École nationale polytechnique
Maurice Audin – Oran
Département de CPST

Deuxième année Ingénieur
Année : 2023 – 2024
Module : Mécanique des fluides

**Solution de série de TD 01 – Propriétés des fluides**

## Exercice 01

La table **1** présente la variation de la masse volumique de l'eau pure en fonction de la température dans la gamme 5 à 20 °C.

**Table 1**. Variation de la masse volumique de l'eau en fonction de la température.

| Température (°C) | 05 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| Masse volumique (kg/m$^3$) | 999.9635 | 999.7004 | 999.0986 | 998.2054 |

### 1. Détermination d'une interpolation polynomiale

Nous sommes demandés d'établir une interpolation polynomiale de degrés 3 permettant de déterminer la masse volumique de l'eau en fonction de la température comme présente la table **1**. Pour ce faire, si l'on note par $\rho$ la masse volumique et $T$ la température, nous définissons les nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

$$\rho(T) = aT^3 + bT^2 + cT + d$$

Le but est ainsi de déterminer les constants $a$, $b$, $c$ et $d$ vérifiant les données de la table **1**. Nous avons :

$$\begin{cases} \rho(5) = 5^3 a + 5^2 b + 5c + d = 999.96 \\ \rho(10) = 10^3 a + 10^2 b + 10c + d = 999.70 \\ \rho(15) = 15^3 a + 15^2 b + 15c + d = 999.10 \\ \rho(20) = 20^3 a + 20^2 b + 20c + d = 998.21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^3 a + 5^2 b + 5c + d = 999.96 \\ 10^3 a + 10^2 b + 10c + d = 999.70 \\ 15^3 a + 15^2 b + 15c + d = 999.10 \\ 20^3 a + 20^2 b + 20c + d = 998.21 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations linéaires par une méthode convenable permet d'obtenir les valeurs des inconnues $a$, $b$, $c$ et $d$ comme suit :

$$a = 6.306 \times 10^{-5},\ \ b = -8.666 \times 10^{-3},\ \ c = 6.633 \times 10^{-2}\ \text{ et }\ d = 999.840$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\rho(T) = 6.306 \times 10^{-5} T^3 - 8.666 \times 10^{-3} T^2 + 6.633 \times 10^{-2} T + 999.840$$

### 2. Valeur de la température de l'eau à 15.56°C

Pour déterminer la masse volumique à 15.56°C, il suffit tout simplement de substituer cette valeur dans l'interpolation trouvée :

$$\begin{aligned} \rho(15.6) &= 6.306 \times 10^{-5}(15.56)^3 - 8.666 \times 10^{-3}(15.56)^2 + 6.633 \times 10^{-2}(15.56) + 999.840 \\ &= 999.0122 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

**Exercice 02**

Selon la norme « **A**merican **P**etroleum **I**nstitut », les pétroles sont classés d'après les normes internationales selon leur degrés API comme montre la table **2**. Si $d$(60°F) est la densité de pétrole à 60°F, le degré API est donné par :

$$API = \frac{141.5}{d(60°F)} - 131.5$$

**Table 2**. Table de classification de pétrole.

| **Classification** | **Degré API°** |
|---|---|
| Pétrole léger | $>$31.1° |
| Pétrole moyen | 22.3 à 31.1° |
| Pétrole lourd | 10 à 22.3° |
| Pétrole extra-lourd | $<$ 10° |

### 1. Qualité du pétrole algérien

Pour déterminer la qualité du pétrole algérien est necessaire de calculer sa densité à 60°F. A cette température le pétrole a la masse volumique de 827.6 kg/m$^3$, déterminons donc la masse volumique de l'eau à 60°F. Pour pouvoir déterminer cette masse volumique, nous convertissons la température $T = 60$°F en °C en utilisant la corrélation obtenue dans l'exercice **01**. Ainsi :

$$T(°C) = \tfrac{5}{9}\left(60 - 32\right) \approx 15.56°C$$

D'après l'exercice **01**, la masse volumique de l'eau à cette température vaut approximativement 999.0122 kg/m$^3$. Par conséquent, la densité est égale :

$$d(60°F) = \frac{\rho_{pétrole}(60°F)}{\rho_{eau}(60°F)} = \frac{827.6}{999.0122} = 0.828$$

Le degré API est ainsi :

$$\text{API} = \frac{141.5}{0.828} - 131.5 = 39.393°$$

Comme 39.39° $>$ 31.1°, d'après les données de la table **2**, le pétrole algérien est **léger**.

### 2. Le poids volumique $\varpi$ du pétrole algérien

Le poids volumique de ce pétrole à la température de 60°F est :

$$\varpi = \rho g = 827.6 \times 9.81 = 8118.756 \text{ N/m}^3$$

### 3. La viscosité dynamique du pétrole algérien

La viscosité cinématique de ce pétrole est de 4.6 cSt, cela veut dire 4.6×10$^{-2}$ St. Nous avons :

$$1 \text{ St} \;=\; 10^{-1}\text{m}^2/\text{s} \Rightarrow 4.6\times10^{-2}\text{St} = 4.6\times10^{-2}\times10^{-1}\text{m}^2/\text{s} = 4.6\times10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$$

La viscosité cinématique en SI est donc 4.6×10$^{-3}$ m$^2$/s, calculons la viscosité dynamique en SI. Nous avons :

$$\nu_{pétrole} = \frac{\mu_{pétrole}}{\rho_{pétrole}} \Rightarrow \mu_{pétrole} = \rho_{pétrole}\nu_{pétrole}$$

Donc :

$$\mu_{pétrole} = 827.6 \times 4.6 \times 10^{-3} = 3.807 \text{ kg/(m.s)}$$

Donc en SI, la viscosité dynamique de pétrole est de 3.807 kg/(m.s) ou encore 3.807 Pa.s. En poiseuille :

$$1 \text{ PI} = 1 \text{ Pa.s} \Rightarrow \mu_{pétrole} = 3.807 \text{ PI}$$

En poise :

$$1 \text{ Po} = 0.1 \text{ PI} \Rightarrow 1 \text{ PI} = 10 \text{ Po} \Rightarrow \mu_{pétrole} = 3.807 \times 10 = 38.07 \text{ Po}$$

**Exercice 03**

En se basant sur la supposition que le fluide circulant entre les deux plaques dont l'une est mobile avec une vitesse $v_{max}$ et l'autre fixe, soit Newtonien, la viscosité dynamique $\mu$ du fluide varie linéairement en fonction du taux de cisaillement (gradient de vitesse) et le profil de vitesses est linéaire entre les deux plaques (en fonction de $y$).

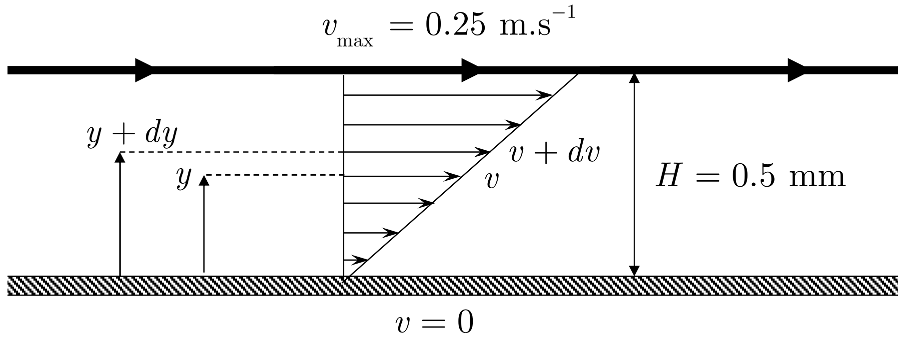


**Figure 1**. Profil de vitesse entre deux plaques, fixe et mobile

Si $v$ présente la vitesse et $\tau$ la contrainte de cisaillement, nous avons ainsi :

$$\tau = \mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \Rightarrow \tau\mathrm{d}y = \mu\mathrm{d}v \Rightarrow \int_0^H \tau\mathrm{d}y = \int_0^{v_{max}} \mu\mathrm{d}v \Rightarrow \tau(H-0) = \mu(v_{max}-0)$$

**Viscosité du fluide**

Sachant que la force par unité de surface mettons en mouvement le fluide est de $\tau = 2$ Pa, la viscosité du fluide entre les deux plaques se calcule par :

$$\mu = \frac{\tau H}{v_{max}} = \frac{2 \times (0.5 \times 10^{-3})}{0.25} = 4 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

**Exercice 04**

Un arbre d'un diamètre de $\boldsymbol{d}$ = **15** cm tourne à une vitesse de $\boldsymbol{N}$ = **1800 tr/min** à l'intérieur d'un palier de $\boldsymbol{D}$ = **15.05 cm** de diamètre et de $\boldsymbol{H}$ = **30 cm** de longueur, voir figure **2**. L'espace uniforme entre les deux est rempli d'huile ayant une viscosité μ de **0.018 g/m·s**.

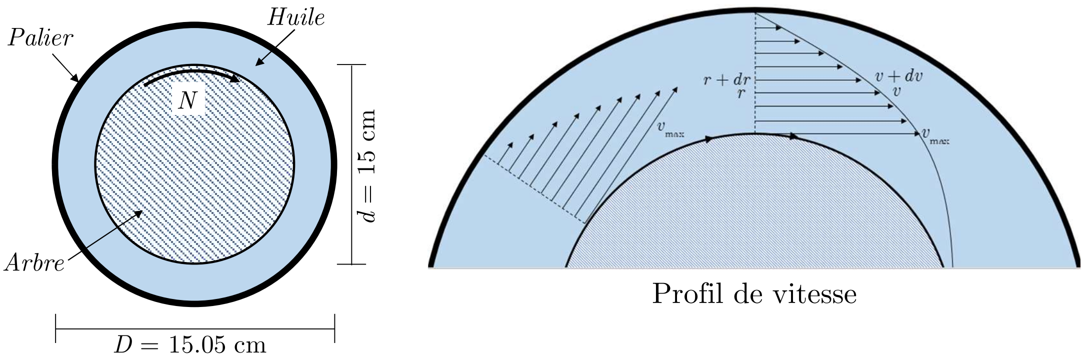


**Figure 2**. Schéma du palier.

**Calcul de la puissance**

Nous sommes demandés de calculer la puissance requise pour vaincre les résistances dues à la viscosité au niveau de l'arbre. Nous savons que la puissance se calcule par :

$$Po = \frac{\text{Travil}}{\text{Temps}} = \frac{Wo}{t} = \frac{F_T.L}{t} = F_T v_{\max}$$

Avec $Wo$, $t$, $F$, $L$ et $v$ présente respectivement le travail, le temps la force de frottement entre l'arbre et l'huile, le déplacement angulaire et la vitesse de rotation de l'arbre. Mais, on sait que $F_T = \boldsymbol{\tau}.S$, avec $\boldsymbol{\tau}$ est la contrainte de cisaillement au niveau de la surface latérale de l'arbre où $S$ sa surface telles que :

$$\tau = \mu \frac{\Delta v}{\Delta r} \text{ Et } S = \pi dH$$

Ainsi, en substituant dans l'expression de puissance :

$$Po = \tau S v_{\max} = \left(\mu \frac{\Delta v}{\Delta r}\right)\left(\pi dH\right) v_{\max} = \left(-\mu \frac{v_{\max} - 0}{\frac{d}{2} - \frac{D}{2}}\right)\left(\pi dH\right) v_{\max} = 2\pi dH \mu \frac{v_{\max}^2}{D - d}$$

Sachant que $v_{\max} = \boldsymbol{\pi} Nd$, nous avons :

$$Po = 2\left(\pi dH\right)\frac{(\pi Nd)^2}{D-d}\mu$$

Une application numérique nous permet de trouver :

$$Po = 2\left(3.14 \times 15 \times 10^{-2} \times 30 \times 10^{-2}\right)\frac{\left[3.14\frac{1800}{60}\left(15 \times 10^{-2}\right)\right]^2}{15.05 \times 10^{-2} - 15 \times 10^{-2}}\left(0.018 \times 10^{-3}\right) = 2.034 \text{ W}$$

**Exercice 05**

La mesure de la contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement pour le fluide 1% CMC à l'aide du rhéomètre rotatif RheolabQC couplé au logiciel Rheoplus a permet de montrer les données de la table **3a**.

**Table 3a**. Contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement.

| γ (1/s) | 1 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| τ (Pa) | 8,359 | 52,741 | 69,593 | 81,847 | 91,828 | 100,402 | 107,997 | 114,866 | 121,168 |

**1. Représentation graphique des données de la table 3**

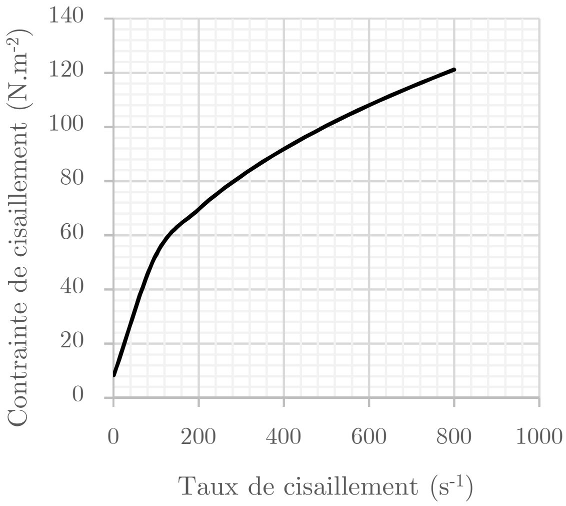


**Figure 2**. Contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement.

Comme il s'agit d'une allure non linéaire parabolique du graphe $\tau = f(\gamma)$, le fluide 1% CMC est **non-Newtonien**. De plus, la concavité du graphe tracée indique que c'est un fluide **fluidifiant** (pseudoplastique).

**2. Représentation graphique de log $\tau = f$ (log $\gamma$)**

Nous calculons tout d'abord les valeurs de log $\tau$ et log $\gamma$ dans une table **3b** :

**Table 3b**. Log de contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement.

| log(γ) | 0 | 4,605 | 5,298 | 5,703 | 5,991 | 6,214 | 6,396 | 6,551 | 6,684 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| log(τ) | 2,123 | 3,965 | 4,242 | 4,404 | 4,519 | 4,609 | 4,682 | 4,7437 | 4,797 |

Le graphe $\tau = f$ (log $\gamma$) est une droite comme montre la figure **4**. D'après la loi de puissance d'Ostwald De Waele, nous avons :

$$\tau = m\dot{\gamma}^n$$

Avec $m$ est le coefficient de consistance et $n$ est l'indice de comportement du fluide. En introduisant la fonction « log » dans les deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$\log\tau = \log(m\dot{\gamma}^n) = \log m + \log(\dot{\gamma}^n) \Rightarrow \underbrace{\log\tau}_{Y} = \underbrace{\log m}_{B} + \underbrace{n}_{A}\underbrace{\log\dot{\gamma}}_{X}$$

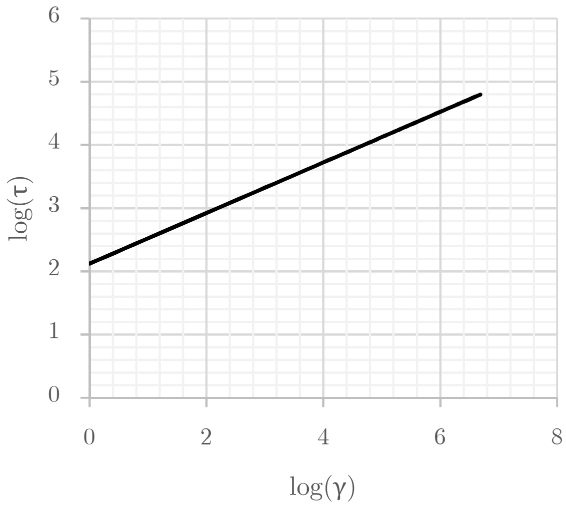


**Figure 4**. Log de contrainte de cisaillement en fonction de log du taux de cisaillement.

Il s'agit donc d'une équation d'une droite. Ainsi, par identification avec le graphe de la figure **4**, nous constatons que log$m$ présente l'ordonnée du point de l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. Cependant, $n$ présente la ponte :

*Coefficient de consistance*

$$\log m = \log \tau(\dot{\gamma} = 0) = 2.123 \Rightarrow m = e^{2.123} \Rightarrow m = 8,356 \text{ kg/m.s}^{2\text{-n}}$$

*Indice de comportement*

$$n = \frac{\log \tau(\dot{\gamma} = 800) - \log \tau(\dot{\gamma} = 0)}{\log(\dot{\gamma} = 800) - \log(\dot{\gamma} = 1)} = \frac{4.797 - 2.123}{6,684 - 0} \Rightarrow n = 0.4$$

**Exercice 06**

Le mélange « eau-alcoolisé » est constitué de $V_{eau}$ =23 litre d'eau et $V_{alcool}$ = 1.3 litre d'alcool dont les masses volumiques sont respectivement $\rho_{eau} = 1000$ kg/m$^3$ et $\rho_{alcool} =$ 800 kg/m$^3$. En unité fondamentale :

$$V_{eau} = 23\times10^{-3} \text{ m}^3 \text{ et } V_{eau} = 1.3\times10^{-3} \text{ m}^3$$

**Masse volumique du mélange**

$$\rho_{mélange} = \frac{m_{mélange}}{V_{mélange}} = \frac{m_{eau} + m_{alcool}}{V_{mélange}} = \frac{\rho_{eau}V_{eau} + \rho_{alcool}V_{alcool}}{V_{eau} + V_{alcool}}$$

Une application numérique :

$$\rho_{mélange} = \frac{1000\times23\times10^{-3} + 800\times1.3\times10^{-3}}{23\times10^{-3} + 1.3\times10^{-3}} \simeq 989.30 \text{ kg/m}^3$$

**Densité du mélange**

$$d_{mélange} = \frac{\rho_{mélange}}{\rho_{eau}} = \frac{989.30}{1000} = 0.9893$$

**Exercice 07**

On a la suspension nanométrique hybride ou encore nanofluide composée en nanoparticules d'alumine ($Al_2O_3$) et d'oxide de cuivre (CuO) suspendues dans l'eau pure tel qu'il est montré dans la table **4** :

**Table 4**. Propriétés de la suspension.

| Substance | Volume | Densité [kg/m$^3$] | Viscosité [kg/(m.s)] |
|---|---|---|---|
| Eau pure (f) | 1 litre | 997.1 | 0.001003 |
| $Al_2O_3$ ($p_1$) | 3.015 cm$^3$ | 3970 | - |
| Oxide de cuivre ($p_2$) | 2.01 cm$^3$ | 6500 | - |

Nous sommes demandés de calculer la masse volumique et la viscosité de la suspension hybride. Calculons la fraction volumique de chaque espèce de nanoparticules :

$$\varphi_{Al_2O_3} = \frac{V_{Al_2O_3}}{V_{eau} + V_{Al_2O_3} + V_{CuO}} = \frac{3.015 \times 10^{-6}}{3.015 \times 10^{-6} + 2.01 \times 10^{-6} + 1 \times 10^{-3}} = 0.003$$

$$\varphi_{CuO} = \frac{V_{CuO}}{V_{eau} + V_{Al_2O_3} + V_{CuO}} = \frac{2.01 \times 10^{-6}}{3.015 \times 10^{-6} + 2.01 \times 10^{-6} + 1 \times 10^{-3}} = 0.002$$

La fraction volumique des nanoparticules hybride est :

$$\varphi = \varphi_{Al_2O_3} + \varphi_{CuO} = 0.005$$

La masse volumique et des nanoparticules est :

$$\rho_p = \frac{\varphi_1 \rho_{Al_2O_3} + \varphi_2 \rho_{CuO}}{\varphi} = \frac{0.003 \times (3970) + 0.002 \times (6500)}{0.005} = 4982 \text{ kg/m}^3$$

**La masse volumique de la suspension**

$$\rho_{nf} = \varphi \rho_p + (1-\varphi)\rho_{eau} = 0.005 \times 4982 + (1 - 0.005) \times 997.1 = 1017 \text{ kg/m}^3$$

**Viscosité de la suspension**

*Selon Brinkmann*

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}} = \frac{0.001003}{(1-0.005)^{2.5}} = 0.0010156 \text{ Pa.s}$$

*Selon Einstein*

$$\mu_{nf} = \mu_f (1 + 2.5\varphi) = \mu_f (1 + 2.5 \times 0.005) = 0.0010155 \text{ Pa.s}$$