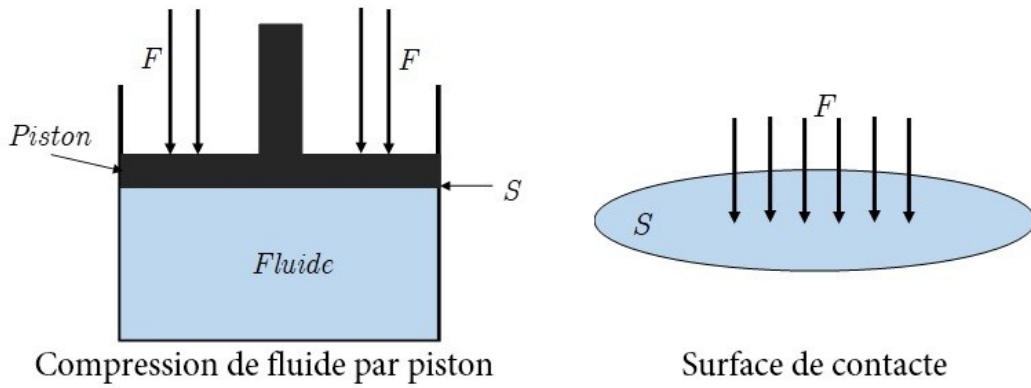


FIGURE 2.3 Fluide soumis une force uniforme de pression par un piston.

La connaissance de la pression en un point revêt une importance en statique des fluides. En effet, lorsque la force de pression F n'est pas uniformément répartie sur une surface S , il est impératif de déterminer la pression à chaque point afin de calculer la pression totale.

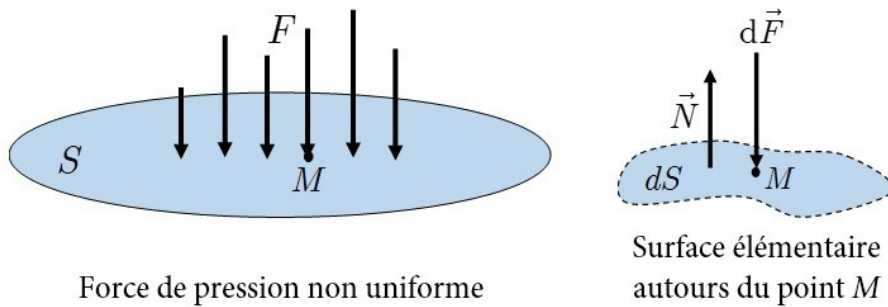


FIGURE 2.4 Pression en un point.

La force totale F agissant sur la surface S est déterminée par :

$$\vec{F} = \iint_S p dS \implies F\vec{N} = \iint_S p\vec{N} dS \implies F = \iint_S p dS \quad (2.4)$$

La pression statique dans ce cas-là est représenté par la variation de la force de pression F dans une surface élémentaire dS au point M , voir figure 2.4 (cf. FIGURE 2.4 Pression en un point. p 10) . En dérivant Eq. (2.4) (cf. p 10) :

$$\frac{dF}{dS}_M = \frac{d}{dS} \iint_S p dS_M \implies p_M = \frac{dF}{dS}_M \quad (2.5)$$

On obtient à partir de l'Eq. (2.5) (cf. p 10) :

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (2.6)$$

3. Isotropie de la pression en point

Dans un fluide statique, la pression est isotrope, ce qui signifie que la même valeur de pression est exercée dans toutes les directions à partir d'un point donné M (White, 2016 [1]).

4. Pression absolue et relative

a) Pression absolue

La pression absolue P_a est la pression mesurée par rapport au vide complet, c'est-à-dire la pression absolue zéro. Elle inclut la pression atmosphérique ambiante en plus de la pression résultant d'autres sources, comme une pression de liquide ou de gaz dans un récipient.

b) Pression relative

La pression relative P_r , également appelée pression différentielle, est la différence entre la pression absolue à un point donné et une référence de pression spécifique. Cette référence peut être la pression atmosphérique environnante ou toute autre valeur de pression choisie comme point de référence.

$$p_a = p_r + p_{atm} \quad (2.7)$$

La pression relative permet de mesurer les variations de pression par rapport à une valeur de référence, indépendamment de la pression absolue ambiante. Cette pression présente la valeur affichée par le manomètre mécanique présenté dans la figure 2.5 (cf. FIGURE 2.5 Instrument de mesure de la pression relative - Manomètre. p 11).



FIGURE 2.5 Instrument de mesure de la pression relative - Manomètre.

C. Équation fondamentale de la statique des fluides

1. Détermination de l'équation de la statique des fluides

Le but de cette partie est de fournir une relation quantitative entre la pression, la densité du fluide, l'accélération et la position d'un point de fluide au repos. Par conséquent, cette relation permettra de calculer la pression à différentes positions dans un fluide statique. Pour ce faire, on considère un élément parallélépipédique ΔV d'un fluide de masse volumique ρ au repos dans un réservoir muni de repère Cartésien $(Oxyz)$ dont \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires comme il est présenté dans la figure 2.6 (cf. FIGURE 2.6 Volume de contrôle d'un fluide au repos. p 12).

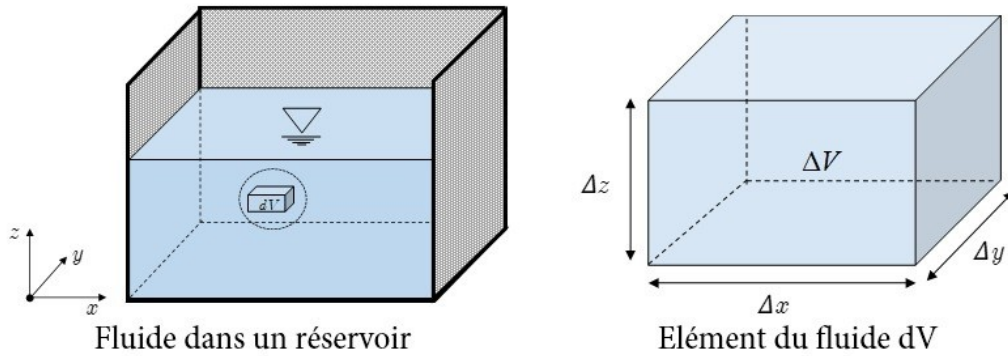


FIGURE 2.6 Volume de contrôle d'un fluide au repos.

L'élément du fluide ΔV a la dimension $\Delta x \Delta y \Delta z$. Les seules forces agissant sur cet élément de fluide sont les forces de pression et les forces de volume.

Les forces de pression notée F_p agissent sur les surfaces latérales de l'élément de fluide dV c'est-à-dire sur les 6 facettes du parallélépipède. Les forces de pressions F_{p_x} et $F_{p_{x+\Delta x}}$ agissent sur les deux facettes parallèles d'aire $\Delta y \Delta z$, les forces F_{p_y} et $F_{p_{y+\Delta y}}$ sur les deux facettes parallèles d'aire $\Delta x \Delta z$ et les forces F_{p_z} et $F_{p_{z+\Delta z}}$ sur les deux facettes parallèles d'aire $\Delta x \Delta y$, voir figure 2.7 (cf. FIGURE 2.7 Forces de surface (pression) et de volume agissant sur un élément de fluide. p 12).

Quant aux forces de volume, elles agissent sur le volume de contrôle et sont globaliser par leur vecteur résultant F de composantes Cartésiennes F_x , F_y et F_z , voir figure 2.7 (cf. FIGURE 2.7 Forces de surface (pression) et de volume agissant sur un élément de fluide. p 12).

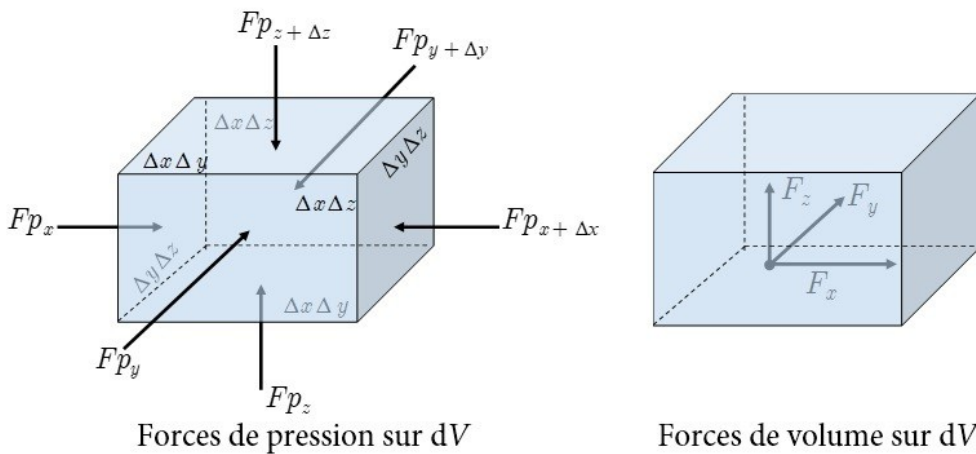


FIGURE 2.7 Forces de surface (pression) et de volume agissant sur un élément de fluide.

Nous appliquons le premier principe de Newton, le principe fondamental de la statique sur le volume ΔV , puis on prolonge pour tous le fluide au repos, ainsi nous avons :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_p + \vec{F} \quad (2.8)$$

Projections les vecteurs des deux membres de l'équation Eq. (2.8) suivant les axes de coordonnées Cartésiennes x , y et z en se basant sur la figure 2.1 (cf. FIGURE 2.1 Fluide au repos sous gravité et fluide accéléré en bloc. p 8):

$$\begin{aligned} Ox : F_{px} - F_{x+\Delta x} + F_x &= 0 \\ Oy : F_{py} - F_{y+\Delta y} + F_y &= 0 \\ Oz : F_{pz} - F_{z+\Delta z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'après la définition de la pression Eq. (2.3) (cf. p 9), la force de pression est $F_p = p \cdot S$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Ox : F_{px} &= p_x dydz \\ Oy : F_{py} &= p_y dx dz \\ Oz : F_{pz} &= p_z dx dy \end{aligned} \quad (2.10)$$

Comme les aires des facettes parallèles sont égales, on a également :

$$\begin{aligned} Ox : F_{p_{x+\Delta x}} &= p_{x+\Delta x} dydz \\ Oy : F_{p_{y+\Delta y}} &= p_{y+\Delta y} dx dz \\ Oz : F_{p_{z+\Delta z}} &= p_{z+\Delta z} dx dy \end{aligned} \quad (2.11)$$

D'autre part, nous pouvons exprimer toujours les force de volume F comme le produit de la masse du fluide de l'élément ΔV qui est $\rho \Delta V$ par l'inverse d'une accélération, soit $a = (a_x, a_y, a_z)$. La masse du fluide est également donnée par :

$$m = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.12)$$

Ainsi les composantes de la résultante des forces de volume F sont :

$$\begin{aligned} Ox : F_x &= \rho a_x \Delta x \Delta y \Delta z \\ Oy : F_y &= \rho a_y \Delta x \Delta y \Delta z \\ Oz : F_z &= \rho a_z \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.13)$$

Substituons ces forces Eqs. (2.10 (cf. p 13))-(2.12 (cf. p 13)) dans les équations projetées Eq. (Eq. (2.9 (cf. p 13))) :

$$\begin{aligned} Ox : p_x \Delta y \Delta z - p_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \rho a_x \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \\ Oy : p_y \Delta x \Delta z - p_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \rho a_y \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \\ Oz : p_z \Delta x \Delta y - p_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y + \rho a_z \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Divisons maintenant les deux membres de chaque équation Eq. (2.14) (cf. p 13) par le volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} Ox : p_x \Delta y \Delta z - p_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \rho a_x \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \\ Oy : p_y \Delta x \Delta z - p_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \rho a_y \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \\ Oz : p_z \Delta x \Delta y - p_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y + \rho a_z \Delta x \Delta y \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Divisons maintenant les deux membres de chaque équation Eq. (2.14) (cf. p 13) par le volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} O_x : \frac{p_x - p_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho a_x = 0 & \quad O_x : -\frac{p_{x+\Delta x} - p_x}{\Delta x} + \rho a_x = 0 \\ O_y : \frac{p_y - p_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \rho a_y = 0 & \implies O_y : -\frac{p_{y+\Delta y} - p_y}{\Delta y} + \rho a_y = 0 \\ O_z : \frac{p_z - p_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \rho a_z = 0 & \quad O_z : -\frac{p_{z+\Delta z} - p_z}{\Delta z} + \rho a_z = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si l'élément de contrôle est infiniment petit, c'est-à-dire de dimensions infiniment petites, nous avons : $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ et $\Delta z = dz$ et tendent vers 0. D'autre part, d'après la définition du nombre dérivé nous avons :

$$\lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{p_{\xi+\Delta \xi} - p_{\xi}}{\Delta \xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (2.16)$$

Par conséquent, en calculant la limites des deux membres des équations Eq. (2.15) (cf. p 14) :

$$\begin{aligned} O_x : -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p_{x+\Delta x} - p_x}{\Delta x} + \rho a_x = 0 & \quad O_x : -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_x = 0 \\ O_y : -\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{p_{y+\Delta y} - p_y}{\Delta y} + \rho a_y = 0 & \implies O_y : -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho a_y = 0 \\ O_z : -\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p_{z+\Delta z} - p_z}{\Delta z} + \rho a_z = 0 & \quad O_z : -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ces équations Eq. (2.17) (cf. p 14) présentent les équations fondamentales de la statique des fluides. Sachant que le vecteur de dérivées de pression par rapport aux trois coordonnées de l'espace $(\partial p / \partial x, \partial p / \partial y, \partial p / \partial z)$ présente le gradient de pression noté ∇p , ou encore $grad p$, l'écriture vectorielle des équations fondamentales de la statique des fluides Eq. (2.17) (cf. p 14) donne une seule équation différentielle telle que :

$$-\nabla p + \rho \vec{a} = 0 \quad (2.18)$$

Ou encore :

$$-grad p + \rho \vec{a} = 0 \quad (2.19)$$

Cette équation Eq. (2.19) (cf. p 14) permet de déterminer la pression du fluide au sein du réservoir à n'importe quelle position (x, y, z) et en fonction de la masse volumique. On note que la pression statique est une fonction scalaire de la position $p = p(x, y, z, \rho)$.

D. Statique des fluides incompressibles - Hydrostatique

L'hydrostatique représente une branche spécifique de la statique des fluides, se focalisant sur les liquides incompressibles au repos ou encore en équilibre en présence de la gravité. Contrairement à l'équation fondamentale de la statique des fluides, qui reste valable pour les fluides compressibles, l'hydrostatique étudie des

fluides avec une masse volumique constante, en limitant les forces de volume aux forces gravitationnelles (Maalem, 1993 [2]).

1. Équation fondamentale de l'hydrostatique

En substituant l'accélération \vec{a} apparaissant dans l'expression de la force de volume F du système d'équations dans le bilan général Eq. (2.17) (cf. p 14) par l'accélération gravitationnelle \vec{g} , l'équation fondamentale de l'hydrostatique Eq. (2.17) (cf. p 14) se simplifie à :

$$-\text{grad}p + \rho\vec{g} = 0 \quad (2.20)$$

tant donné que l'accélération due à la gravité agit le long de l'axe vertical, décrivant la cote z , elle peut être représentée comme $\vec{g} = (0, 0, g)$. Cette représentation tient compte du fait que l'accélération gravitationnelle est dirigée vers le bas, le long de l'axe positif z , en coordonnées Cartésiennes.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 & (a) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 & (b) \\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g &= 0 & (c) \end{aligned} \quad (2.21)$$

D'après les deux premières équations Eqs. (2.21a (cf. p 15)) et Eqs. (2.21b (cf. p 15)), les dérivées partielles de la pression par rapport aux variables de Coordonnées x et y sont nulles. Alors que la pression hydrostatique ne dépend pas de la masse volumique, elle ne dépend pas de coordonnées x et y . Ainsi, la pression devient une fonction de z , $p = p(z)$. Par conséquent, seule l'équation Eqs. (2.21c (cf. p 15)) reste présente dans le système Eqs. (2.21 (cf. p 15)). En outre, comme la pression dépend d'une seule variable d'espace, le terme de dérivée partielle est remplacé par celui de la dérivée totale et l'équation Eq.(2.21c) devient ordinaire :

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \quad (2.22)$$

Nous pouvons en effet intégrer indéfiniment l'équation Eq. (2.22) (cf. p 15) pour obtenir la distribution de pression le long de la direction verticale z comme suit :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \implies dp = -\rho g dz \implies \int dp = \int (-\rho g) dz \quad (2.23)$$

La distribution de la pression depuis l'équation Eq. (2.23) (cf. p 15) est donnée par :

$$p(z) = -\rho g z + C \quad (2.24)$$

Avec C une constante. Si l'on connaît la valeur d'une pression p_0 à certain niveau z_0 , on peut déterminer la constante d'intégration C en substituant dans l'équation Eq. (2.24) (cf. p 15) :

$$p(z_0) = -\rho g z_0 + C = p_0 \implies C = p_0 + \rho g z_0 \quad (2.25)$$

En substituant Eq. (2.25) (cf. p 15) dans Eq. (2.24) (cf. p 15), on obtient :

$$p(z) = -\rho gz + p_0 + \rho gz_0 \quad (2.26)$$

On obtient après simplification :

$$p(z) - p_0 = -\rho g(z - z_0) \quad (2.27)$$

L'équation Eq. (2.27) (cf. p 16) exprime que la variation de pression entre deux points au sein d'un fluide incompressible en équilibre est équivalente au poids du volume de fluide multiplié par la hauteur $(z-z_0)$. Ce volume possède une base ayant une unité de surface et une hauteur égale à la différence de niveau entre les deux points considérés.

Il est important de noter qu'en hydrostatique, la distribution de la pression ne dépend pas des coordonnées horizontales x et y . Par conséquent, la pression admet une valeur constante en tous points de chaque plan horizontal. Cela se traduit par la formation de plans d'iso-pression, isobare ou surface équipotentielle de pression, où les valeurs de pression restent uniformes sur des surfaces parallèles au sol.

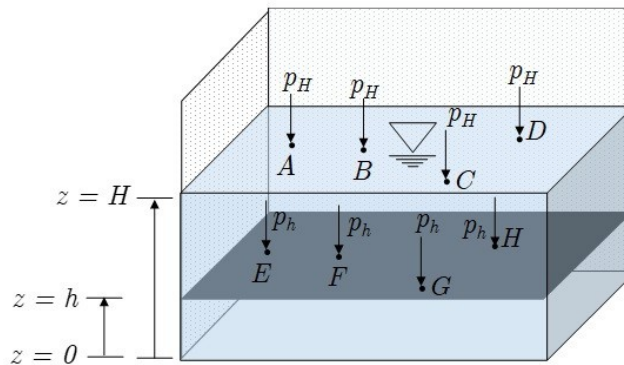


FIGURE 2.8 Surfaces isobares d'un fluide dans un réservoir.

D'après la figure 2.8 (cf. FIGURE 2.8 Surfaces isobares d'un fluide dans un réservoir. p 16) les points A, B, C et D se situant au niveau du plan horizontal $z = H$ ont la pression p_H . C'est-à-dire $p_A = p_B = p_C = p_D = p_H$. D'autre part, les points E, F, G et H se situant dans le plan $z = h$ ont également la même pression p_h . En connaissant, la pression au plan $z = H$, nous pouvons aboutir en se basant sur la loi fondamentale de l'hydrostatique Eq. (2.27) (cf. p 16) :

$$p(z) - p_{ref} = -\rho g(z - z_{ref}) \quad (2.28)$$

La pression de référence est p_H correspondante à $z_{ref} = H$, ainsi :

$$p_h = p(h) - p_H = -\rho g(h - H) \quad (2.29)$$

C'est-à-dire :

$$p_h = p_H + \rho g(H - h) \quad (2.30)$$

Puisque $H - h$ est positive, la pression p_h est plus importante que p_H . En conséquence, la pression du fond du réservoir p_0 est encore plus importante. De Eq. (2.30) (cf. p 16) on peut écrire :

$$p_h + \rho gh = p_H + \rho gH \quad (2.31)$$

Si l'on divise les deux membres de Eq. (2.31) (cf. p 16) par ρg , on obtient :

$$\frac{p_h}{\rho g} + h = \frac{p_H}{\rho g} + H \quad (2.32)$$

La constante $p_h/\rho g + h = Cte$ présente une unité de dimension, elle est appelée hauteur piézométrique notée h_z . Étant donné qu'il est envisageable de répéter le même processus de démonstration pour chaque point, nous sommes en mesure de formuler :

$$h_z = \frac{p}{\rho g} + h \quad (2.50)$$

En définissant la pression constante p_z appelée pression motrice, on peut écrire :

$$p + \rho gh = p_z \quad (2.34)$$

Résumé

Dans un fluide incompressible au repos, la pression motrice reste constante. Cette relation est applicable indépendamment de la forme que prend le liquide, pourvu qu'il soit homogène et immobile. Généralement nous calculons la pression comme suit :

- La pression en bas = La pression en haut + ρg distance
- La pression en haut = La pression en bas - ρg distance

2. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans un réservoir

L'hydrostatique des fluides non miscibles, tels que l'eau et l'huile, englobe les interactions entre ces deux liquides miscibles au repos sous l'influence de la gravité. La pression à l'interface entre les deux fluides dépend de leurs densités respectives et de la hauteur de réservoir. Conformément à l'équilibre hydrostatique, les pressions aux interfaces doivent être équilibrées pour maintenir un état stable.

a) Deux fluides non-miscibles dans un réservoir

Soient de fluides (1) et (2) non miscibles de masses volumique ρ_1 et ρ_2 (respectivement) telles que $\rho_1 > \rho_2$. Dans cette configuration, deux fluides non miscibles sont placés dans un réservoir dont la surface libre du second fluide est exposée à l'air libre (pression atmosphérique), comme illustré dans la figure 2.8. La première couche de fluide s'étend sur une hauteur h_1 , tandis que la deuxième couche de fluide occupe une hauteur h_2 .

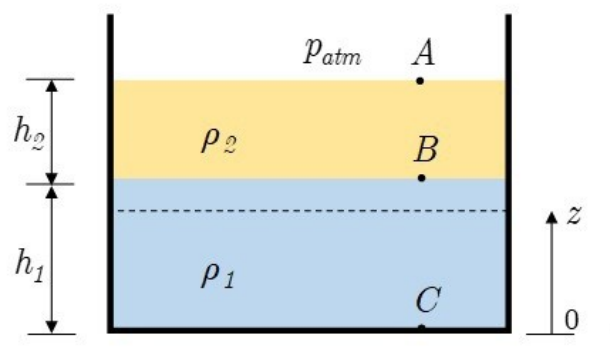


FIGURE 2.9 Deux fluides non-miscibles dans un réservoir.

Déterminons la distribution de la pression le long de la verticale à une position quelconque de coordonnée z . Pour ce faire, nous appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique Eq. (2.34) (cf. p 17). Ainsi, à chaque niveau z , la pression motrice est constante :

$$p(z) + \rho g z = cte \quad (2.35)$$

Avec $0 < z < h_1 + h_2$. Nous connaissons d'autre part la pression à la surface libre $p_A = p_{atm}$ au niveau $z = h_1 + h_2$, ainsi nous avons :

$$p(z) + \rho g z = p_{atm} + \rho g (h_1 + h_2) \quad (2.36)$$

Mais la masse volumique dans Eq. (2.36) (cf. p 18) varie selon la position comme suit :

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & \text{si } 0 < z < h_1 \\ \rho_2, & \text{si } h_1 < z < h_1 + h_2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Déterminons alors la pression à l'interface entre le fluide (1) et (2) notée p_B . L'interface correspond à $z = h_1$ au-dessus de laquelle se trouve le fluide (2), ainsi, on a :

$$p_B + \rho_2 g h_1 = p_{atm} + \rho_2 g (h_1 + h_2) \implies p_B = p_{atm} + \rho_2 g (h_1 + h_2) - \rho_2 g h_1 \quad (2.38)$$

Nous trouvons après simplification :

$$p_B = p_{atm} + \rho_2 g h_2 \quad (2.39)$$

La distribution de la pression dans la couche du fluide (2) pour $h_1 < z < h_1 + h_2$:

$$p(z) + \rho_2 g z = p_{atm} + \rho_2 g (h_1 + h_2) \quad (2.40)$$

On a également l'expression suivante :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_2 g (h_1 + h_2 - z) \quad (2.41)$$

Dans la deuxième couche, on a la pression p_B , ainsi pour $0 < z < h_1$:

$$p(z) + \rho_1 g z = p_B + \rho_1 g h_1 \implies p(z) = p_B + \rho_1 g (h_1 - z) \quad (2.42)$$

Si l'on substitue la pression p_B dans cette dernière équation, on obtient :

$$p(z) = p_{atm} + g [\rho_2 h_2 + \rho_1 (h_1 - z)] \quad (2.43)$$

Nous assemblons les distributions de la pression: Eqs. (2.41) (cf. p 18) et Eqs. (2.43). (cf. p 19)

$$p(z) = \begin{cases} p_{atm} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g (h_1 - z), & \text{si } 0 < z < h_1 \\ p_{atm} + \rho_2 g (h_1 + h_2 - z), & \text{si } h_1 < z < h_1 + h_2 \end{cases} \quad (2.44)$$

Nous pouvons aboutir à une expression sans l'utilisation de type conditionnel d'expression Eq. (2.44) (cf. p 19) en se basant sur la règle mathématique analytique suivante :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \leq x_0 \\ f_2(x), & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} \frac{f_2(x) + f_1(x)}{2} + \frac{|x - x_0|}{x - x_0} \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2}, & \text{si } x \neq x_0 \\ f(x_0), & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Ainsi, nous obtenons la formule globale de la distribution de pression suivante :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_2 g h_2 - \frac{1}{2} g [(\rho_1 + \rho_2)(z - h_1) + (\rho_2 - \rho_1)|z - h_1|] \quad (2.46)$$

3. Hydrostatique des fluides non-miscibles dans des tubes en U

Soient deux fluides (1) et (2) non miscibles de masses volumique ρ_1 et ρ_2 (respectivement) telles que $\rho_1 > \rho_2$. Dans cette configuration, les deux fluides non miscibles sont placés dans un tube en U (vases communicants) de section circulaire uniforme dont la surface libre des deux fluides sont exposées à l'air libre, comme illustré dans la figure 2.10 (cf. FIGURE 2.10 Deux fluides non-miscibles dans un tube en U. p 19).

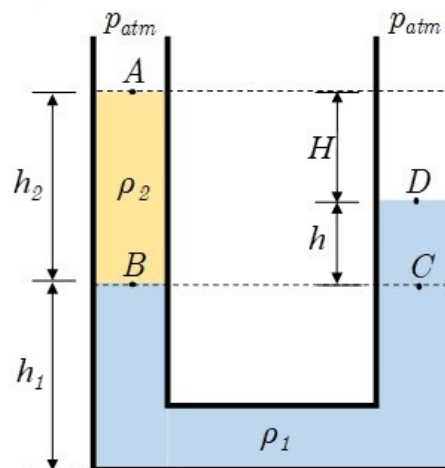


FIGURE 2.10 Deux fluides non-miscibles dans un tube en U.

Dans cette configuration, le premier fluide occupe une hauteur h_1 dans la partie gauche du tube en U et une hauteur $h_1 + h$ dans sa partie droite. En parallèle, la deuxième couche de fluide occupe une hauteur h_2 dans la partie gauche, au-dessus du premier fluide. A, B, C et D sont trois points localisés respectivement au niveau de la surface libre de la partie gauche, l'interface des deux liquides, le même niveau de l'interface dans partie droite et la surface libre de la partie droite. Nous remarquons que :

$$p_A = p_D = p_{atm} \quad (2.47)$$

a) Pression à l'interface entre les deux fluides

L'interface entre des deux fluides se trouve au point B , la pression dans ce point est déterminée à partir de la partie gauche par :

$$p_B = p_A + \rho_2 g h_2 \implies p_B = p_{atm} + \rho_2 g h_2 \quad (2.48)$$

D'autre part à partir de la partie droite, la pression dans le même niveau (point C) que celui de l'interface (point B) est égale à la même pression p_B , ainsi :

$$p_C = p_B$$

$$p_B = p_D + \rho_1 g h \implies p_B = p_{atm} + \rho_1 g h \quad (2.49)$$

b) Distance entre les deux surfaces du fluide (1) – Dénivellation h

En se basant sur l'égalité des pressions dans le même niveau d'interface entre les deux fluides dans les vases communicants gauche et droit Eq. (2.49), on a :

$$p_B = p_{atm} + \rho_2 g h_2 = p_{atm} + \rho_1 g h \implies \rho_2 g h_2 = \rho_1 g h \quad (2.50)$$

On obtient ainsi :

$$h = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \quad (2.51)$$

Distance entre les deux surfaces libres : Distance H

$$H = h_2 - h = h_2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \implies H = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} h_2 \quad (2.52)$$

c) Pression du la partie basse du tube en U

Cette pression notée p_0 peut être déterminée à partir des deux surfaces libres des deux parties du tube. A partir du de la partie gauche :

$$p_0 = p_{atm} + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 \quad (2.53)$$

A partir de la partie droite :

$$p_0 = p_{atm} + \rho_1 g (h_1 + h) = p_{atm} + \rho_1 g (h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2) = p_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 \quad (2.54)$$

d) Distribution de la pression dans le tube en U

Il s'agit de déterminer la pression en fonction du niveau vertical z dans les deux parties du tube en U. Pour ce faire, nous déterminons indépendamment la pression des deux parties, gauche et droite.

- Partie gauche : dans cette partie se trouve le fluide (1) et (2).

Pour le fluide (2) où : $h_1 \leq z \leq h_1 + h_2$, il est clair que :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_2 g(h_1 + h_2 - z) \quad (2.55)$$

Pour le fluide (1) où : $0 \leq z \leq h_1$, on a :

$$\begin{aligned} p(z) = p_B + \rho_1 g(h_1 - z) &\implies p(z) = p_{atm} + \rho_1 g h + \rho_1 g(h_1 - z) \\ p(z) &= p_{atm} + \rho_1 g(h_1 + h - z) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dans la partie droite on a seulement le fluide (1), ainsi pour $0 \leq z \leq h_1 + h$, on a tout simplement :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_1 g(h_1 + h - z) \quad (2.57)$$

La figure 2.11 (cf. FIGURE 2.11 Distribution de pression au sein du tube en U. p 21) résume la distribution de la pression des deux parties communicantes des deux fluides au sein du tube en U : Eqs. (2.55) (cf. p 21)- Eqs. (2.57). (cf. p 21)

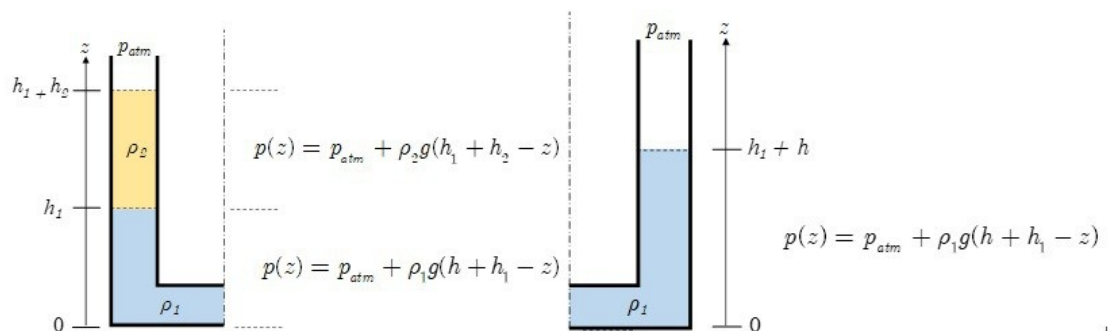


FIGURE 2.11 Distribution de pression au sein du tube en U.

e) Égalité des masses volumiques

Si les deux masses volumiques des deux fluides (1) et (2) sont égales c'est-à-dire $\rho_1 = \rho_2$ alors la dénivellation devient nulle. Dans ce cas-là h et h_2 deviennent égales et h_1 diminue par la moitié de l'ancienne H . Cette situation est illustrée dans la figure 2.12 (cf. FIGURE 2.12 Fluides miscibles de même densité au sein du tube en U. p 22).

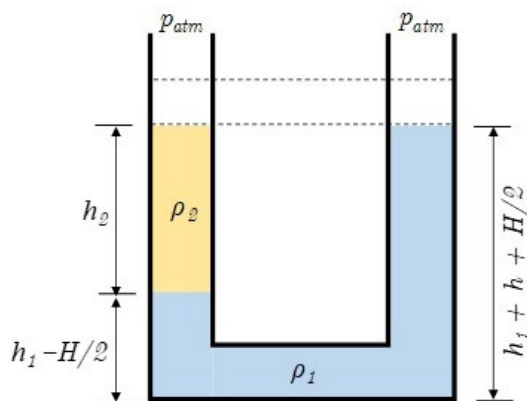


FIGURE 2.12 Fluides miscibles de même densité au sein du tube en U.

E. Instrument de mesure de la pression

La mesure de la pression revêt une importance dans de nombreuses applications scientifiques, industrielles et technologiques. Elle permet de surveiller et de contrôler des processus, de garantir la sécurité dans les systèmes sous pression, d'optimiser l'efficacité des moteurs, et bien plus encore. Deux principaux types d'instruments sont utilisés pour cette mesure à savoir les instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre et les instruments basés sur le principe de déformation d'un élément élastique sous l'action de pression (White, 2016 [1] ; Instrumentation CIRA, 2006 [3]).

1. Instruments basés sur la force hydrostatique en équilibre

Ces instruments mesurent la pression en évaluant la force exercée par un fluide (généralement liquide) sur une surface. Ils déterminent la pression en mesurant la hauteur d'une colonne de liquide en équilibre avec la pression atmosphérique ou une autre pression de référence. Parmi ces instruments, on distingue :

a) Baromètre de Torricelli

Le baromètre, inventé par Evangelista Torricelli (1644), est un instrument spécialement conçu pour mesurer la pression atmosphérique. Il utilise un tube en verre fermé à une extrémité, rempli de mercure, et plongé dans une cuve contenant également du mercure, voir figure 2.13. (cf. FIGURE 2.13 Baromètre de Torricelli. p 23) Lors de cette expérience, Torricelli a observé que le niveau de mercure dans le tube diminuait, laissant un espace vide au-dessus.

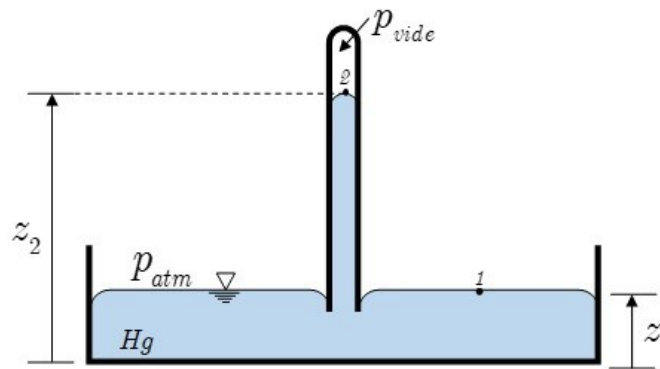


FIGURE 2.13 Baromètre de Torricelli.

La détermination de la pression atmosphérique repose sur le principe fondamental de l'hydrostatique tout en mesurant la hauteur $h = z_2 - z_1$ que produit le mercure dans le tube. On applique cette loi entre les points 1 et 2 (figure 2.13 (cf. FIGURE 2.13 Baromètre de Torricelli. p 23)) :

$$p_1 = p_2 + \rho_{Hg}g(z_2 - z_1) \implies p_{atm} = p_{vide} + \rho_{Hg}g(z_2 - z_1) \quad (2.58)$$

Comme la pression du vide est nulle, cela signifie tout simplement que :

$$p_{atm} = \rho_{Hg}g(z_2 - z_1) \quad (2.59)$$

La masse volumique du mercure est de 13600 kg/m^3 , d'autre part, la hauteur h que Torricelli a enregistré dans le tube est de : 76 cm (ou également 760 mm). Par substitution et en prenant $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ on trouve la valeur de la pression atmosphérique en Pa :

$$p_{atm} = 13600 \times 9.81 \times 0.76 \implies p_{atm} = 101292 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} = 1.01292 \text{ bar} \quad (2.60)$$

Nous définissons ainsi l'unité millimètre de mercure notée mmHg telle que : $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$.

b) Tube manométrique simple - piézomètre

Le piézomètre est un instrument de mesure de la pression relativement simple, constitué d'un tube rempli du même fluide et relié au point où l'on souhaite évaluer la pression. Il est principalement utilisé pour mesurer les pressions dans les liquides et n'est pas adapté à la mesure des pressions dans les gaz, voir figure 2.14 (cf. FIGURE 2.14 Tube manométrique simple (piézomètre) p 24).

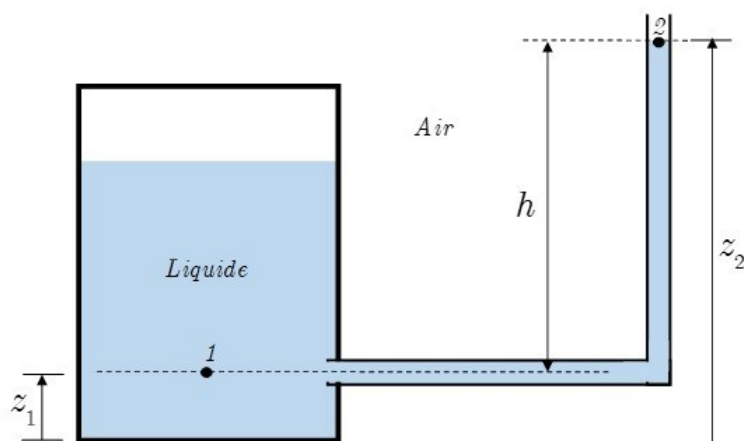


FIGURE 2.14 Tube manométrique simple (piézomètre)

Pour déterminer la pression d'un liquide au point 1 du réservoir montré dans la figure 2.14 (cf. FIGURE 2.14 Tube manométrique simple (piézomètre) p 24) en connaissant la hauteur h et la pression au point 2 (pouvant être atmosphérique), il suffit d'appliquer la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les point 1 et 2 :

$$p_1 = p_2 - \rho g(z_1 - z_2) \quad (2.61)$$

c) Tube manométrique en forme de « U » - Manomètre

Le manomètre est un dispositif composé d'un tube en forme de "U" transparent, qui sert à mesurer la pression en utilisant un liquide manométrique dont la masse volumique, noté ρ_m , est généralement plus élevée que celui du fluide dont on souhaite mesurer la pression de masse volumique ρ .

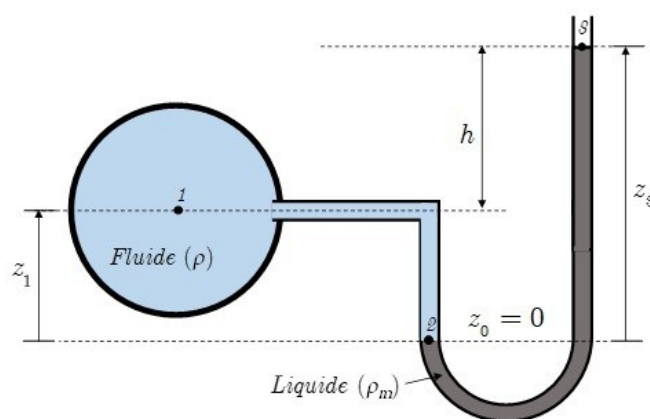


FIGURE 2.15 Manomètre en tube en U.

La détermination de la pression au point 1 du fluide montré dans la figure 2.15 (cf. FIGURE 2.15 Manomètre en tube en U. p 24) consiste à appliquer la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les points 1 et 3 en passant par l'interface au point 2 tout en connaissant la pression au point 3. On a à l'interface :

$$p_2 = p_3 - \rho_m g(z_2 - z_3) \quad (2.62)$$

D'autre part, nous avons la pression au point 1 est :

$$p_1 = p_2 - \rho g(z_1 - z_2) \quad (2.63)$$

En substituant Eq. (2.62) (cf. p 24) (cf. p 25) dans Eq. (2.63) (cf. p 25), on trouve la pression au point 1 :

$$p_1 = p_3 - \rho_m g(z_2 - z_3) - \rho g(z_1 - z_2) \quad (2.64)$$

d) Manomètre différentiel

Ce manomètre est un tube utilisé pour mesurer la différence de pression ou la hauteur piézométrique entre deux points. Il est configuré avec un seul liquide et une valve d'entrée d'air ou avec deux liquides différents pour des applications spécifiques (Fox et al., 2004 [4]).

En prenant comme exemple un écoulement d'un fluide de masse volumique ρ dans une conduite horizontale équipée d'un manomètre partiel aux points 1 et 2, on peut déterminer la différence de pression entre les points 1 et 2 en mesurant la dénivellation h entre les deux interfaces du liquide manométrique de masse volumique ρ_m avec le fluide, voir figure 2.16 (cf. FIGURE 2.16 Manomètre partielle de mesure de pression d'écoulement. p 25).

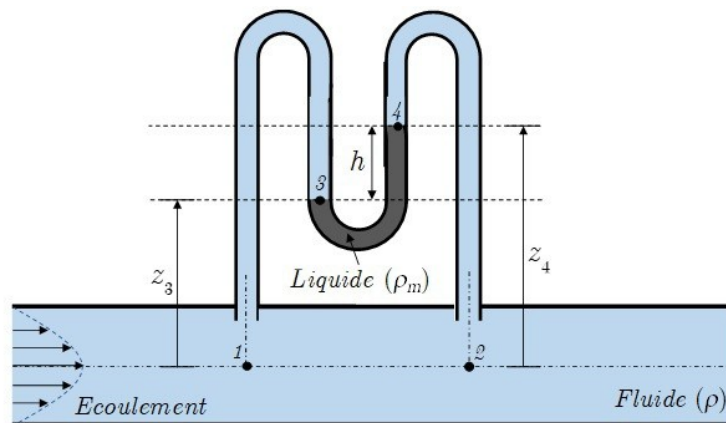


FIGURE 2.16 Manomètre partielle de mesure de pression d'écoulement.

En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique du point 1 à 2 en passant par les points 3 et 4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p_3 &= p_1 - \rho g(z_3 - z_1) \\ p_4 &= p_3 - \rho_m g(z_4 - z_3) \end{aligned} \quad (2.65)$$

D'autre part, on a :

$$p_2 = p_4 - \rho g(z_2 - z_4) \quad (2.66)$$

En substituant Eq. (2.66) (cf. p 25) dans Eq. (2.65) (cf. p 25), on trouve :

$$p_2 = p_1 - \rho g(z_3 - z_2) - \rho_m g(z_4 - z_3) - \rho g(z_2 - z_4) \quad (2.67)$$

En réarrangeant les termes de Eq. (2.67) (cf. p 25), la différence de pression $p_2 - p_1$ devient :

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) + (\rho - \rho_m)g(z_4 - z_3) \quad (2.68)$$

Les point 1 et 2 se trouvent dans le même niveau, on a $z_2 - z_1 = 0$, ainsi Eq. (2.68) (cf. p 25) devient :

$$p_2 - p_1 = (\rho - \rho_m)g(z_4 - z_3) \tag{2.69}$$

2. Instruments basés sur la force hydrostatatique en équilibre

es instruments mesurent la pression en détectant la déformation d'un élément élastique, comme un diaphragme, une membrane ou un ressort, sous l'action des forces de pression. Les capteurs de pression piézorésistifs, les jauges de contrainte et les transducteurs de pression sont des exemples d'instruments qui utilisent ce principe. La déformation de l'élément élastique est convertie en une lecture de pression (Fox et al., 2004 [4]).

Dans ce contexte, le baromètre anéroïde, également appelé manomètre mécanique, est un instrument de mesure de la pression atmosphérique. Il repose sur la déformation d'une boîte métallique scellée sous vide, appelée anéroïde, en réponse aux variations de pression atmosphérique. Lorsque la pression atmosphérique change, la boîte anéroïde se dilate ou se contracte, ce qui est mesuré à l'aide d'un mécanisme qui indique la pression atmosphérique en unités telles que les millibars ou les pouces de mercure, (Semat et Katz, 1958 [5]).

F. Théorème de Pascal

Enoncé du théorème

Dans un fluide incompressible en équilibre, une pression exercée en un point quelconque du fluide se propage uniformément dans toutes les directions et s'exerce avec la même intensité sur toutes les surfaces en contact avec le fluide. En d'autres termes, une variation de pression appliquée en un point d'un liquide immobile se transmet intégralement à l'ensemble du fluide, sans se soucier de la forme du contenant.

1. Preuve du théorème

Dans un fluide incompressible en équilibre hydrostatatique, nous définissons deux point M_1 et M_2 dans lesquels les agissent les pression p_1 et p_2 . Supposons qu'au un point M_1 intervienne une variation de pression supplémentaire Δp_1 , voir figure 2.17 (cf. FIGURE 2.17 Principe du théorème de Pascal. p 26).

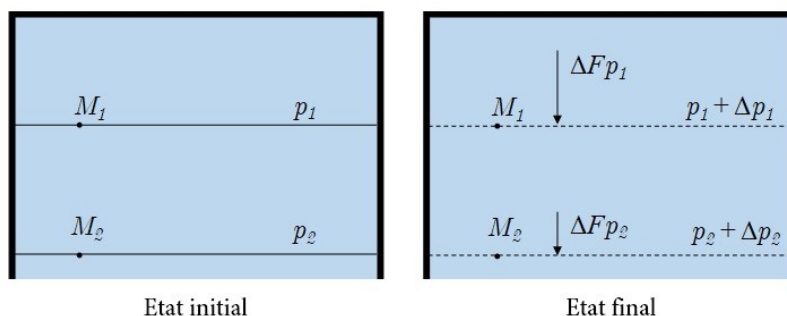


FIGURE 2.17 Principe du théorème de Pascal.

La pression en ce point devient $p_1 + \Delta p_1$. Par conséquent, une variation de pression Δp_2 est induite au point M_2 modifiant la pression en ce point à $p_2 + \Delta p_2$. Le but est de démontrer que $\Delta p_1 = \Delta p_2$. Pour ce faire, nous appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique dans les deux états, initial et final. Nous avons respectivement :

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= -\rho g(z_2 - z_1) \\ (p_2 + \Delta p_2) - (p_1 + \Delta p_1) &= -\rho g(z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Après soustraction, nous trouvons :

$$\Delta p_2 - \Delta p_1 = 0 \implies \Delta p_2 = \Delta p_1 \quad (2.71)$$

2. Principe vérin hydraulique

Nous considérons le vérin hydraulique schématisée dans la figure 2.18. Ce vérin hydraulique est un dispositif mécanique utilisé pour convertir l'énergie hydraulique en mouvement linéaire. Il se compose de deux cylindres grands présentant le vérin et petit présentant la pompe de diamètres d_1 et d_2 (respectivement). Les cylindres sont munis de pistons mobiles et d'un fluide hydraulique circulant entre eux à travers une canalisation (Briggs, 2018 [6]).

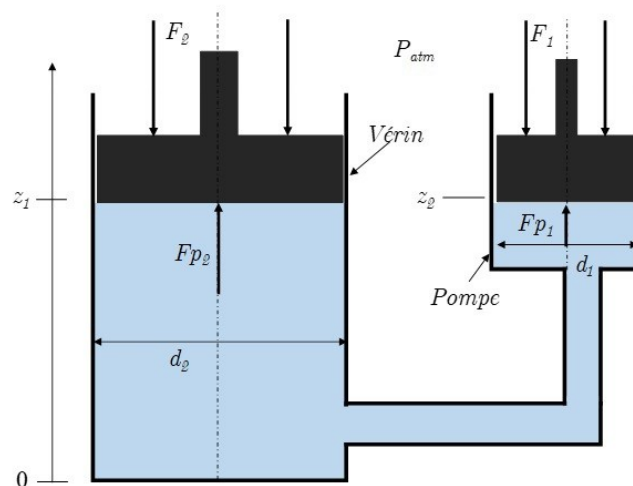


FIGURE 2.18 Schéma d'un Vérin hydraulique.

La pression exercée sur le piston de la pompe se propage uniformément à travers le fluide et agit également sur le piston du vérin. Cette pression transmise crée une force qui est ensuite multipliée par la différence de surface entre les deux pistons. Cette configuration permet de créer une force de sortie plus grande que la force d'entrée, conformément au principe des vases communicants et à l'hydrostatique.

Pour calculer la charge possible pouvant être soulevée, nous pouvons utiliser le principe fondamental de l'hydrostatique :

À l'équilibre de vérin :

$$Fp_{atm} + F_2 - Fp_2 = 0 \implies p_{atm}S_2 + F_2 - p_2S_2 = 0 \implies p_2 = p_{atm} + S_2F_2 \quad (2.72)$$

A l'équilibre de la pompe :

$$Fp_{atm} + F_1 - Fp_1 = 0 \implies p_{atm}S_1 + F_1 - p_1S_1 = 0 \implies p_1 = p_{atm} + S_1F_1 \quad (2.73)$$

A cet équilibre, on a $z_1 = z_2$ et $p_1 = p_2$. La charge possible pouvant être soulevée par le vérin est obtenue quand $p_1 = p_2$, en faisant l'égalité entre Eq. (2.72) (cf. p 27) et Eq. (2.73) (cf. p 27), on a :

$$p_1 = p_2 \implies p_{atm} + \frac{4}{\pi d_1^2} F_1 = p_{atm} + \frac{4}{\pi d_2^2} F_2 \implies \frac{F_1}{d_1^2} = \frac{F_2}{d_2^2} \implies \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad (2.74)$$

La charge possible pouvant être soulevée par le vérin est donnée par :

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 = F_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 F_1 \quad (2.75)$$

G. Théorème d'Archimède

1. Énoncé du théorème

Lorsqu'un objet est immergé dans un fluide, il subit une force verticale dirigée vers le haut, connue sous le nom de force d'Archimède. Cette force est égale au poids du volume du fluide déplacé par l'objet. Ce volume déplacé correspond au volume de l'objet qui est immergé dans le fluide.

$$F_{Archimede} = \rho_{fluide} V_{Objet} g \quad (2.76)$$

2. Principe de la force d'Archimède

La force d'Archimède est la force de flottabilité exercée sur un objet homogène immergé dans un fluide, tel qu'un liquide ou un gaz maintenant cet objet en équilibre. Elle est dirigée vers le haut, opposée à la direction de la force gravitationnelle. Elle est déterminée par la différence entre la masse du fluide déplacé par l'objet et la masse effective de l'objet lui-même. Lorsqu'un objet est plongé dans un fluide, il pousse une quantité de fluide hors de son chemin, créant ainsi une région de faible pression au-dessus de l'objet, voir figure 2.19 (cf. FIGURE 2.19 Objet solide immergé (en équilibre) dans un liquide. p 28). Cela entraîne une poussée vers le haut qui équilibre partiellement le poids de l'objet. Elle est appliquée au centre de gravité du fluide G déplacé appelé : centre de poussée.

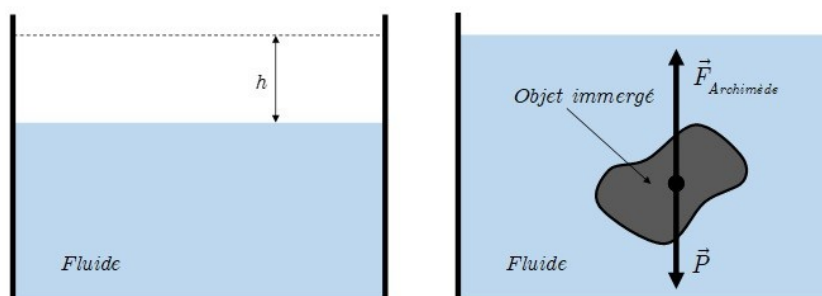


FIGURE 2.19 Objet solide immergé (en équilibre) dans un liquide.

3. Flottabilité des objets

Un objet homogène immergé dans un fluide peut se trouver dans l'une des trois situations suivantes en fonction de la relation entre son poids, la force d'Archimède et la force de résistance du fluide (si applicable).

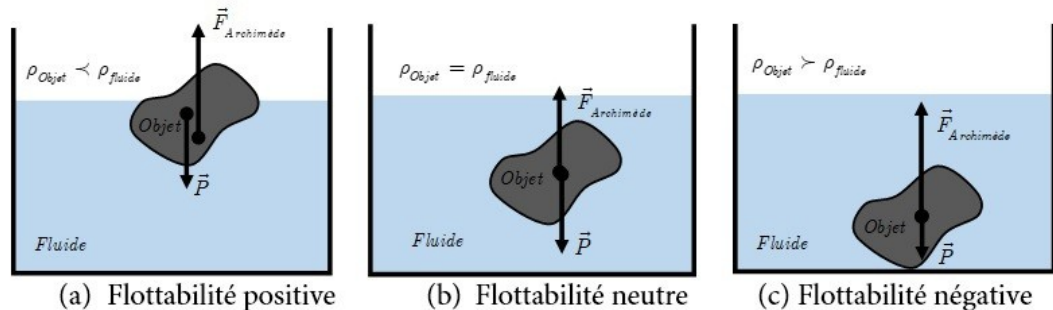


FIGURE 2.20 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide.

a) Flottabilité positive (flottabilité)

Dans cette situation, la force d'Archimède est plus grande que le poids de l'objet. L'objet est donc moins dense que le fluide et il flotte à la surface. Sa partie immergée est égale au volume du fluide déplacé. C'est le cas typique des bateaux, voir figure 2.20a (cf. FIGURE 2.20 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide. p 29).

b) Flottabilité neutre (Equilibre)

Lorsque l'objet est soumis à une force d'Archimède égale à son propre poids, il demeure en équilibre dans le fluide, à n'importe quelle profondeur. Il ne monte pas à la surface ni ne descend au fond. Les sous-marins sont un exemple, voir figure 2.20b (cf. FIGURE 2.20 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide. p 29).

c) Flottabilité négative (descendance)

Si la force d'Archimède est plus faible que le poids de l'objet, l'objet coule dans le fluide. Il est plus dense que le fluide dans lequel il est immergé. Cette situation se retrouve souvent avec des objets tels que les roches qui coulent dans l'eau, voir figure 2.20c (cf. FIGURE 2.20 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide. p 29).

4. Centre de poussée et de gravité d'un objet immergé

Le centre de poussée, également connu sous le nom de centre de flottabilité, est le point à travers lequel la force d'Archimède (la poussée exercée par un fluide sur un objet immergé) semble agir. Il représente le point d'application vertical de la force d'Archimède. Le centre de poussée varie en fonction de la forme et de la position de l'objet immergé dans le fluide ainsi que son homogénéité.

Le centre de gravité, quant à lui, est le point où la totalité du poids d'un objet semble concentrée. Il s'agit du point à travers lequel la force gravitationnelle exercée sur l'objet peut être considérée comme s'appliquant. Le centre de gravité dépend de la distribution de masse de l'objet et peut être également influencé par sa forme et sa composition.

La relation entre le centre de poussée et le centre de gravité est importante dans le contexte de la stabilité des objets immergés. Lorsqu'un objet homogène est en équilibre dans un fluide, le centre de poussée doit coïncider avec le centre de gravité pour que l'objet reste stable et ne bascule pas. Si un objet homogène repose au fond, les centres de gravité et de poussée peuvent coïncider. Cependant, lorsque l'objet est semi-immergé, ces centres ne sont généralement pas confondus en raison de la répartition inégale du poids dans le fluide., voir figure 2.21a (cf. FIGURE 2.20 Types de Flottabilités des objets solides dans un liquide. p 29). (cf. FIGURE 2.21 Centre de poussé et de gravité des objets homogène et hétérogène. p 30)

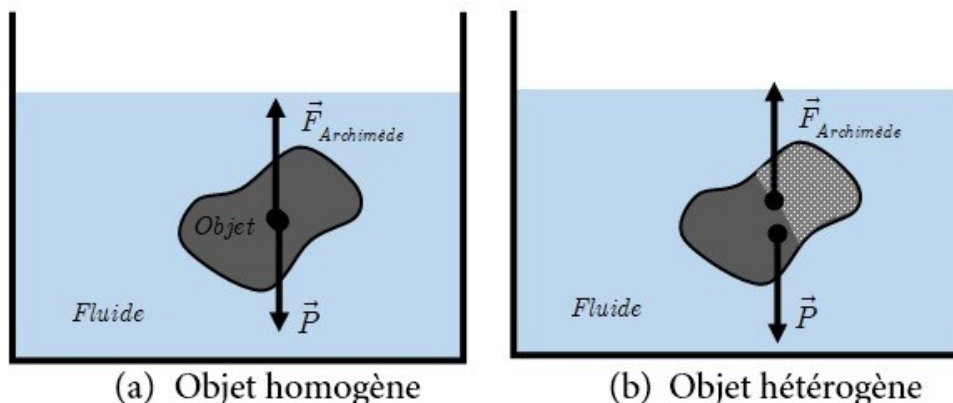


FIGURE 2.21 Centre de poussé et de gravité des objets homogène et hétérogène.

Lorsque l'objet n'est pas homogène autrement dit hétérogène, la distribution non uniforme de la densité entraîne souvent des déplacements distincts entre les centres de gravité et de poussée, voir figure 2.21b (cf. FIGURE 2.21 Centre de poussé et de gravité des objets homogène et hétérogène. p 30).

H. Calcul des forces de pression

Les pressions exercées par un fluide sur une paroi sont déterminantes dans diverses situations impliquant des fluides en mouvement ou au repos. Lorsqu'un fluide est en contact avec une surface, les molécules du fluide exercent une force perpendiculaire à la surface. Cette force est répartie sur la zone de contact et génère une pression, qui s'exerce sur la paroi provoquant par conséquent une poussée hydrostatique.

Dans le cas d'un fluide incompressible au repos, la pression exercée sur une paroi est uniforme à une profondeur donnée. La pression augmente avec la profondeur en raison du poids du fluide au-dessus et varie uniquement en fonction de cette profondeur.

1. Force de pression sur une paroi d'un réservoir

Soit un fluide incompressible appliquant une force de pression à une paroi (S) (surface) de masse négligeable comme illustrée dans la figure 2.22 (cf. FIGURE 2.22 Force de pression d'un fluide sur une surface quelconque. p 31). Le fluide incompressible existe à gauche de la paroi (S), cependant à droite de cette paroi, il existe de l'air. Les forces de pression F_{p1} et F_{p2} exercée sur la paroi (S) sont respectivement générées par la pression hydrostatique du fluide et l'air ambiant en contact avec la surface S .

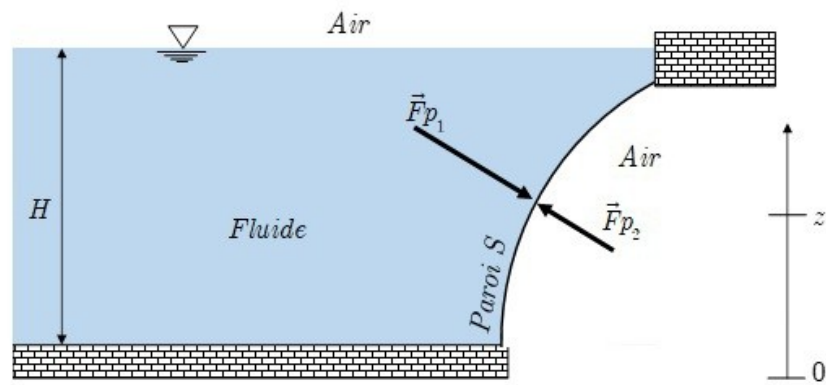


FIGURE 2.22 Force de pression d'un fluide sur une surface quelconque.

$$\vec{F}_{poussee} = \vec{F} = \vec{F}p_1 + \vec{F}p_2 \quad (2.77)$$

Cette force également présente la résultante vectorielle de toutes les forces de pression réparties sur toute la surface S et s'exerçant perpendiculairement à chaque élément de surface dS de S , voir figure 2.23 (cf. FIGURE 2.23 Répartition des forces de pression sur une surface de paroi. p 31).

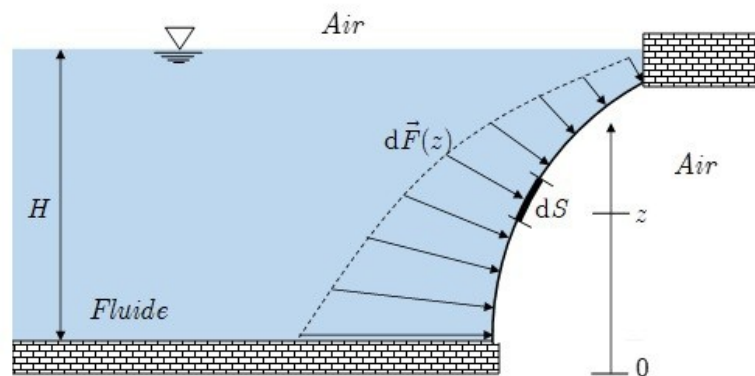


FIGURE 2.23 Répartition des forces de pression sur une surface de paroi.

Si dF représente la force de pressions exercées sur un élément infinitésimal de surface dS de la surface S à un niveau z , alors la force totale F exercée par le fluide est donnée par l'intégration de ces éléments de surface :

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F} \quad (2.78)$$

Le vecteur normal \vec{n} à la surface dS est utilisé pour déterminer la direction de la force de pression élémentaire dF . Le module de la force dF est proportionnelle à la pression P à cet endroit, et à dS .

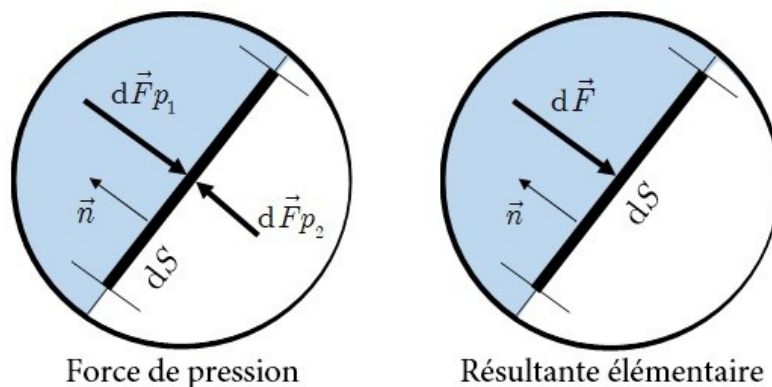


FIGURE 2.24 Force de pression d'un fluide sur une surface élémentaire d'une paroi. Calculons dF comme étant la résultante des forces de pressions dFp_1 et dFp_2 sur l'élément de surface :

$$d\vec{F} = d\vec{F}p_1 + d\vec{F}p_2 = [p_{atm} + \rho g(H - z)] dS \cdot \vec{n} - p_{atm} dS \vec{n} \quad (2.79)$$

Après simplification de l'Eq. (2.79) (cf. p 32), on peut conclure que :

$$d\vec{F} = \rho g(H - z) dS \vec{n} \implies d\vec{F} = p_{eff} dS \vec{n} \quad (2.80)$$

Avec la quantité $\rho g(H - z)$ présente la pression effective appliquée par le fluide sur la paroi S . L'utilisation de la pression effective équivaut en effet à la pression réelle exercée sur la surface (S) depuis le côté du fluide. Étant donné que la pression absolue p du fluide se compose à la fois de la pression atmosphérique et de la pression effective, et que de l'autre côté de la paroi se trouve de l'air qui exerce une force de pression sur dS en sens inverse de la poussée du fluide, la résultante des forces dF dans un élément de surface correspond simplement à la pression effective du fluide. La force de poussée est donc :

$$d\vec{F} = \iint_S \rho g(H - z) dS \vec{n} \quad (2.81)$$

En termes de module de force, on a :

$$F = \iint_S \rho g(H - z) dS \quad (2.82)$$

2. Centre de poussée hydrostatique sur une paroi plane

Nous examinons le réservoir illustré dans la figure 2.25 (cf. FIGURE 2.25 Réservoir muni d'une paroi plane. p 33), lequel est rempli d'un fluide incompressible au repos à un niveau H . La frontière droite du réservoir comporte une paroi plane (pas forcément rectangulaire) (S) de surface globale S et de largeur L , exposée au fluide exerçant une pression d'un côté et à l'air libre exerçant une pression de l'autre. Cette configuration est établie dans un espace muni d'un repère cartésien orthonormé $(Oxyz)$, où les vecteurs unitaires sont \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

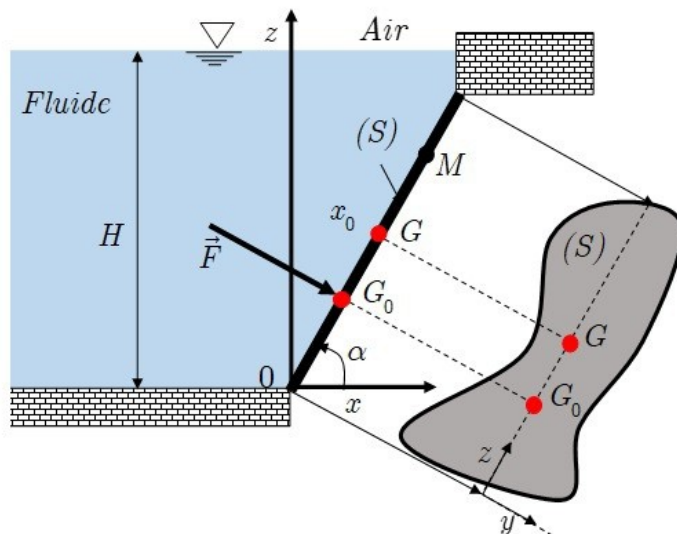


FIGURE 2.26 Centre de poussée d'une paroi S.

Il est nécessaire par ailleurs de connaître les coordonnées du centre de poussée afin que nous puissions présenter la force de poussée. En réalité, comme la pression hydrostatique du fluide dépend seulement de l'abscisse verticale z , il est suffisant de connaître cette coordonnée pour déterminer le profondeur centre de poussée, voir figure 2.26 (cf. FIGURE 2.26 Centre de poussée d'une paroi S. p 34).

Dans le cas d'une paroi plane, lorsque la pression est uniforme sur toute la surface, le centre de poussée coïncide avec le centre géométrique de la paroi. Cependant, lorsque la pression n'est pas uniforme, le centre de poussée peut se déplacer vers les zones de pression plus élevée.

En définissant les coordonnées des centres de gravité et de poussée dans le repère Cartésien par $G(x_G, y_G, z_G)$ et $G_0(x_0, y_0, z_0)$, la détermination du centre de poussée repose sur l'application du principe d'équilibre des moments, comme le moment de la force de pression est au centre de poussée est nul :

$$\vec{M}_{G_0} = 0 \implies \vec{M}_G + G\vec{G}_0 \times \vec{F} = 0 \tag{2.86}$$

Ceci conduit à :

$$\vec{M}_G = G\vec{G}_0 \times \vec{F} = 0 \tag{2.87}$$

Le moment M_G se calcule comme suit :

$$\vec{M}_G = \iint_S G\vec{M} \times d\vec{F} \tag{2.88}$$

Le calcul d'après ces dernières expressions Eq. (2.88) (cf. p 34) et Eq. (2.87) (cf. p 34) dépend de la nature de la paroi plane, horizontale, verticale ou inclinée.

Pour mener à bien cette analyse, dans la continuation de notre présentation, étant donné que la paroi (S) pour laquelle nous calculons le centre de poussée est plane, son centre de gravité G sera adopté comme point d'origine du repère Cartésien ($Gxyz$).

a) Centre de poussée sur une paroi plane horizontale

Dans le contexte du réservoir présenté dans la figure 2.27 (cf. FIGURE 2.27 Centre de poussée d'une paroi horizontale (fond d'un réservoir) (S). p 35), le fond plat du réservoir constitue une surface horizontale qui se trouve à une distance H de la surface libre du liquide contenu dans le réservoir. À ce niveau, la pression absolue peut être évaluée en tenant compte de la profondeur à laquelle se situe la paroi :

$$\vec{M}_{G_0} = 0 \implies \vec{M}_G + G\vec{G}_0 \times \vec{F} = 0 \quad (2.89)$$

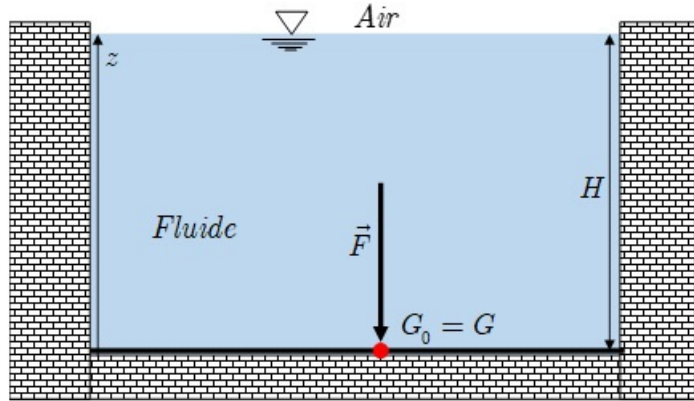


FIGURE 2.27 Centre de poussée d'une paroi horizontale (fond d'un réservoir) (S).

Étant donné qu'il n'y a pas d'air en dessous de la paroi et que la distribution de pression est uniforme, Eq. (2.89) (cf. p 35), la force de poussée est directement liée au poids du fluide contenu dans le réservoir. Elle est donnée au niveau $z = 0$ par :

$$\vec{F} = \iint_S (p_{atm} + \rho g H) \vec{n} dS = - \iint_S (p_{atm} + \rho g H) \vec{k} dS = -(p_{atm} + \rho g H) \iint_S dS \vec{k} \quad (2.90)$$

Donc, comme la pression est uniformément distribuée au niveau du fond, on a tout simplement :

$$\vec{F} = -(p_{atm} + \rho g H) S \vec{k} \implies F = (p_{atm} + \rho g H) S = p_G S \quad (2.100)$$

Soit un point $M(x, y, 0)$ appartenant au fond du réservoir. En définissant le repère $(Gxyz)$, avec G est le centre de gravité de la surface horizontale, et comme le point de poussée G_0 appartient au fond du réservoir, ses coordonnées sont $(x_0, y_0, 0)$, d'après l'équation d'équilibre des moments au point de poussée Eqs. (2.87) (cf. p 34) et (2.88) (cf. p 34) on a :

$$\vec{G}\vec{G}_0 \times \vec{F} = \iint_S \vec{G}\vec{M} \times d\vec{F} \implies \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_G S \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_G \end{pmatrix} dS \quad (2.101)$$

Nous obtenons après les calculs des produits vectoriels :

$$\begin{pmatrix} -y_0 p_G S \\ -x_0 p_G S \\ 0 \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} -y p_G \\ -x p_G \\ 0 \end{pmatrix} dS \implies \begin{cases} -y_0 p_G S = \iint_S y p_G dS \\ -x_0 p_G S = \iint_S x p_G dS \end{cases} \quad (2.102)$$

$$\begin{cases} -y_0 S = - \iint_S y dS \\ -x_0 S = - \iint_S x dS \end{cases} \implies \begin{cases} y_0 S = \frac{1}{S} \iint_S y dS \\ x_0 S = \frac{1}{S} \iint_S x dS \end{cases} \quad (2.103)$$

D'après Eq. (2.103) (cf. p 36). Les coordonnées du centre de poussée G_0 sont $(0, 0, 0)$. Ainsi, pour une paroi horizontale, le centre de poussée coïncide avec centre de gravité ($G_0 = G$).

i Centre de poussée sur une paroi plane verticale

Nous considérons la force de poussée appliquée sur une paroi vertical de longueur H égale à la hauteur du réservoir comme présentée dans la figure 2.28 (cf. FIGURE 2.28 Centre de poussée d'une paroi verticale (S). p 36) (Ben Hamouda, 2008 [7]) :

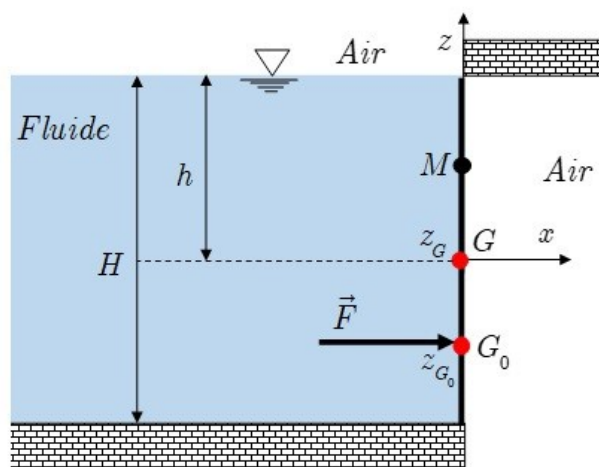


FIGURE 2.28 Centre de poussée d'une paroi verticale (S).

Pour faciliter les calculs du centre de poussée, supposons que le point d'application de la force de gravité G se trouve à une distance h de la surface libre du réservoir. Nous définissons alors le repère $(Gxyz)$. Étant donné que G est l'origine de ce repère, les coordonnées du centre de gravité sont $x_G = y_G = z_G = 0$. Dans ce cas, la détermination de la coordonnée z_0 correspond en effet à la distance algébrique qui sépare le centre de poussée du centre de gravité au sein du plan vertical. D'après la règle du barycentre, on a :

$$\frac{1}{S} \iint_S x dS = \frac{1}{S} \iint_S y dS = \frac{1}{S} \iint_S z dS = 0 \quad (2.104)$$

La force de poussée exercée sur cette paroi découle de la pression relative (effective) du fluide. Le long de la paroi, on a à n'importe quel niveau z , la pression effective suivante :

$$p_{eff} = \rho g(h - z) \quad (2.105)$$

La force de poussée sur un élément de surface vertical est donc :

$$d\vec{F} = \rho g(h - z) \vec{n} dS \quad (2.106)$$

La force de poussée appliquée normalement selon la direction de x est ainsi calculée par l'intégration de la force élémentaire Eq. (2.106) (cf. p 36) :

$$F = \iint_S \rho g(h-z) \vec{n} dS = \iint_S \rho g(h-z) \vec{i} dS = p_G S \vec{i} \quad (2.107)$$

Pour un point $M(0, y, z)$ appartenant à la paroi verticale (S) du réservoir dans repère $(Oxyz)$, comme le point de poussée G_0 appartient à cette paroi, ses coordonnées sont $(0, y_0, z_0)$. D'après Eqs. (2.87) (cf. p 34) et (2.88) (cf. p 34), on a à l'équilibre statique :

$$\vec{GG}_0 \times \vec{F} = \iint_S \vec{GM} d \times \vec{F} \implies \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_G S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho g(h-z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS \quad (2.108)$$

$$\implies \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 p_G S \\ -y_0 p_G S \end{pmatrix} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ z \rho g(h-z) \\ -y \rho g(h-z) \end{pmatrix} dS \implies \begin{cases} z_0 p_G S = z \rho g(h-z) \\ y_0 p_G S = y \rho g(h-z) \end{cases} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} z_0 p_G S &= \iint_S z \rho g(h-z) dS \implies z_0 p_G = \rho g \left[\frac{h}{S} \iint_S z dS - \frac{1}{S} \iint_S z^2 dS \right] \\ z_0 p_G S &= -\frac{\rho g}{S} \iint_S z^2 dS \implies z_0 = -\frac{\rho g}{p_G S} \iint_S z^2 dS \end{aligned} \quad (2.110)$$

Avec l'intégrale de z^2 sur la surface S présente le moment quadratique noté $I_{(G,yy)}$ de la surface S par rapport à l'axe (Gy) passant par le centre de surface G . Enfin, on obtient :

$$z_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yy)}}{p_G S} \text{ Avec } I_{(G,yy)} = \iint_S z^2 dS \quad (2.111)$$

Ceci indique que le centre de poussée se trouve d'une distance z_0 au-dessous du centre de gravité. En termes de profondeur, si h_0 désigne la profondeur du centre de poussée et en tenant compte que l'équation Eq. (2.87) (cf. p 34).

$$h_0 = h_G - (-z_0) \implies h_0 = h + \frac{I_{(G,yy)}}{hS} \quad (2.112)$$

Quant à la coordonnée du centre de poussée suivant l'axe (Gy) , on a :

$$\begin{aligned} y_0 p_G S &= \iint_S y \rho g(h-z) dS \implies y_0 p_G = \rho g \left[\frac{h}{S} \iint_S y dS - \frac{1}{S} \iint_S yz dS \right] \\ y_0 p_G S &= -\frac{\rho g}{S} \iint_S yz dS \implies y_0 = -\frac{\rho g}{p_G S} \iint_S yz dS \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$y_0 = -\frac{\rho g I_{(G,yz)}}{p_G S} \text{ Avec } I_{(G,yz)} = \iint_S yz dS \quad (2.114)$$

En considérant l'exemple d'une paroi verticale rectangulaire, représentée dans la figure 2.29 (cf. FIGURE 2.29 Paroi verticale de forme rectangulaire (S). p 38), le

centre de gravité G est situé à l'intersection de ses deux diagonales, constituant ainsi son centre. Cette position le place à une distance de $H/2$ par rapport à la surface libre du liquide.

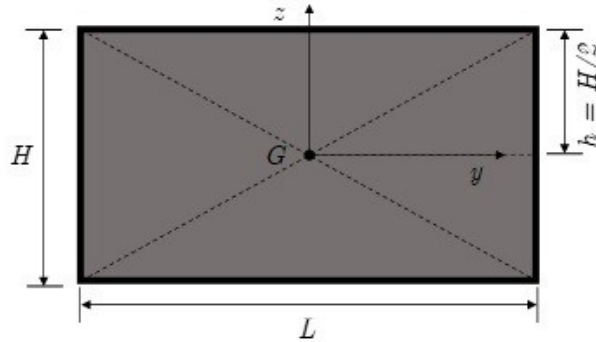


FIGURE 2.29 Paroi verticale de forme rectangulaire (S).

La surface S définit un pavé $[-L/2, L/2][-H/2, H/2]$. Le moment d'inertie ou encore quadratique Eq. (2.111) (cf. p 37) de la paroi par rapport à son centre G se calcule par :

$$I_{(G,yy)} = \iint_S z^2 dS = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz \right) dy = \int_{-H/2}^{H/2} dy \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz = L \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-H/2}^{H/2} = \frac{LH^3}{12} \quad (2.115)$$

Selon formule Eq. (2.110) donnant la distance algébrique entre des centres de poussée et de gravité, on a :

$$z_0 = -\frac{-\rho g I_{(G,yy)}}{\rho_G S} = -\frac{-\rho g I_{(G,yy)}}{\rho g (H/2)HL} \frac{LH^3}{12} = -\frac{H}{6} \quad (2.116)$$

Cela signifie que le centre de poussée G_0 se situe en dessous du centre de gravité G , à une distance de $H/6$. En d'autres termes, il est situé à une distance totale de $H/2 + H/6 = 2H/3$ depuis la surface libre du liquide. Quant à l'abscisse y , d'après Eq.(2.116) (cf. p 38), on a :

$$I_{(G,yz)} = \iint_S yz dS = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\int_{-H/2}^{H/2} yz dz \right) dy = \int_{-H/2}^{H/2} y dy \int_{-H/2}^{H/2} z dz = 0 \quad (2.117)$$

Cela signifie que le centre de poussée se trouve dans le même plan vertical que celui du centre de gravité.

I. Conclusion

Ce chapitre a abordé des concepts fondamentaux qui jettent les bases de notre compréhension des comportements statiques des fluides. Il a exploré les principes fondamentaux qui régissent leur comportement statique dans diverses situations :

Loi fondamentale de la statique des fluides : cette loi fondamentale énonce que tout fluide en équilibre est soumis à une force de pression perpendiculaire à sa surface libre. Elle permet de comprendre comment la pression varie avec la profondeur dans un fluide statique.

Hydrostatique : elle traite du comportement des fluides incompressibles au repos

sous l'influence de la gravité. Elle démontre comment la pression varie avec la hauteur dans un liquide en équilibre hydrostatique, et comment les forces de pression s'exercent sur les surfaces immergées et en contact avec des fluides.

Théorème de Pascal : stipule que toute variation de pression exercée sur un fluide incompressible se propage de manière uniforme dans toutes les directions. Cela aide à comprendre comment les pressions s'ajustent dans un fluide en équilibre.

Théorème d'Archimède : décrit la force de poussée exercée par un fluide sur un objet immergé. Cette force est égale au poids du fluide déplacé par l'objet. Il permet de comprendre comment les objets flottent ou s'enfoncent dans un fluide en équilibre.

Force de pression : c'est la force exercée par un fluide sur une paroi. En se basant sur la pression effective au point considéré, le calcul de la force de poussée sur une surface immergée ou en contact avec un fluide se base sur la détermination de la pression au point de gravité. Cependant, la détermination du centre de poussée, point aux quel cette force est appliqué se base sur le principe d'équilibre des moments en ce point.

Ces concepts forment la base de notre compréhension des comportements des fluides en équilibre, et ils sont essentiels pour aborder des problèmes plus complexes dans le domaine de la mécanique des fluides.

J. Exercice

Question

[Solution n°1 p 41]

Un réservoir ouvert équipé de deux tubes piézométriques exposés à l'atmosphère est rempli avec deux liquide non miscibles à un état statique : De l'huile de sur une hauteur $h_1 = 6m$ et de l'eau sur une hauteur $h_2 = 5m$, voir la figure 1 (cf. Figure 1. Réservoir à tubes. p 39).

Nous considérant les points A, B, C, D et E comme montre la figure 1 (cf. Figure 1. Réservoir à tubes. p 39).

1. Calculer les pressions aux points A, B et C
2. Calculer la distance entre les deux surfaces libres h
3. Écrire la distribution de pression dans le réservoir.

Données : $\rho_{eau} = 1000kg/m^3$, $\rho_{huile} = 850kg/m^3$

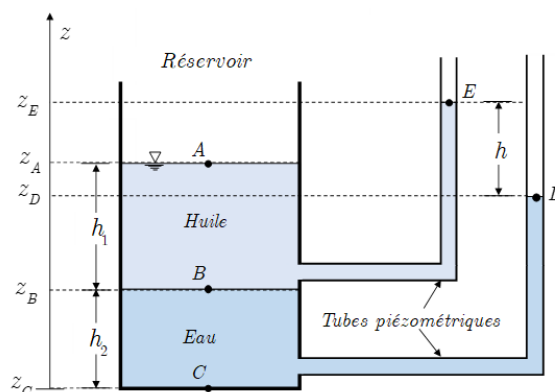


Figure 1. Réservoir à tubes.

K. Série d'exercice N° 02. Statique des fluides

Objectifs

À l'issu de cette série, l'apprenant devrait être capable de :

- Comprendre et d'appliquer les lois fondamentales de la statique des fluides, notamment la loi de Pascal et la loi d'Archimède et son lien avec la flottabilité.
- Résoudre des problèmes plus complexes impliquant des fluides compressibles, des systèmes ouverts et fermés, etc.

1. Série d'exercices avec solution

Série de Travaux dirigés n°02

Série 02- Statique des fluides.pdf
Document 1

Solution de Série 02- Statique des fluides.pdf
Document 2

Solution des exercices



> **Solution n°1** (*exercice p. 39*)

Solution de l'exo 1.pdf
Document 3

Bibliographie



- [1] White, F. M. (2016). Fluid Mechanics, 8e édition. McGraw – Hill Education, ISBN-13: 978-0073398273.
- [2] Maalem, M.S. (1993). Mécanique des fluides, tome 1, étude des liquides l'hydrostatistique, l'hydrodynamique et les solutions binaires. Science Exactes Physique.
- [3] Instrumentation CIRA Chap. III : Capteurs de pression, Cours 2006-2007
- [4] Fox, R. W., McDonald, A. T., Pritchard, P. J. (2004). Fluid Mechanics, Sixth Edition. John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Semat, H., Katz, R. (1958). Physics, Chapter 8: Hydrostatics (Fluids at Rest). Robert Katz Publications, 144.
- [6] Briggs, W. (2018). An Elementary Text-Book of Hydrostatics (Classic Reprint). Forgotten Books.
- [7] Ben Hamouda, R. (2008). Notions de Mécanique des Fluides. Centre de Publication Universitaire.