

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique
d'Oran Maurice Audin



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
بوهان موريس أودان

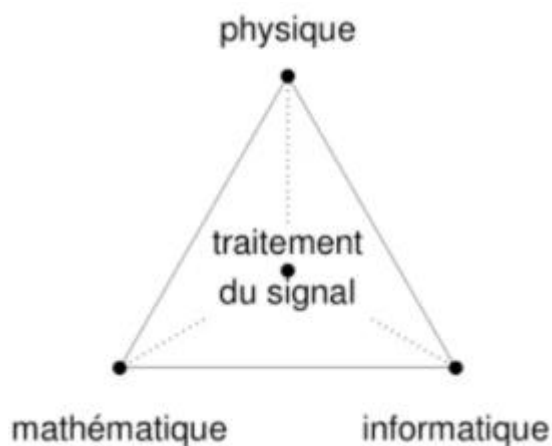
Département de Génie des Procédés et Matériaux

Polycopié

Traitement du signal

Cours & Exercices

M^{me} EL BOUSLEMTI Rahmouna



2024 - 2025

Objectifs de l'enseignement

L'objectif de ce cours est de présenter des outils pour analyser les propriétés d'un signal et examiner ce qu'il en advient lors de son passage à travers un système.

Connaissances préalables recommandées

Notions de base de l'électronique numérique et du calcul différentiel et intégral.

Préambule

Ce document est un support du cours destiné aux étudiants en 1^{ère} année de la formation d'ingénieur d'état en génie électrique et aux étudiants en 3^{-ème} de la formation d'ingénieur d'état en génie de matériaux ; mais bien entendu, il peut être utilisé par tous ceux en 1^{er} cycle ou 2^{-ème} cycle LMD.

Ce cours est structuré suivant le CANEVAS qui est présenté dans l'annexe A, en sept grands chapitres. C'est un document de base en matière de théorie et traitement du signal pour les post-graduants, qui désirent approfondir leurs connaissances.

Nous nous intéressons principalement au traitement du signal qui est discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information.

Conseils aux étudiants pour bien commencer

Vous devez suivre les conseils suivants :

- * Soyez réguliers dans l'effort :
 - N'attendez pas la fin du semestre ou de l'année pour travailler.

- * Soyez vigilants face aux difficultés rencontrées :
 - Réagissez rapidement si vous décrochez

- * Arrivez en avance en cours et TD

- * Comprenez ce que vous apprenez, entraînez-vous, soyez concentrés et n'hésitez pas à vous faire aider ; et l'apprentissage deviendra plus simple.

Table des matières

Chapitre 1 : Signaux déterministes	8
1. Introduction	8
2. Définitions	8
2.1 Signal	8
2.2 Bruit	9
3. Traitement du signal	9
4. Classification des signaux	10
4.1 Classification phénoménologique	10
4.2 Classification morphologique	11
4.3 Classification symétrique	11
5. Energie et puissance	14
5.1 Energie de $x(t)$	14
5.2 Puissance de $x(t)$	14
6. Quelques signaux déterministes usuels	15
6.2 Fonction échelon unité	15
6.3 Fonction rampe.....	15
6.5 Fonction triangle	16
6.6 Impulsion de Dirac	17
6.7 Peigne de Dirac	18
6.8 Fonction sinus cardinal	18
7. Operations sur les signaux	18
7.1 Inversion temporelle.....	18
7.3 Changement d'échelle (compression/dilatation) / Echelonnage.....	19
8. Produit de convolution	20
9. Traitement du signal analogique	22
9.1 Série de Fourier	23
9.2 La Transformée de Fourier.....	23
A. Transformation de Fourier des fonctions	24
B. La transformée inverse	25
C. Propriétés de la TF	26
10. Théorème de Parseval	28
11. Questions	28
Chapitre 2 : Echantillonnage des signaux analogiques	29
1. Introduction	29
2. Echantillonnage	29
2.1 Définition	29
2.3 Théorème de Shannon.....	31

3. Reconstitution d'un signal analogique à partir de sa version échantillonnée	32
Chapitre 3 : Signaux discrets	34
1. Définition	34
2. Signaux discrets usuels	34
3. Signaux discrets usuels	35
3.1 Impulsion de Dirac	35
3.2 Echelon unitaire	35
3.3 Fenêtre rectangulaire	35
3.4 Exponentielle décroissant	35
4. Opérations sur les signaux discrets	35
5. Énergie et puissance de signaux discrets	36
6. Transformée de Fourier des signaux à temps discret (TFTD)	36
6.1 Définition	36
6.2 Périodicité	36
6.3 Exemple de la TFTD	37
7. La transformée de Fourier inverse à temps discret	37
8. Formule de Poisson	37
9. Propriétés	38
10. Egalité de Parseval	38
11. de la TFTD à la TFD	38
11.1 Transformée De Fourier Discrète (TFD)	39
11.2 Définition	39
12. " FFT " : Fast Fourier Transform	41
Chapitre 4 : Processus aléatoires	42
1. Généralités	42
2. Rappel sur les variables aléatoires	42
3. Signaux aléatoires	43
4. Stationnarité et érgodisme	44
4.1 Stationnarité	44
4.2 Ergodicité	45
5. Questions	45
Chapitre 5 : Signaux et systèmes	46
1. Systèmes linéaires et stationnaires	46
1.2 Linéarité	46
1.3 L'invariance dans le temps	47
1.4 Mémoire	47
1.5 Causalité	47

1.6 Stabilité	48
1.7 Réponse impulsionnelle	48
1.8 Réponse indicielle	48
2. La transformée en Z	49
2.1 Définition	49
2.2 Critère de Cauchy et la région de convergence.....	50
2.3 Propriétés de la transformée en Z.....	52
2.4 Théorèmes limites	52
2.5 Table de la Transformée en Z des Fonctions usuelles	53
3. Transformée en Z inverse	53
3.1 Développement en série de puissance.....	53
3.2 Développement en fraction partielle	54
3.3 Transformée en Z rationnelle	55
4. Représentation des pôles et zéros	56
5. Stabilité d'un système à temps discret	57
6. Transformation de Hilbert.....	57
6.1 Définition	57
6.2 Signal causal.....	59
6.3 Etude des propriétés de Xf , Xpf et Xif	60
6.4 Signal analytique.....	60
6.5 Propriété (Transformée de HILBERT d'un signal modulé)	62
7. La prédiction linéaire	62
7.1 Le modèle de prédiction.....	62
7.2 Prédiction Linéaire Pour le Traitement de la Parole [12]	63
Chapitre 6 : Synthèse de filtres numériques.....	65
1. Filtrage	65
1.2 Rappels sur la théorie du filtrage	65
1.2.3 Synthèse des filtres analogiques	66
1.2.4 Les filtres idéaux	66
2. Filtres numériques	68
2.1 Définition d'un filtre numérique	68
2.2 Classification.....	68
2.3 Structure canonique directe et transposée	70
3. Synthèse d'un filtre numérique	71
3.1 Synthèse de filtres RIF	71
3.2 Synthèse des filtres R.L.I	76
Chapitre 7 : Introduction à l'analyse et l'estimation spectrale	78
1. C'est quoi l'analyse spectrale ?.....	78

2. Pour quelles applications ?	78
3. Quels sont les outils de base pour l'analyse spectrale ?	78
4. Analyse spectrale des processus stochastiques	78
4.1 Introduction	78
4.2 Les signaux utiles informatifs	78
4.3 Les bruits et perturbations	79
4.4 Spectre d'un signal aléatoire	79
5. Estimation spectrale	80
5.1 Introduction	80
5.2 Le problème d'estimation	80
5.3 Qualité d'un estimateur	81
5.4 L'erreur quadratique moyenne - MSE : Mean Squared Error	82
5.5 Efficacité	82
5.6 Performance d'un estimateur	82
5.7 Estimation des moments	83
C. Densité spectrale de puissance et théorème de Wiener-Khintchine	87
5.8 Estimation des densités spectrales	87
A. Modèles autorégressif (AR)	91
B. Modèles à moyenne ajustée (MA)	92
C. Modèles autorégressifs à moyenne ajustée (ARMA)	92
5.8.3 Méthode de vraisemblance maximale (ML)	93
Annexe A : canevas	96
Annexe B : Transformée de Fourier des signaux usuels	97
Annexe C : La transformée de Fourier discrète TFD	98
Annexe D : Série de Taylor	100
Bibliographie	102

Chapitre 1 : Signaux déterministes

1. Introduction

Les grandeurs physiques telles que la tension électrique, la puissance ou la pression varient dans le temps, les rendant ainsi porteuses d'informations. On les désigne simplement comme des signaux. En général, toute information peut être considérée comme un signal. Cependant, parfois, ces signaux sont perturbés par des signaux non désirés, ce qui altère l'information. Cette perturbation est appelée bruit, et l'un des principaux objectifs du traitement du signal est de réduire ce bruit par rapport aux signaux utiles, autrement dit, d'améliorer le rapport signal-sur-bruit (SNR - Signal-to-Noise Ratio).

L'étude du signal se divise en trois parties :

- La théorie des signaux : Il s'agit de la modélisation ou de l'identification du signal, impliquant une analyse temporelle ou fréquentielle des signaux. Cette étude nécessite une approche mathématique permettant d'explorer des propriétés telles que la durée utile, l'amplitude en fonction du temps ou le spectre qui révèle la composition fréquentielle du signal. La théorie du signal consiste donc en l'étude des outils mathématiques permettant de décrire le signal. Son objectif fondamental est la description mathématique des signaux.
- Le traitement du signal : Avant de transmettre un signal, il est nécessaire de le moduler, de le coder ou de changer sa fréquence. De même, à la réception, il peut être nécessaire de le démoduler. C'est l'objet du traitement du signal. Ce domaine englobe également l'interprétation du signal, comprenant le décodage, la démodulation, le filtrage, etc. Il consiste en la réalisation d'opérations sur le signal.
- La transmission : Il s'agit des outils mathématiques permettant de décrire la transmission des informations d'un système d'émission à un système de réception.

Le traitement du signal trouve des applications dans plusieurs domaines, tels que les systèmes de détection et de localisation, les systèmes industriels (par exemple, le contrôle de niveau) ainsi que le traitement de la parole, du son et de l'image.

2. Définitions

2.1 Signal

Le mot « signal » désigne l'évolution temporelle d'une grandeur physique mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Ces signaux physiques sont modélisés par des fonctions mathématiques x dépendant d'une variable représentant le temps t .

- ❖ Représentation physique d'une information à transmettre
- ❖ Entité qui sert à véhiculer une information

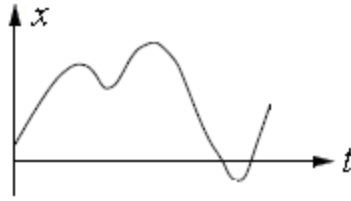


Figure 1 : Représentation d'un signal.

Exemples

Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, musique, ...) ; Signaux biologiques : ECG ; Tension aux bornes d'un condensateur en charge ; Signaux géophysiques : vibrations sismiques ; Finances : cours de la bourse ; Débit de la Seine ; Images ; Vidéos.....etc.

2.2 Bruit

Tout phénomène perturbateur pouvant gêner la perception ou l'interprétation d'un signal.

Exemple : Bruit impulsif

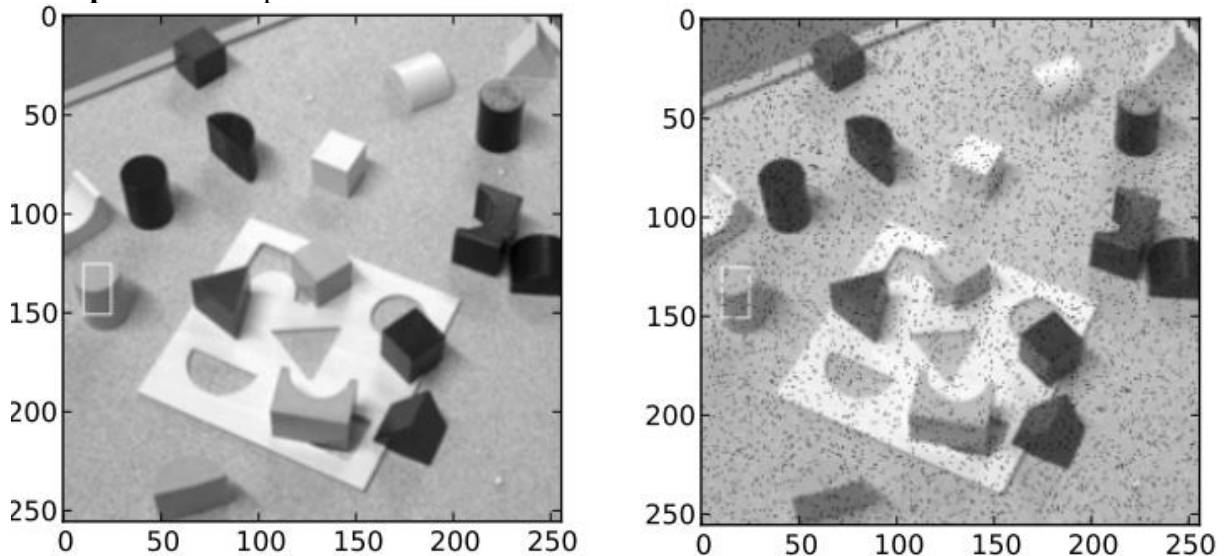


Figure 2 : à gauche : image originale, à droite : image bruitée par un bruit impulsif.

3. Traitement du signal

- Ensemble de techniques permettant de créer, d'analyser, de transformer les signaux en vue de leur exploitation, il s'appuie sur les mathématiques, la physique (physique des ondes en particulier), l'électronique et l'informatique [1].

- Extraction du maximum d'information utile d'un signal perturbé par le bruit.

Cette matière trouve son champ d'application dans tous les domaines concernés par la transmission et le traitement d'informations. Ses secteurs d'application s'étendent des télécommunications (téléphone, télévision, télécopie, modem, etc.), à l'instrumentation (capteur, métrologie, analyse spectral, génération de signaux, etc.) de l'automatique (commande de moteurs et de machine, asservissements, robotique, etc.) au génie biomédical (radiographie, échographie, etc.) en passant par le traitement du son (synthétiseurs, écho artificiel, etc.) et de l'image (restauration d'image,

reconnaissance de forme, compression et transmission d'image, etc.) des signaux géophysiques et des signaux issus de radar ou de sonar, etc.

Exemple :

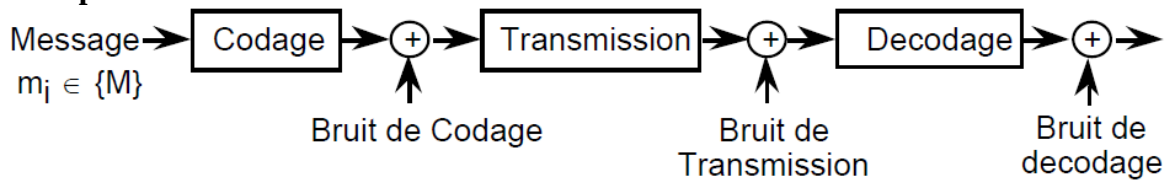


Figure 3 : Schéma d'une chaîne de transmission.

Une chaîne de transmission (voir figure 3) dans laquelle le bruit s'ajoute au niveau du codage (émetteur) puis dans le canal de transmission (rayonnement, couplage) et au niveau du récepteur dans lequel on va faire du traitement du signal pour extraire notre signal du bruit (information sans intérêt).

4. Classification des signaux

On peut envisager plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

- Signaux déterministes ou aléatoires.
- Signaux continus ou discrets.
- Signaux périodiques ou non.

4.1 Classification phénoménologique

La première classification, basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, fait apparaître deux types fondamentaux :

- **Les signaux déterministes (ou certains)** dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques [2]. A titre d'exemple, pour un oscillateur qui délivre un signal sinusoïdal d'amplitude A et de fréquence f_0 , on peut prédire la valeur du signal à tout instant grâce au modèle mathématique $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$. (Une formule mathématique définit parfaitement le signal.)

On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, apériodiques et transitoire représentés sur la figure 4.

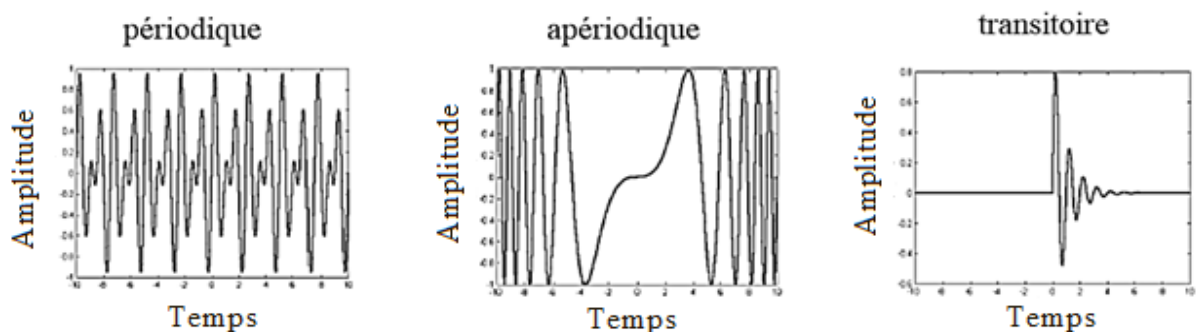


Figure 4 : Des signaux déterministes.

- **Signaux aléatoires (ou probabilistes ou stochastiques)** dont le comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les

décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont **stationnaires**.

4.2 Classification morphologique

Selon l'amplitude du signal et la variable t , on distingue 4 cas possible :

- Les **signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus
- Les **signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- Les **signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret
- Les **signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets

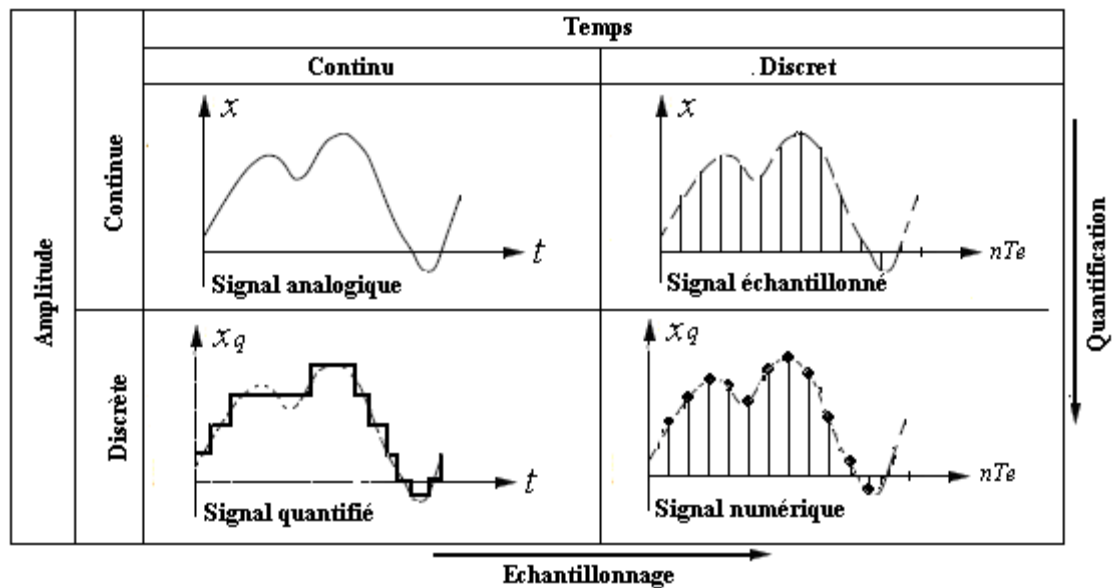


Figure 5 : Classification morphologique des signaux.

4.3 Classification symétrique

Il y a quatre types de symétrie :

1. Symétrie paire
2. Symétrie impaire
3. Symétrie demi-onde
4. Symétrie quart-d'onde

A. Symétrie paire

Un signal est pair si : $f(t) = f(-t)$

C'est-à-dire on peut faire une copie miroir autour de l'axe y.

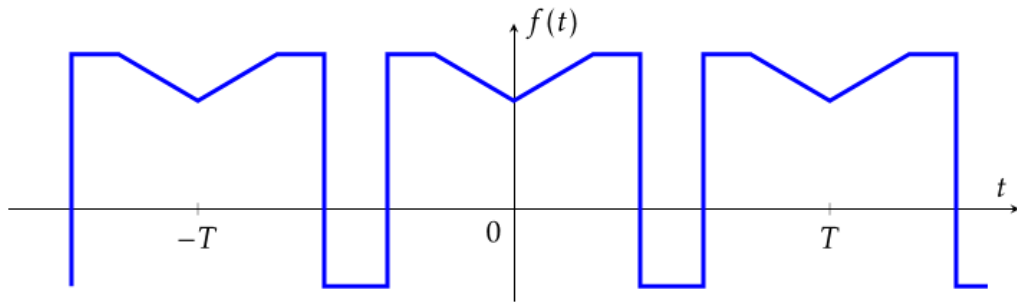


Figure 6 : exemple de fonction paire.

B. Symétrie impair

Un signal est impair si $f(t) = -f(-t)$

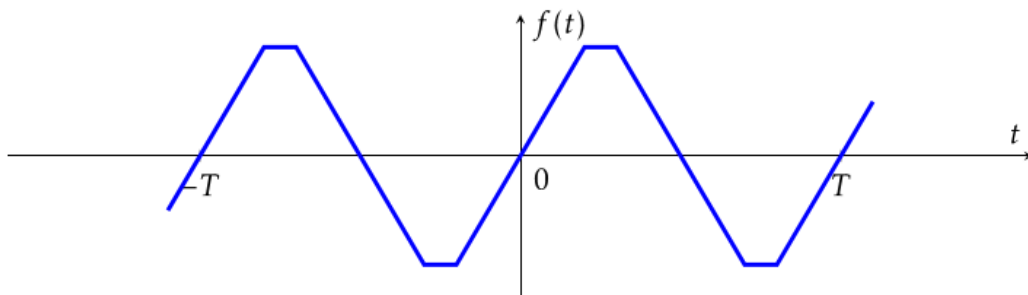


Figure 7 : exemple de fonction impaire.

C'est-à-dire on peut faire une copie miroir autour de l'axe y puis une copie miroir autour de l'axe x.

C. Symétrie demi-onde

Une fonction périodique possède de la symétrie demi-onde si : $f(t) = -f(t-T/2)$

C'est-à-dire que si on déplace la fonction d'une demi-période, puis on l'inverse (rotation de l'axe x) et alors que cette nouvelle fonction est identique à l'origine, il y a symétrie demi-onde.

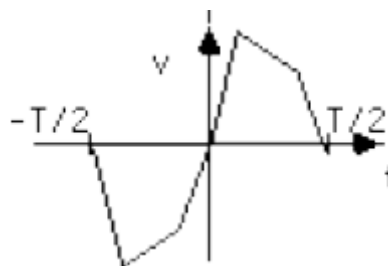


Figure 8 : fonctions ayant la symétrie demi-onde.

D. Symétrie quart-d'onde

Le terme symétrie quart-d'onde décrit une fonction périodique qui a la symétrie demi-onde mais aussi de la symétrie autour du point milieu entre les demi-cycles positifs et négatifs.

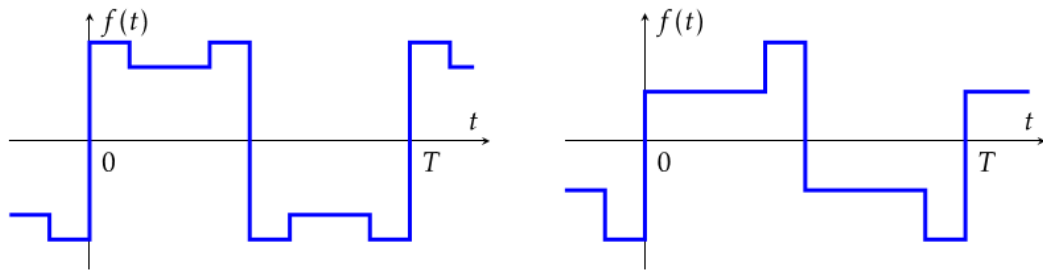


Figure 9 : Symétrie : a) quart-d'onde et b) n'a pas quart-d'onde .

Remarque :

✓ Causalité

• Signal causal

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps $f(t) = 0$ Si $t < 0$.

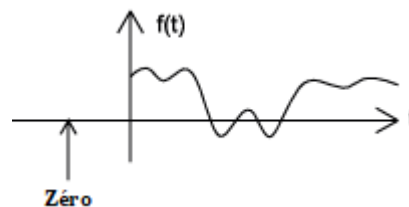


Figure 10 : Signal causal.

• Signal anti-causal

Un signal anti-causal est un signal qui est nul pour tout temps positif (voir figure 11).

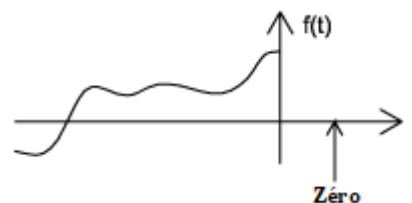


Figure 11 : Signal anti-causal.

• Signal non-causal

Les signaux non causals sont des signaux qui ont des valeurs non nulles à la fois positives et négatives (Figure 12)

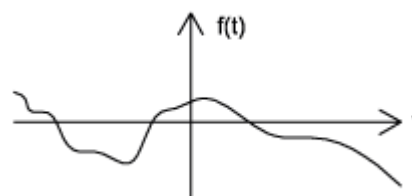


Figure 12 : Signal anti-causal.

✓ Période, fréquence

On parle également de **signaux périodiques** : un signal x est dit périodique de période T ,

Si pour tout instant t_0 , $x(t_0 + T) = x(t_0)$: le signal se répète, identique à lui-même, au bout d'un intervalle de temps T .

On définit alors sa fréquence f par $f = 1/T$.

Une fréquence est l'inverse d'un temps, et s'exprime en **Hertz (Hz)**.

5. Energie et puissance

Toute transmission d'information est liée d'énergie. Comment mesure t'on l'énergie d'un signal ?

Soit un signal $x(t)$ défini sur $]-\infty, +\infty[$, et T_0 est un intervalle de temps :

5.1 Energie de $x(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

❖ **Définition** : on appelle un signal à énergie finie non nulle tout signal dont l'énergie reste finie quand l'intervalle considéré varie de $-\infty$ à $+\infty$.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

L'énergie est toujours positive.

Exemple :

$$f(t) = Ae^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |Ae^{-\alpha|t|}|^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha t} dt + A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt$$

$$E = \frac{A^2}{\alpha} \Rightarrow \text{Le signal est à énergie finie}$$

Remarque : les signaux d'énergie finie sont tous les signaux de type transitoire, qu'il soit déterministe ou aléatoire.

5.2 Puissance de $x(t)$

La puissance normalisée (moyenne) d'un signal est la moyenne dans le temps de l'énergie.

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Si $x(t)$ est périodique avec une période T , la puissance moyenne du signal est l'énergie moyenne par période est donnée par :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

❖ **Définition** : on dit qu'un signal $x(t)$ est à puissance finie non nulle, un signal pour le quel l'équation précédente reste finie de 0 à $+\infty$.

$$0 < P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Remarque : les signaux à puissance moyenne finie ne sont pas des signaux physiquement réalisables.

Exemple : Soit un signal $x(t) = 5V$ pour $-\infty < t < +\infty$; est ce que c'est un signal de puissance ou d'énergie ?

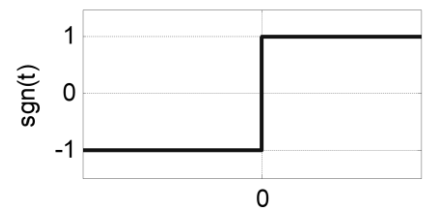
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} 5^2 dt = \infty$$

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 5^2 dt = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} 25[T_0] = 25 W \Rightarrow \text{c'est un signal de puissance.}$$

6. Quelques signaux déterministes usuels

6.1 Fonction signe

$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases}$, $\text{sgn}(0)$ peut prendre toute valeur comprise entre -1 et 1, mais généralement on prend $\text{sgn}(0) = 0$

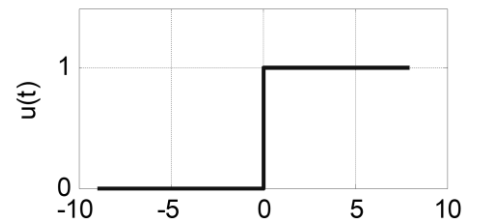


6.2 Fonction échelon unité

$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases}$, par convention $u(0) = 1/2$

On peut montrer facilement que :

$$u(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2}, \quad \text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

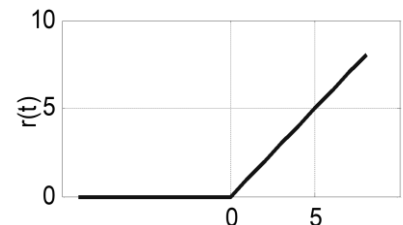


6.3 Fonction rampe

$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ t, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

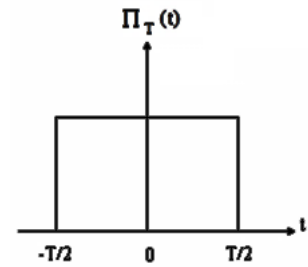
Ou d'une autre manière :

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = t \cdot u(t)$$



6.4 Fonction rectangle « Porte »

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}\right] \\ 0, & \text{si } t \notin \left[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}\right] \end{cases}$$



On l'appelle également Fenêtre.

$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

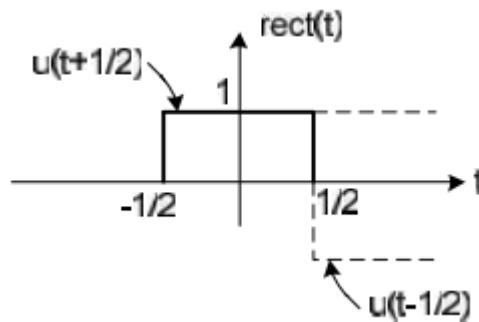
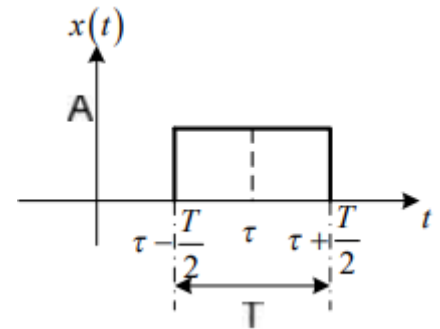
A : amplitude.

τ : centre de symétrie.

T : largeur.

On peut définir la fonction rectangulaire en fonction de l'échelon

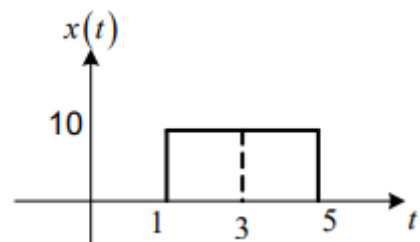
$$\text{rect}(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$



Exemple : représenter $x(t)$ et $f(t)$ graphiquement :

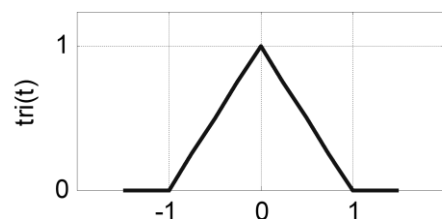
$$x(t) = 10 \Pi\left(\frac{t-3}{4}\right)$$

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{5}\right)$$



6.5 Fonction triangle

$$\text{tri}(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t|, & \text{pour } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



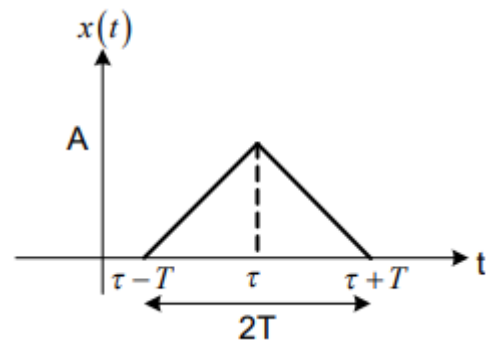
Cas général

$$x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

A : amplitude.

τ : centre de symétrie.

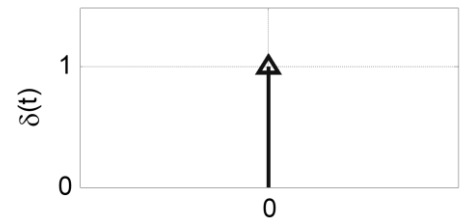
T : la demi-largeur.



6.6 Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

L'impulsion de Dirac est une fenêtre rectangulaire dont la largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.



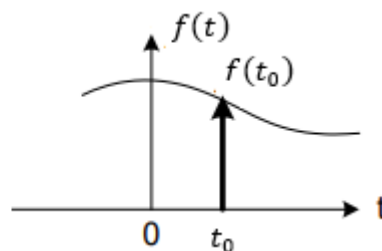
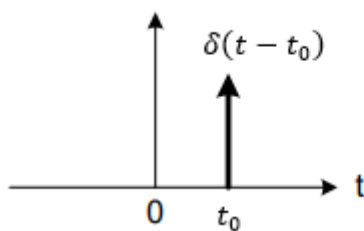
Elle vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Remarque : l'impulsion de Dirac est représentée par une flèche d'amplitude 1.

Le 1 désigne la surface de l'impulsion mais pas son amplitude.

• Propriétés

1. $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$
2. $f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$
3. $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$



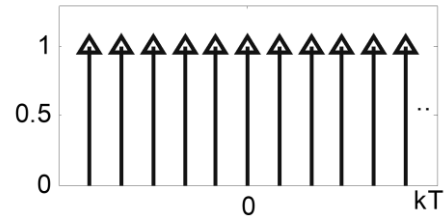
$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

$$5. \delta(k \cdot t) = \frac{1}{|k|} \delta(t)$$

6.7 Peigne de Dirac

La fonction peigne de Dirac notée $\delta_T(t)$, est une suite d'impulsions de Dirac, périodiques et de période T .

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



6.8 Fonction sinus cardinal

La fonction sinus cardinal notée $\text{sinc}(\alpha)$ est définie par :

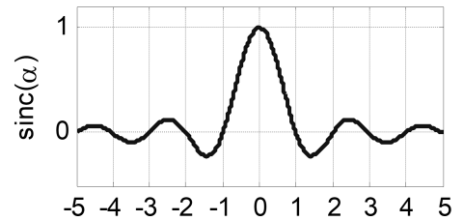
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Où :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Si $x=0$ alors :

$$\text{sinc}(0) = 1$$



❖ Remarque

La fonction **sinus cardinal** est définie par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ (définition 1) où sin désigne la fonction sinus.}$$

Comme souvent en mathématiques, il existe une autre définition couramment utilisée :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ (définition 2).}$$

Quand une confusion pourra être possible, on notera par la suite sinc_1 (resp. sinc_π) la première (et respectivement la seconde) version de la fonction. La seconde est parfois nommée sinus cardinal normalisé.

7. Opérations sur les signaux

On verra ici quelques opérations sur les signaux, comme le décalage temporel ou l'échelonnage. Ces opérations sont utiles lors de l'application de la série et la transformation de Fourier.

7.1 Inversion temporelle

L'inversion temporelle est simplement l'opération de faire une image miroir d'un signal $f(t)$ autour de l'origine.

$$x(t) = x(-t)$$

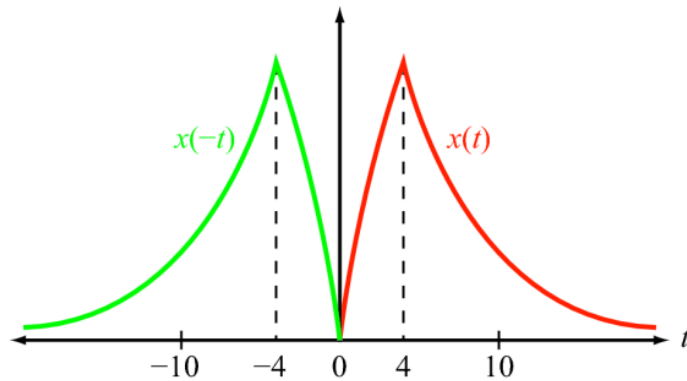


Figure 13 : Exemple d'inversion temporelle.

7.2 Décalage temporel (avance/retard)

Le décalage temporel est l'action d'avancer ou retarder un signal. Il est décrit par $x(t-t_0)$. Où t_0 est une constante réelle. Un exemple de décalage temporel est donné à la figure 14.

- Si $t_0 > 0$, on opère une **avance** : translation horizontale de t_0 vers **la gauche**.
- Si $t_0 < 0$, on opère un **retard** : translation horizontale de t_0 vers **la droite**.

Graphiquement, le signal avancé $x(t+t_0)$ ou retardé $x(t-t_0)$ correspond à la version translatée horizontalement du signal original $x(t)$.

Exemple : $t_0 = 10$ s

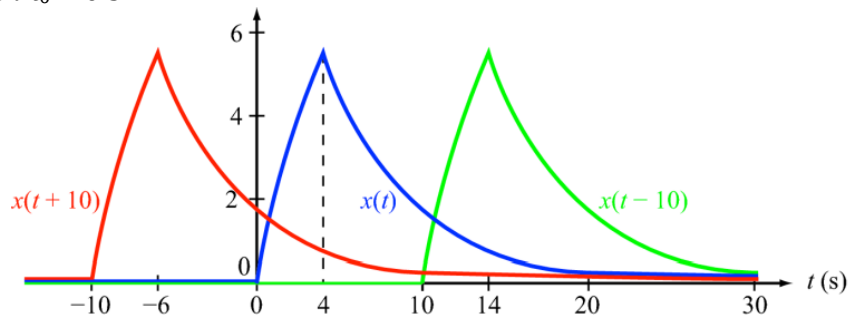


Figure 14 : Exemple de décalage temporel.

7.3 Changement d'échelle (compression/dilatation) / Echelonnage

Cette opération permet d'étirer ou comprimer un signal dans le temps.

$$y(t) = x(at) \text{ avec } a > 0$$

Graphiquement, $y(t) = x(at)$ (avec a le facteur d'échelle)

Si $0 < a < 1$, $y(t)$ est une version dilatée de $x(t)$

Si $a > 1$, $y(t)$ est une version comprimée de $x(t)$

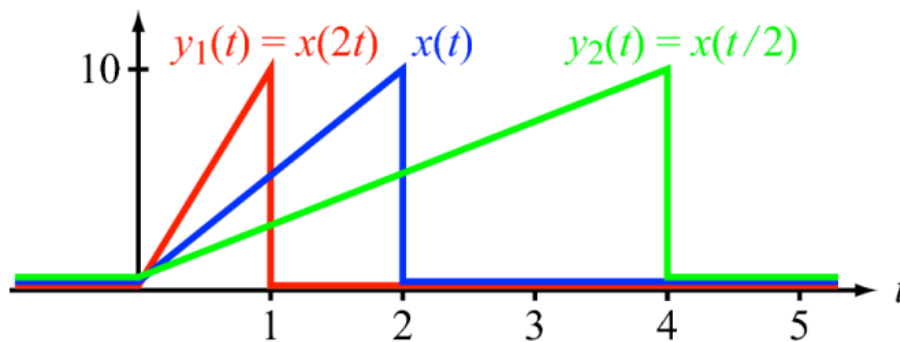


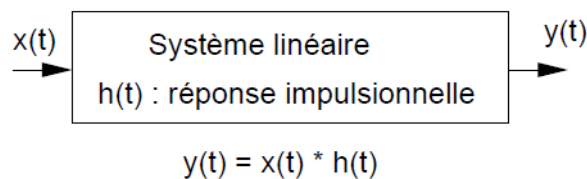
Figure 15 : Exemple d'échelonnage temporel.

8. Produit de convolution

On appelle produit de convolution entre deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$, l'opération $*$ définie par :

$$(x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Si la réponse impulsionnelle d'un système linéaire (comme un filtre, par exemple) est représentée par la fonction $h(t)$, la sortie du signal $y(t)$ s'obtient comme le produit de convolution de l'entrée $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle $h(t)$.



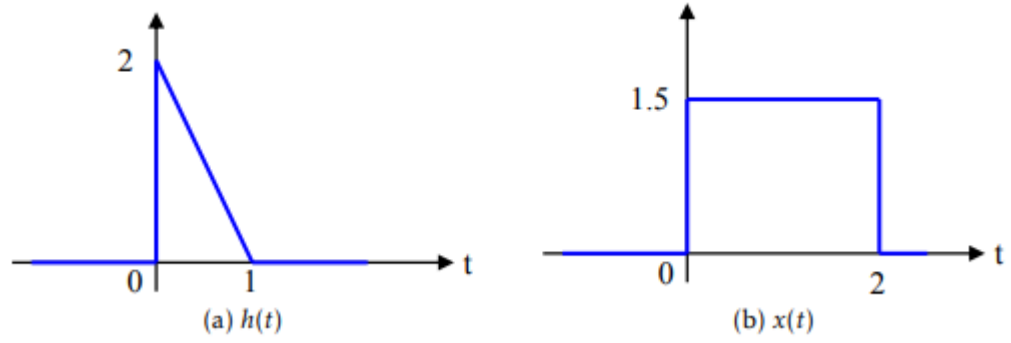
Le produit de convolution exprime la quantité de recouvrement d'une fonction x lorsqu'on la déplace sur une autre fonction h : c'est un mélangeur de fonction.

❖ Convolution graphique entre deux signaux en temps continu $f_1(t)$ et $f_2(t)$

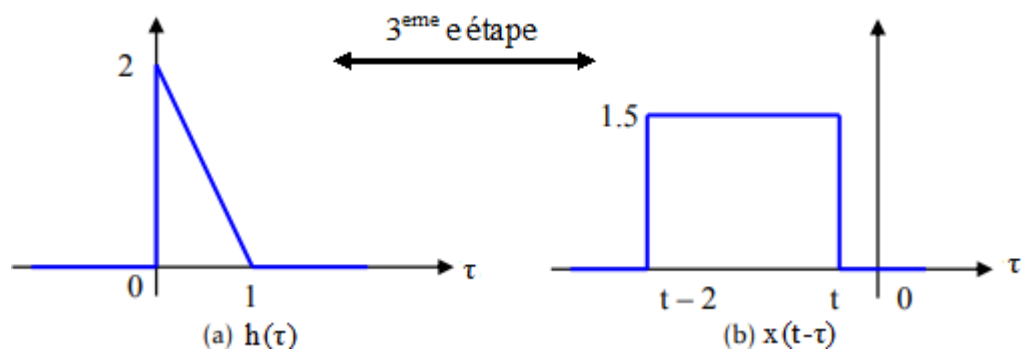
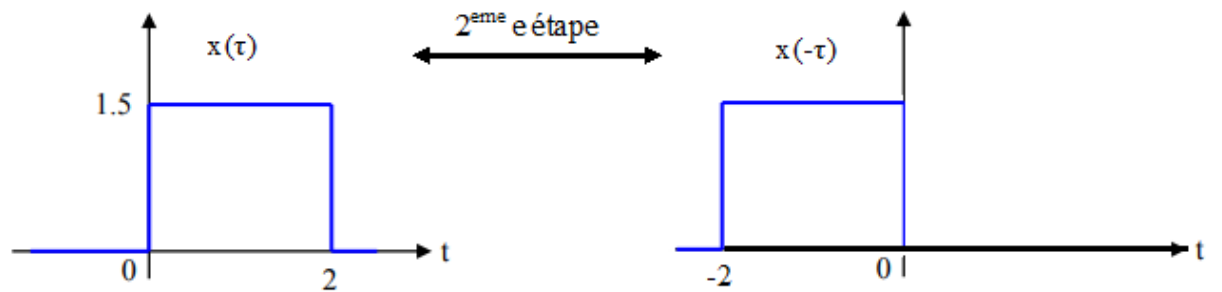
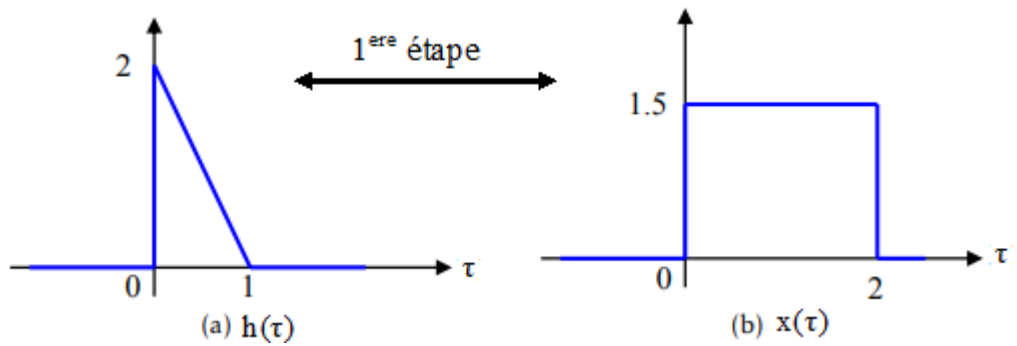
On peut énumérer les différentes étapes et opérations intervenant dans le produit de convolution :

1. la variable t est remplacé par τ .
2. On prend la symétrie de $f_2(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées $f_2(\tau) \rightarrow f_2(-\tau)$.
3. La fonction $f_2(-\tau)$ est ensuite translatée vers la droite d'une quantité t : $f_2(-\tau) \rightarrow f_2(t-\tau)$.
4. On fait le produit $f_1(\tau)$ par $f_2(t-\tau)$.
5. Le produit de convolution est une fonction du temps t , elle doit être évaluée pour $-\infty < t < +\infty$.

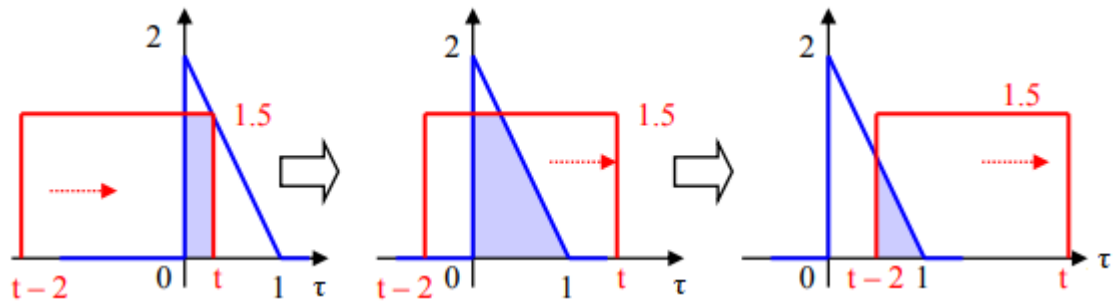
Exemple : soit les deux fonctions $h(t) = -2t + 2$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $x(t) = 1.5$ pour $0 \leq t \leq 2$



- Calculer $y(t) = h(t) * x(t)$



4^{ème} et 5^{ème} étape



Le calcul de la convolution se fait ensuite par intervalles.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } 0 < t < 2 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t (-2\tau + 2)(1.5)d\tau$$

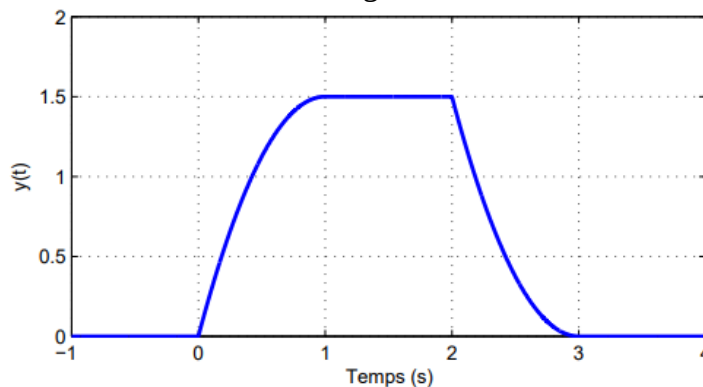
$$y(t) = 3t - 1.5t^2$$

$$2^{\text{eme}} \text{ cas : } 1 < t < 2 \Rightarrow y(t) = \int_0^1 (-2\tau + 2)(1.5)d\tau = 1.5$$

$$3^{\text{eme}} \text{ cas : } t > 2 \Rightarrow y(t) = \int_{t-2}^1 (-2\tau + 2)(1.5)d\tau = 1.5t^2 - 9t + 13.5$$

On peut vérifier les équations obtenues, puisque la convolution donne un graphe sans discontinuités.

Le graphe du résultat final est donné à la figure ci-dessous.



➤ Propriété du produit de convolution

$$1. \text{ Commutativité : } y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$2. \text{ Associativité : } y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

3. **Distributivité** : Cette propriété est la conséquence de la linéarité des intégrales.

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$

$$4. \text{ L'élément neutre } f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

9. Traitement du signal analogique

Un signal peut être associé à deux représentations contenant la même quantité d'information : représentation temporelle et représentation spectrale [3].

La représentation spectrale montre l'importance de la contribution d'une composante à la fréquence dans le signal $f(t)$.

On passe d'une représentation à l'autre par « transformation de Fourier ».

9.1 Série de Fourier

Une des méthodes les plus utiles dans l'analyse des signaux est la série de Fourier. La série de Fourier permet de transformer n'importe quel signal périodique en une somme de sinusoides. Le signal résultant est la somme de trois sinusoides dont la fréquence est chaque fois un multiple de la fondamentale f_0 . On peut donc prendre un signal périodique complexe et le simplifier à des sinusoides [4].

❖ Définition

Le mathématicien français Jean-Batiste Fourier découvrit qu'on pouvait transformer n'importe quel signal périodique en une somme de sinusoides. Donc, pour une fonction périodique quelconque $f(t)$, Fourier démontra qu'on pouvait faire l'équivalence suivante :

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (1)$$

Où a_v , a_n et b_n sont les coefficients de Fourier, et ω_0 est la fréquence fondamentale. Les fréquences qui sont des multiples entiers de ω_0 (comme $2\omega_0$, $3\omega_0$, etc.) sont nommés les harmoniques. Par exemple, $2\omega_0$ est la deuxième harmonique, $3\omega_0$ est la troisième harmonique et ainsi de suite.

Coefficients de Fourier

Les Coefficients de Fourier sont obtenus selon les équations suivantes :

$$a_v = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (4)$$

Remarque que a_v est la valeur moyenne du signal.

❖ Propriété

- 1- Si $f(t)$ est paire $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall t$
- 2- Si $f(t)$ est impaire $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall t$
- 3- Si on ajoute une constante à $f(t)$, c'est la valeur moyenne qui change et non pas a_n et b_n

9.2 La Transformée de Fourier

L'analyse harmonique d'un signal déterministe est l'instrument de base de la théorie et du traitement du signal. Cette analyse harmonique, obtenue par la transformation de Fourier, est une représentation spectrale des signaux. Elle exprime la répartition en fréquence de l'amplitude et de la phase de l'énergie ou de la puissance d'un signal. Il existe plusieurs formulations de cette transformation :

Tableau 1 : Sortes de transformées de Fourier.

Transformée	Temps	Fréquence
TF Transformée de Fourier classique	Continu Infini	Continue Infinie
TFD Transformée de Fourier Discrète	Discret Periodique	Discrète Periodique
TFTD Transformée de Fourier en Temps Discrète	Discret Fini	Continue Periodique

La transformée de Fourier classique s'applique aux expressions analytiques.

Elle s'agit d'un outil d'analyse "symbolique".

Elle est presque toujours calculée "à la main".

La Transformée de Fourier Discrète s'applique aux séquences numériques.

Elle est numérique et presque toujours calculer "par logiciel".

Elle transforme une séquence $x(n)$ de N échantillons, à une séquence $X(k)$ de N échantillons.

La Transformée de Fourier en Temps Discrète s'applique aux séquences numériques.

Elle permet d'exprimer la "fonction de transfert" d'une convolution.

Elle décrit un filtre comme une suite des exponentiels.

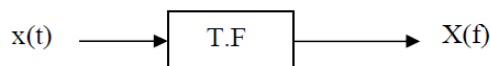
Elle peut être faite à la main pour les petites séquences, et par logiciel pour les grandes séquences.

A. Transformation de Fourier des fonctions

Transformation de Fourier permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation **spectrale**) des signaux déterministe, continus et non périodique. Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase et de l'énergie (ou de la puissance) des signaux considérés.

❖ Définition

Soit $x(t)$ un signal déterministe non périodique, sa transformée de Fourier est :



$$X(\omega) = \text{TF}\{x(t)\}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Remarque :

La transformée de Fourier d'un signal réel $x(t)$ est une fonction complexe $X(f)$ tel que :

$$X(\omega) = X_{re}(\omega) + j \cdot X_{im}(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Le module $|X(\omega)|$ est une fonction paire.

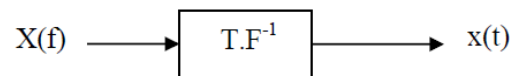
La phase $\varphi(\omega)$ est une fonction impaire.

-Le module est l'amplitude du spectre : $|X(\omega)| = \sqrt{X_{re}(\omega)^2 + X_{im}(\omega)^2}$

-L'argument $\varphi(\omega) = \arg(x(\omega)) = \text{Arctg}\left(\frac{X_{im}(\omega)}{X_{re}(\omega)}\right)$

B. La transformée inverse

La transformée inverse est obtenue par :



$$X(\omega) = \text{TF}^{-1}\{X(\omega)\}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Application

1. Calculer la transformée de Fourier de $x(t) = \text{rect}_T(t)$;
2. Représenter le spectre d'amplitude et de phase de $x(t)$.

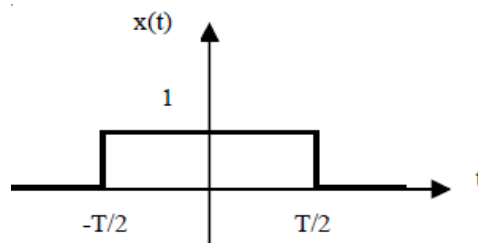


Figure 15: Représentation temporelle d'un signal rectangulaire.

Correction :

1. On applique directement la définition, on obtient :

$$X(\omega) = \text{TF}\{x(t)\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

2. représentation de $X(f)$:

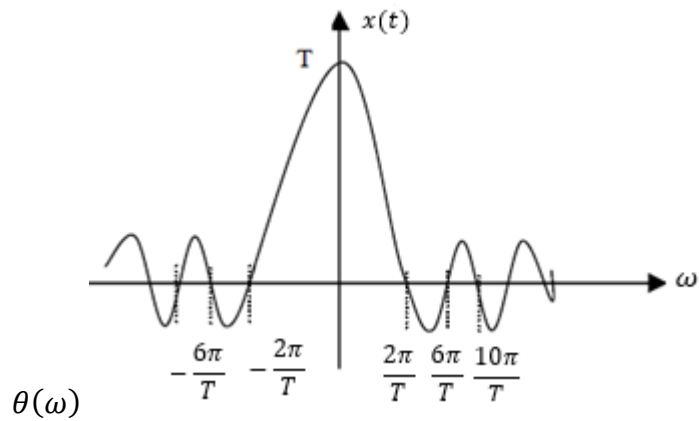
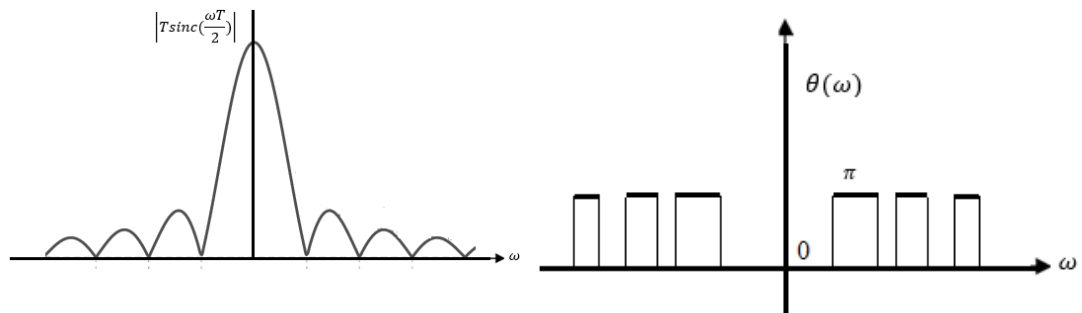


Figure 15 : Représentation spectrale d'un signal rectangulaire.

Spectre d'amplitude de signal $x(t)$

Spectre de phase de signal $x(t)$



C. Propriétés de la TF

Soit les deux signaux analogues : $s(t)$ et $r(t)$

	$x(t)$	$X(w)$
Linéarité	$\alpha \cdot s(t) + \beta \cdot r(t)$	$\alpha \cdot S(w) + \beta \cdot R(w)$
Décalage temporel	$s(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \cdot S(w)$
	$s(t + t_0)$	$e^{+j\omega t_0} \cdot S(w)$
Décalage fréquentiel	$e^{j\omega_0 t} \cdot s(t)$	$S(w - w_0)$
	$e^{-j\omega_0 t} \cdot s(t)$	$S(w + w_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S(-w)$
Dilatation	$s(a \cdot t)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{w}{a}\right)$
	$s\left(\frac{t}{a}\right)$ avec $a \neq 0$	$ a S(a \cdot w)$

Différentiation temporelle	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n S(\omega)$
Différentiation fréquentielle	$(-jt)^n \cdot s(t)$	$\frac{d^n S(\omega)}{d\omega^n}$
Dualité Symétrie	$S(t)$	$2\pi S(-\omega)$
Convolution Multiplication	$s(t) * r(t)$ $s(t) \cdot r(t)$	$S(\omega) \cdot R(\omega)$ $S(\omega) * R(\omega)$

Transformée de Fourier des signaux usuels (voir annexe B).

Cas particulier : Transformée de Fourier de Dirac

Le signal $s(t)$	Transformée de Fourier du signal $s(t)$: $S(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - \tau)$	$e^{-je^{-j\omega\tau}}$
$e^{-j\omega_0 t}$	$\delta(\omega + \omega_0)$

Application :

Calculer et représenter la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale $s(t)$ d'amplitude S et de fréquence f_0 telle que : $s(t) = A \cos(\omega_0 t)$ en utilisant les propriétés de Fourier.

Correction :

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t) = A \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) \xrightarrow{TF} S(\omega) = \frac{A}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{A}{2} \delta(\omega + \omega_0)$$

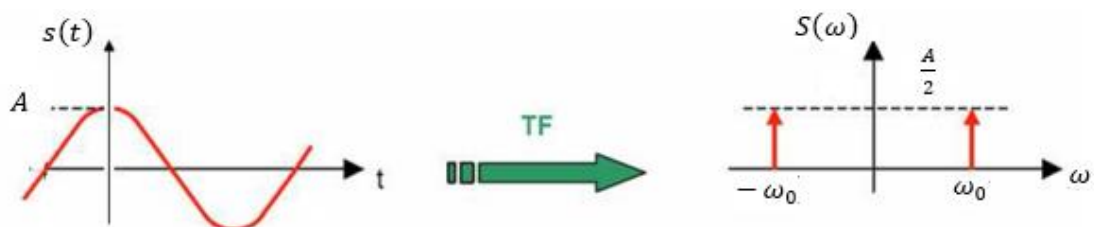


Figure 16 : Représentation temporelle et fréquentielle du signal cosinus.

Remarque :

✓ La transformée de Fourier d'une fonction cosinus de fréquence f_0 et d'amplitude S , est la somme de deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences $-f_0$ et $+f_0$; et d'amplitude la moitié de celle du signal : $S/2$.

✓ La transformée de Fourier d'une fonction sinus de fréquence f_0 et d'amplitude S , est la somme de deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences $-f_0$ avec une amplitude $S/2$ et sur $+f_0$ avec une amplitude $-S/2$.

10. Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval permet de faire le lien entre l'énergie d'un signal en fonction du temps et l'énergie en fonction de la fréquence. Puisque la fréquence et le temps sont deux domaines qui permettent de décrire complètement un signal, il faut que l'énergie totale soit la même dans les deux domaines [5]. Le théorème de Parseval est :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

11. Questions

1/ qu'avez-vous compris ?

- Quelles sont les différences entre les signaux déterministes et les signaux aléatoires ?

- Donner un exemple de signaux à : énergie finie et infinie.

2/ à découvrir

-Quelles sont les différences entre les signaux suivants :

Signal basse fréquence et signal à bande étroite

Signal haute fréquence et signal à large bande.

Chapitre 2 : Echantillonnage des signaux analogiques

La plupart des signaux physique sont de nature analogique. Il est très utile, dans de nombreuses applications, de les échantillonner.

1. Introduction

L'importance des systèmes numériques de traitement de l'information ne cesse de croître (radio, télévision, téléphone, instrumentation...). Ce choix est souvent justifié par des avantages techniques tels que la grande stabilité des paramètres, une excellente reproductibilité des résultats et des fonctionnalités accrues. Le monde extérieur étant par nature ‘analogique’, une opération préliminaire de conversion analogique numérique est nécessaire [6]. La conversion analogique numérique est la succession de trois effets sur le signal analogique de départ :

- l'échantillonnage pour rendre le signal discret
- la quantification pour associer à chaque échantillon une valeur
- le codage pour associer un code à chaque valeur.

2. Echantillonnage

2.1 Définition

L'échantillonnage d'un signal continu est l'opération qui consiste à prélever des échantillons du signal pour obtenir un signal discret (prélever à des instants précis, les valeurs instantanées d'un signal), c'est-à-dire une suite de nombres représentant le signal, dans le but de mémoriser, transmettre, ou traiter le signal.

$$s_e(t) = s(n.T_e) \text{ avec } n \text{ entier}$$

T_e : période d'échantillonnage

Cette opération est réalisée par un échantillonneur souvent symbolisé par un interrupteur (voir Figure 1).

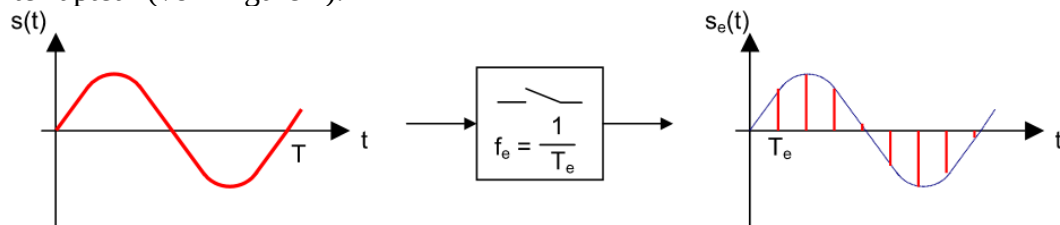


Figure 1 : Obtention d'un signal échantillonné.

2.2 Echantillonnage idéal

L'échantillonnage idéal est modélisé par la multiplication du signal continu $s(t)$ et d'un peigne de Dirac de période T_e .

$$S_e(t) = s(t) \cdot \delta_{T_e} = s(t) \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = s(nT_e) \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

➤ Le spectre du signal échantillonné est donc le suivant :

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - nf_e)$$

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - nf_e)$$

On obtient donc un spectre infini qui provient de la périodisation du spectre du signal d'origine autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e avec $f_e = \frac{1}{T_e}$.

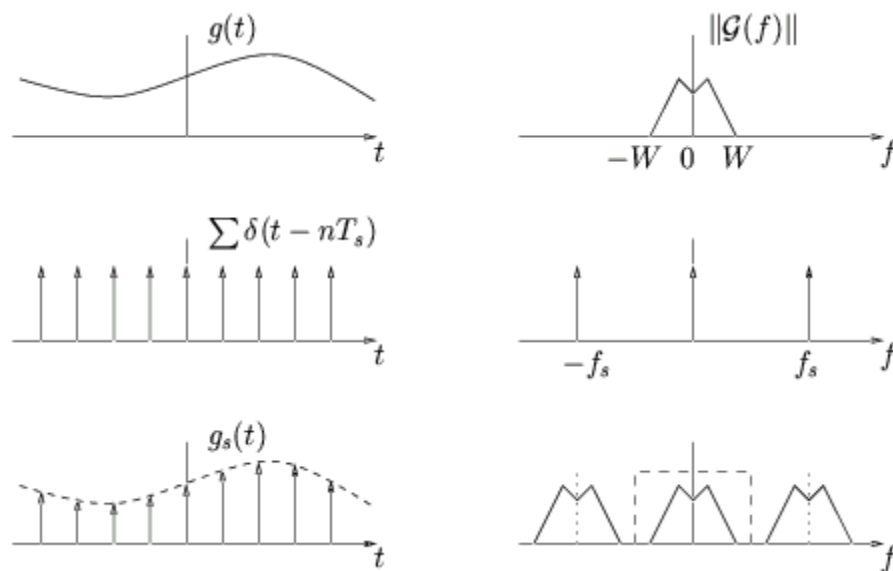


Figure 2 : Echantillonnage instantané.

Remarque :

- On voit sur le spectre du signal échantillonné qu'il est possible de restituer le signal original par un simple filtrage passe-bas.
- Si f_M , la fréquence maximale du spectre du signal à échantillonner, est supérieure à $f_e/2$, la restitution du signal original sera impossible car il va apparaître un recouvrement spectral (chevauchement ou repliement de spectre) lors de l'échantillonnage. On dit qu'on est en sous-échantillonnage.

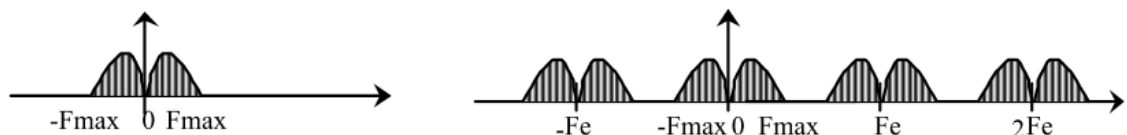


Figure 3 : sans recouvrement spectral.

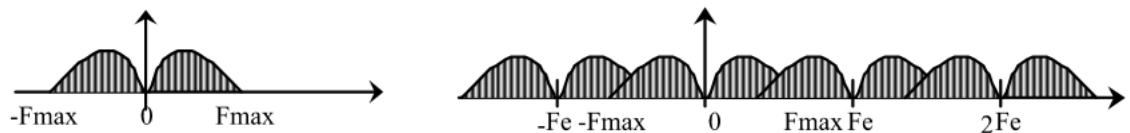


Figure 4 : avec recouvrement spectral.

2.3 Théorème de Shannon

Ce théorème montre que la reconstitution correcte d'un signal nécessite que la fréquence d'échantillonnage f_e soit au moins deux fois plus grande que la plus grande des fréquences f_M du spectre du signal :

$$f_e > 2 f_M$$

Lorsqu'il y a recouvrement spectral, nous avons vu qu'il était impossible de reconstruire correctement le signal. Pourtant dans la plupart des situations, le spectre du signal à échantillonner s'étale sur tout le domaine des fréquences (tout en diminuant du côté des hautes fréquences), mais il n'existe pas une fréquence $f_{\max}$ au-delà de laquelle l'énergie est nulle.

Il y a donc un problème pour choisir la fréquence d'échantillonnage. On se fixe donc en pratique une $f_{\max}$ à partir de laquelle on estime la représentation de notre signal satisfaisante pour les applications que l'on veut en faire. Puis on effectue un filtrage passe-bas (à $f_{\max}$) avant l'échantillonnage afin de remédier aux repliements de spectre. On appelle ce filtre un filtre antirepliement.

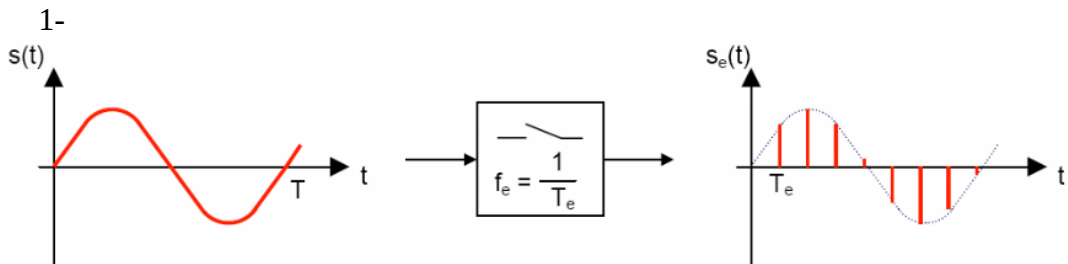
❖ Application

Soit le signal sinusoïdal $s(t) = \sin(2\pi F t)$ de période $T = 1$ ms.

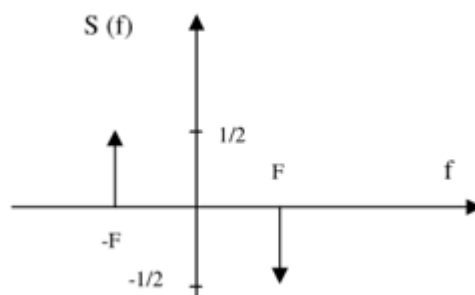
$s_e(t)$ le signal échantillonné avec un pas d'échantillonnage $T_e = 0.1$ ms.

- 1- Représenter le signal $s(t)$ et $s_e(t)$ pour une période T .
- 2- Soit $S(f)$ la transformée de Fourier de $s(t)$ telle que $S(f) = \frac{1}{2j}[\delta(f - F) - \delta(f + F)]$.
 - a. Représenter $S(f)$.
 - b. Donner l'expression de la transformée de Fourier de $s_e(t)$: $S_e(f)$.
 - c. Représenter $S_e(f)$ pour $-2 \leq n \leq 2$.

Réponse :



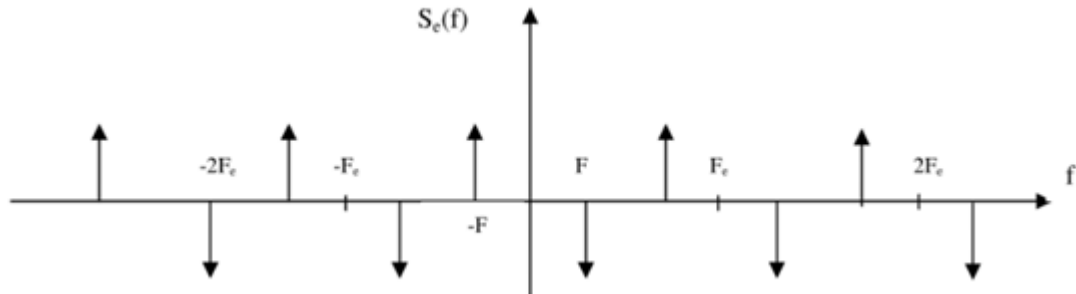
- 2- a- On a $S(f) = \frac{1}{2j}[\delta(f - F) - \delta(f + F)]$ d'où $S(f) = \frac{1}{2j}[\delta(f + F) - \delta(f - F)]$



b- l'expression de $S_e(f)$:

$$S_e(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} F_e S(f - n f_e)$$

C-



3. Reconstitution d'un signal analogique à partir de sa version échantillonnée

Nous savons évidemment que l'opération d'échantillonnage peut amener une perte d'information. Cela est vrai lorsque la condition de Shannon n'est pas vérifiée. Mais lorsque cette condition est vraie, nous voulons savoir s'il est possible de reconstruire par interpolation le signal $x(t)$ sans perte d'information.

La réponse est oui. Nous décidons de filtrer le signal échantillonné par un filtre idéal en fréquence. Sa représentation est la porte $\Pi_{F_e}(t)$. La sortie de ce filtre a pour réponse en fréquence le produit simple de la réponse en fréquence de l'entrée (signal échantillonné) et du filtre. Sous la condition de Shannon, il n'y a pas de repliement de spectre et nous retrouvons la réponse en fréquence du signal $s(t)$ à un facteur multiplicatif près F_e .

Solution : pour reconstruire le signal, il suffit de prendre la TF inverse du motif de base de $X_e(f)$.

- Diviser par F_e
- Filtrage passe bas idéal
- Puis TF inverse

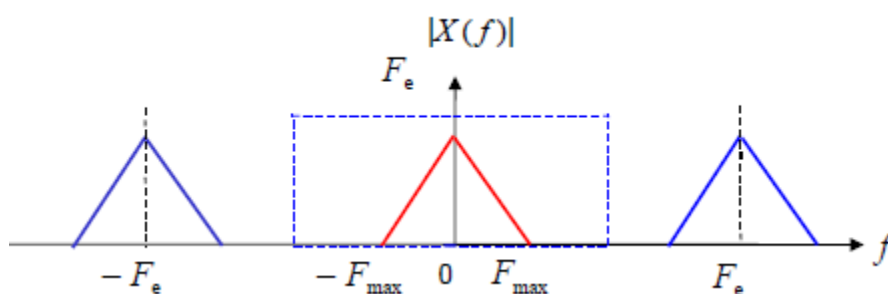
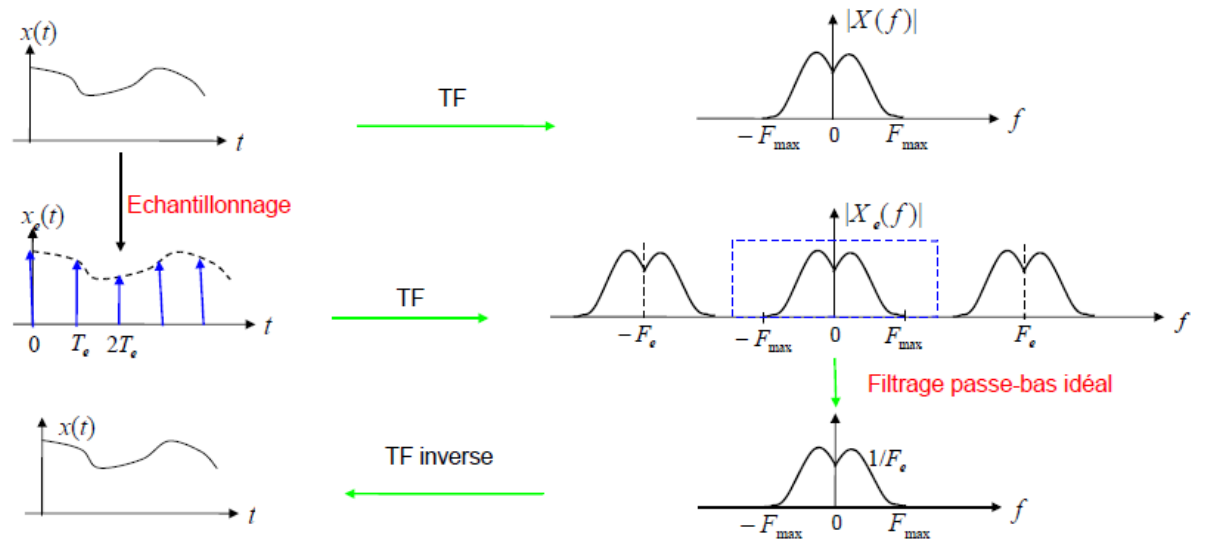


Illustration :



La reconstruction mathématiquement du signal analogique est possible, mais physiquement est irréalisable car le filtre passe-bas idéal n'est pas causal (la réponse impulsionnelle $h(t)$ est anticausal), c'est-à-dire que le filtre n'est pas réalisable et la reconstruction n'est qu'approximative.

Chapitre 3 : Signaux discrets

1. Définition

le signal discontinu : vu les avantages du numérique, on est censé d'étudier ces signaux discrets appelés aussi numériques. Nous rappelons que les signaux analogiques sont continus par rapport au temps mais lorsqu'on dit qu'un signal est discontinu, il faut remarquer qu'ici la discontinuité concerne l'amplitude du signal, on nomme ce type de signaux : les signaux discrets ou numériques [7].

L'échantillonnage est un moyen de discrétiser le signal analogique $x(t)$ en signal discret $x(t_n)$ ou $x(n)$ ou x_n , il est défini comme suit :

$$t \in \{t_1, t_1, \dots, t_n\} \quad x(t_n) = x(n) = x_n$$

Nous rappelons que dans l'échantillonnage :

$$t_n = nT_e \\ t_{n+1} - t_n = T_e, \quad \forall n$$

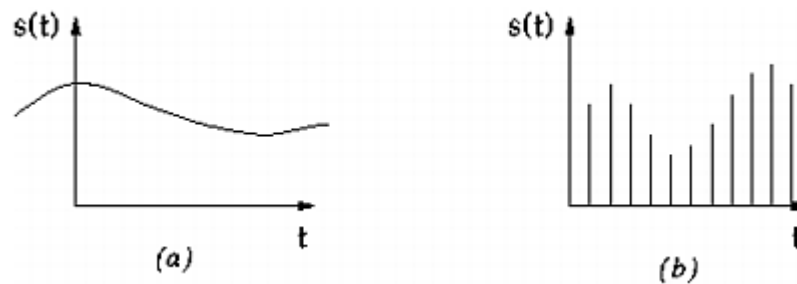


Figure 1: (a) Signal continu, (b) Signal discret.

2. Signaux discrets usuels

Il existe des signaux définis par des chiffres, des tableaux, des mesures par exemple :

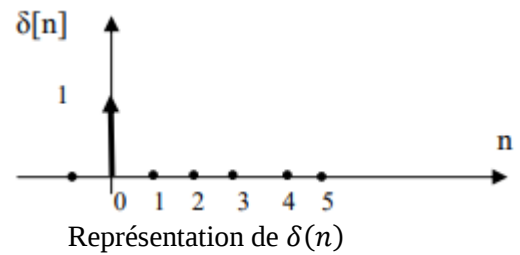
N	-2	-1	0	1	2
x	2.1	2.1	2.1	2	2.1
n	35	24	28	.134	44

Aussi des signaux définis par des équations par exemple : $x_n = 1 + 3.n$

3. Signaux discrets usuels

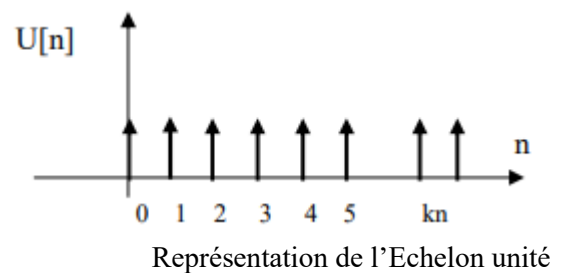
3.1 Impulsion de Dirac

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{ailleurs } n \neq 0 \end{cases}$$



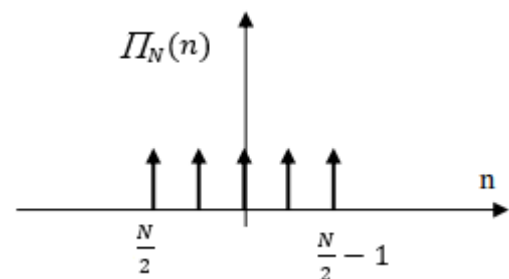
3.2 Echelon unitaire

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs } n < 0 \end{cases}$$



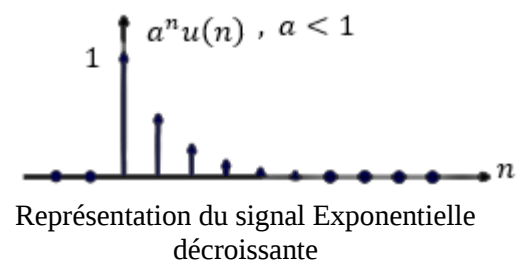
3.3 Fenêtre rectangulaire

$$\Pi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



3.4 Exponentielle décroissante

$$x(n) = a^n u(n), \quad a < 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$



4. Opérations sur les signaux discrets

Soit un signal discret $\{x(n)\} = \{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$, la multiplication par un scalaire, le décalage temporel, la somme et le produit 2 à 2 de signaux discrets sont de signaux discrets:

$$\checkmark \quad a\{x(n)\} = \{ax(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- ✓ $\{x(n)\} + \{y(n)\} = z(n) = \{x(n) + y(n), n \in \mathbb{Z}\}$
- ✓ $\{y(n)\} = \{z(n - n_0), n \in \mathbb{Z}\}$
- ✓ $\{x(n)\} \cdot \{y(n)\} = z(n) = \{x(n) \cdot y(n), n \in \mathbb{Z}\}$

Remarque:

La somme de deux signaux periodique n'est pas fortement periodique. Dans le cas où la somme ne donne pas un signal periodique, les signaux sont dits de periode incommensurable, c'est-à-dire dont elle n'est pas rationnelle. Tels signaux sont des signaux quasi-périodiques ou pseudo-periodique.

5. Énergie et puissance de signaux discrets

- ✓ Énergie d'un signal discret: $E_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$
- ✓ Puissance d'un signal discret: $P_n = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} |x(n)|^2$

Exemple : Puissance de l'échelon unité discret $u(n)$:

$$P_n = \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} |1|^2 = \frac{1}{2}$$

6. Transformée de Fourier des signaux à temps discret (TFTD)

La Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) joue pour les signaux numériques le rôle de la transformée de Fourier pour les signaux à temps continue.

6.1 Définition

Un signal discret est défini par une suite d'échantillons espacés entre eux d'une période T_e . La transformée de Fourier appliquée à un signal discret $x(n)$ devient :

$$x(n) \rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi \frac{n f}{F_e}} \quad (1)$$

f et ω sont deux variables continus, donc, la TF d'une fonction discrète est une fonction continue.

6.2 Périodicité

La TFTD est une fonction périodique de période 1 (du fréquence continue. En effet:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi n f} \quad (2)$$

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi n(f+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}e^{-j2\pi n} \quad (3)$$

Où $e^{-j2\pi n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

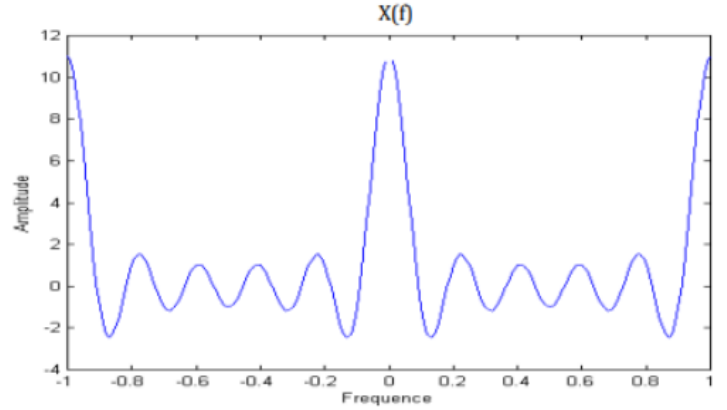
$$X(f+1) = X(f) \quad (4)$$

Donc, il est usage de la représenter sur un intervalle de la longueur 1, à savoir $f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ou $(0,1)$.

6.3 Exemple de la TFTD

Soit $x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

On a : $X(f)$ est la somme de $N+1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{-j\pi Nf}$ et de premier terme $e^{j\pi Nf}$



$$\begin{aligned} X(f) &= e^{j\pi Nf} \frac{1 - e^{-j2\pi(N+1)f}}{1 - e^{-j2\pi f}} = \frac{e^{-j\pi f} (e^{j\pi(N+1)f} - e^{-j\pi(N+1)f})}{e^{-j\pi f} (e^{j\pi f} - e^{-j\pi f})} \\ &= \frac{\sin(\pi f(N+1))}{\sin(\pi f)} \end{aligned}$$

7. La transformée de Fourier inverse à temps discret

Si cette série (1) converge, la transformée de Fourier inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{+F_e/2} X(f) e^{j2\pi \frac{nf}{F_e}} \quad (5)$$

Remarque

On vérifie bien que $X(f)$ est une fonction périodique de période F_e (à cause de l'échantillonnage). Si on remplace f par $f + kF_e$:

$$e^{-j2\pi \frac{n(f+kF_e)}{F_e}} = e^{-j2\pi \frac{nf}{F_e}} + e^{-j2\pi \frac{nkF_e}{F_e}} = e^{-j2\pi \frac{nf}{F_e}} \quad (6)$$

8. Formule de Poisson

Spectre d'un signal échantillonné idéalement

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi \frac{nf}{F_e}} \quad (7)$$

Le spectre d'un signal échantillonné idéalement est continu et périodique de période

$$f_e = \frac{1}{T_e}$$

$$S(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_e) \quad (8)$$

Echantillonnage → Périodisation du spectre

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi \frac{nf}{T_e}} = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_e) \quad (9)$$

9. Propriétés

	x[n]	X(f)
Linéarité	$\alpha \cdot x(n) + \beta \cdot y(n)$	$\alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$
Translation	$x(n - k)$	$e^{-2j\pi \frac{kf}{T_e}} \cdot X(f)$
	$e^{2j\pi f_0} \cdot x(n)$	$X(f - f_0)$
Convolution	$x(n) * y(n)$	$X(f) \cdot Y(f)$
	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} X(f) * Y(f)$

10. Egalité de Parseval

$x(t) \rightarrow X(\omega)$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (10)$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega \quad (11)$$

$$S(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{2} \quad (12)$$

$S(\omega)$ étant la densité spectrale d'énergie du signal $x(n)$.

$S(\omega + 2\pi) = S(\omega)$ donc la densité spectrale d'énergie est aussi périodique de période 2π .

11. de la TFTD à la TFD

➤ La TF fonctionne sur un signal à temps discret. Mais en fréquence continue,
 ⇒ on perd l'avantage du numérique !

Si on veut calculer la TFTD à l'aide d'un ordinateur, les difficultés rencontrées sont :

➤ Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$ (pas toujours possible)

- Le calculateur ne peut calculer une TFTD (f varie continûment) $\Rightarrow$ un nombre fini de points fréquentiels, La solution est **la Transformée de Fourier Discrète**.

11.1 Transformée De Fourier Discrète (TFD)

- Limiter la durée de $x(n)$ c.à.d considérer un nombre fini N de points temporels
- Discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini L de points fréquentiels)

Soit $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ un signal discret de durée finie N . Sa TFD est :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi fn} \quad (13)$$

La discrétisation de la fréquence sur L points : $X(f)$ est périodique de période 1, donc : $f = k\Delta f$ avec $\Delta f = \frac{1}{L}$, donc l'approximation discrète de la TFD ($f = \frac{k}{L}$) de ce signal est:

$$X\left(\frac{k}{L}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{k}{L}n} \quad (14)$$

n est la variable temporelle $n = 0, \dots, N-1$ et k est la variable fréquentielle $k = 0, \dots, L-1$ Notation: $X\left(\frac{k}{L}\right) = X(k)$ avec $k = 0, \dots, L-1$

11.2 Définition

La TFD évaluée sur un nombre L points fréquentiels d'un signal discret est définie par:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{k}{L}n} \quad (15)$$

N : nombre de points temporels

n : variable temporelle $n = 0, \dots, N-1$

L : Nombre de points fréquentiels

k : variable fréquentielle $k = 0, \dots, L-1$

$X(k)$ est périodique de période L

Remarque : $\tilde{x}(n)$ est une suite périodique de période L .

La discrétisation de $X(k)$ a entraîné une périodisation de $x(n)$.

Dans la suite, on considérera $L = N$.

On a vu avec la TFD que : Discrétisation en temporel $\Rightarrow$ Périodisation en fréquentiel

Ici avec la TFD :

Discrétisation en fréquentiel $\Rightarrow$ Périodisation en temporel

Exemple Soit le signal $x(n) = 1$ pour $n = 0$ et $n = 3$ et 0 ailleurs.

- Calculons d'abord la TFTD, ce qui nous donne :

$$X_e(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi f n T_e}$$

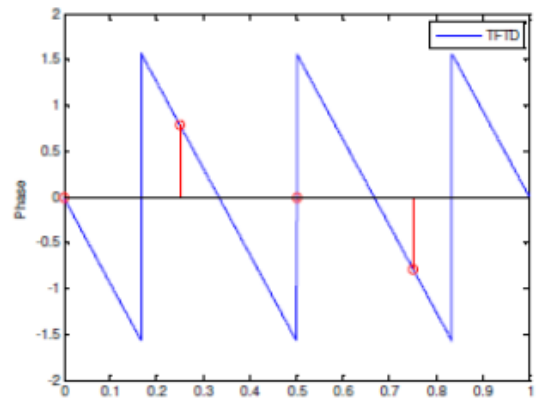
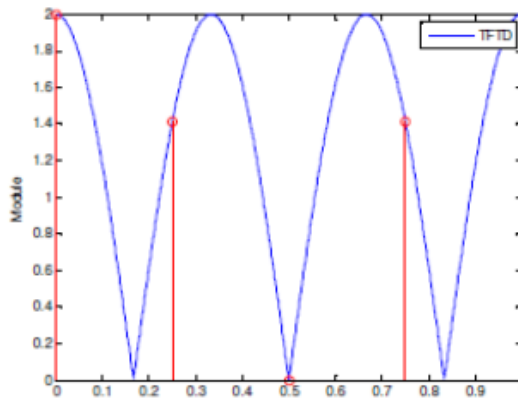
$$1 + e^{-j2\pi f n T_e} = 2 \cdot \cos(3\pi T_e) e^{-j3\pi f T_e}$$

- Calculons maintenant la TFD sur $N=4$ échantillons (4 échantillons de la TFD à partir de 4 échantillons du signal) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{4} n}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{4} n} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 2 \\ x(0) + x(1)e^{-j\frac{\pi}{2}} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{2}} + x(3)e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) e^{-j\frac{3\pi}{4}} \\ x(0) + x(1)e^{-j\pi} + x(2)e^{-j2\pi} + x(3)e^{-j3\pi} = 2 \cdot \cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) e^{-j\frac{3\pi}{2}} \\ x(0) + x(1)e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x(2)e^{-j3\pi} + x(3)e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(9\frac{\pi}{4}\right) e^{-j\frac{9\pi}{4}} \end{cases}$$

Les modules des 4 échantillons de $X(k)$ sont : $2, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$



On peut observer que les quatre échantillons de la TFD (en rouge) se superposent à la courbe de la TFD (en bleu). On confirme que la TFD n'est que l'échantillonnage de la TFD limitée à N . On note en outre, que la précision fréquentielle est de $\Delta f = f_e/N$. Pour améliorer cette précision, il faudrait diminuer le pas en fréquence.

❖ TFD d'un signal périodique (voir l'annexe C)

Soit $x_p(n)$, un signal périodique de période N .

Pour calculer sa TFD, on se restreint à une période N .

- La TFD : $X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi \frac{k}{L} n}$
- La TFD inverse: $x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{+j2\pi \frac{k}{L} n}$

Si $x(n)$ est une suite périodique de période N , $x(n)$ coïncide exactement avec $x_p(n)$.
Ce qui n'est pas le cas pour un signal quelconque !

12. ! FFT " : Fast Fourier Transform

Pour des signaux de grande dimension, cette complexité implique que la DFT est très lente, c'est pour cela que la transformée de Fourier a été utilisée presque seulement dans un cadre théorique, plutôt que dans les applications, jusqu'aux années 60 du XX siècle. Heureusement, Cooley et Tukey, en 1965, ont utilisé des symétries cachées dans la DFT pour construire un algorithme rapide pour le calcul de la DFT, ils ont appelé l'algorithme Fast Fourier Transform ! FFT ".

En particulier, la FFT est très efficace quand la dimension des signaux est une puissance de 2. Cela explique pourquoi le format typique des images numériques est de 512 ou 1024, comme ceci on peut manipuler ces images efficacement avec la FFT. Le développement de la FFT est considéré comme une des plus grandes avancées scientifiques du XX^{ème} siècle, car il a permis d'utiliser dans une quantité énorme d'applications pratiques la transformée de Fourier [8].

Chapitre 4 : Processus aléatoires

1. Généralités

Certains phénomènes complexes ne peuvent être décrits par des équations déterministes. On a alors recours à une modélisation aléatoire qui pourra permettre d'exploiter, de manière statistique, l'information du signal. La notion d'aléatoire est basée sur le concept de non-reproductibilité du phénomène étudié : deux expériences faites dans les mêmes conditions ne conduisent pas strictement au même résultat, mais on observe néanmoins certaines similitudes (tendances et évolutions analogues, fluctuations analogues etc.). De tels signaux sont aussi appelés non prédictibles : la connaissance du passé ne permet de prédire sans erreur l'avenir, même si la modélisation aléatoire permet d'effectuer des prévisions assorties d'une erreur calculable en moyenne (prédiction de température...).

2. Rappel sur les variables aléatoires

Une variable aléatoire X est une application définie sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire Ω (une famille de variables aléatoires indexées par le temps t) [9].

Elle est caractérisée par une **fonction de répartition** F_x qui est la probabilité pour que X soit inférieure ou égale à un réel x (le temps est fixé à $t=t_i$, donc on a une VA):

$$F_X = \text{prob}(X \leq x) \quad (1)$$

- **Densité de probabilité**

La densité de probabilité d'une variable aléatoire X est par définition la dérivée de la fonction de répartition.

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2)$$

L'intégral de la densité de la probabilité de $-\infty$ à x_1 donne la fonction de répartition

$$F_X = \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x) dx \quad (3)$$

La densité de probabilité est une fonction toujours normée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X dx = 1 \quad (4)$$

- **Esperance mathématique**

$$E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (5)$$

- **Moyenne, ou moment d'ordre 1**

$$m_{X_1}(t) = E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1 f_X(x) dx \quad (6)$$

- **Le moment d'ordre K est définis par**

$$m_X(t) = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f_X(x) dx \quad (7)$$

La variance de X est définie par :

$$\sigma_x^2(t) = \text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (8)$$

3. Signaux aléatoires

- **Définition**

Un signal aléatoire (ou processus stochastique) est un signal qui ne se répète pas à l'identique lorsque l'on réitère l'expérience qui le produit dans les mêmes conditions.

On le note $X(t, \omega)$ ou ω est une épreuve (variable aléatoire qui traduit un tirage aléatoire).

$X(t, \omega_i)$ est une réalisation de $X(t, \omega)$ pour un tirage particulier ω_i .

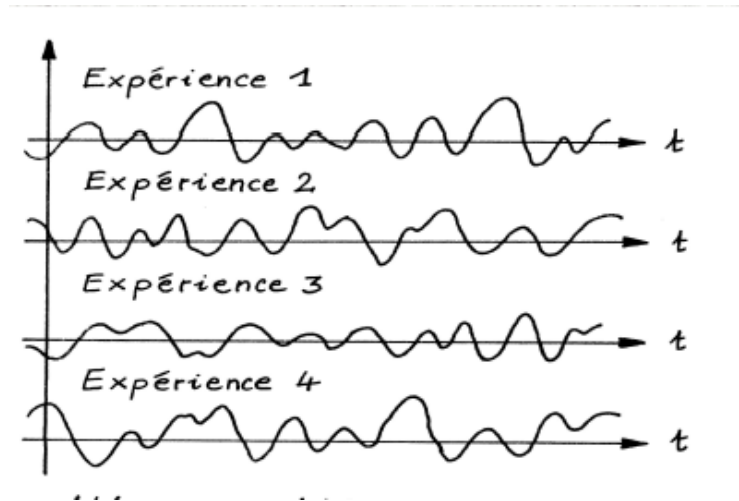
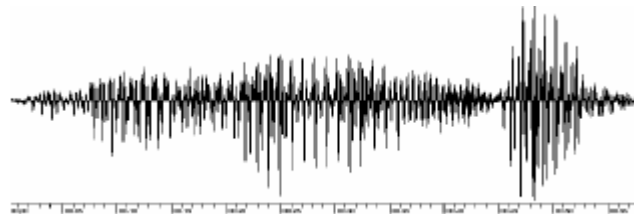
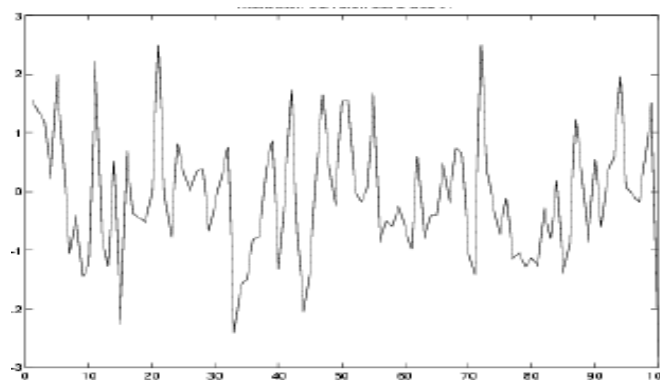


Figure 1 : Processus stochastique.

Exemple : le signal de parole



- **Le Bruit blanc**= séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées



Un processus aléatoire, décrivant un signal aléatoire est dit **stationnaire** si les propriétés statistiques (moyenne, écart type, etc.) sont indépendantes du choix de l'origine du temps.

Il est plus aisé d'obtenir une expérimentation d'un processus sur un temps long que plusieurs épreuves de ce processus lié à un même phénomène physique. Le processus est dit ergodique si les moyennes sur plusieurs réalisations sont équivalentes à des moyennes temporelles correspondant à une épreuve [10].

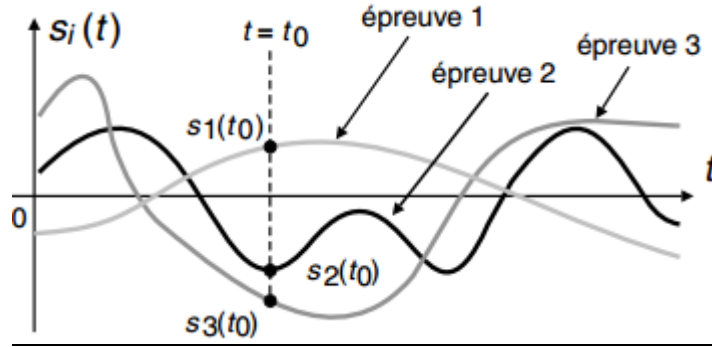


Figure 2 : Réalisation d'un signal aléatoire provenant de plusieurs épreuves.

4. Stationnarité et érgodisme

4.1 Stationnarité

• Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire

Soit un signal aléatoire X défini par sa loi de distribution ou loi de probabilité $f(x)$ est considéré comme stationnaire, nous pouvons caractériser ce signal avec les paramètres statistiques suivants :

La densité de probabilité ddp : $f_x(x, t_i) = P(X \leq x) = \int_a^b f(x) dx$
(9)

Cela implique que l'intégrale de $f(x)$ sur tout $\mathbb{R}$ donne 1.

- La moyenne statistique

$$m_X(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X f_X(x) dx \quad (10)$$

- La valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2

$$E(X^2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f_X(x) dx \quad (11)$$

- La variance

$$\sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [X(t) - E(X(t))]^2 f_X(x) dx = E[(X(t) - m_X(t))^2] \quad (12)$$

- Ecart type :

$$\sigma_x = \sqrt{E[(X(t) - m_X(t))^2]} \quad (13)$$

La fonction d'autocorrélation statistique : cette fonction, noté $R_x(t_1, t_2)$ est une indication sur la liaison statistique entre les valeurs du signal aléatoire x et y mesurées à deux instants séparés t_1 et t_2 :

$$R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_1)X(t_2)}(x, y) dx dy \quad (14)$$

4.2 Ergodicité

Signaux stationnaires (signaux ergodiques ou non ergodiques) lorsque la valeur moyenne est indépendante du temps. Ils sont ergodiques s'il est identique de faire une moyenne statistique à un instant donné sur plusieurs échantillons ou une moyenne temporelle suffisamment longue sur un seul de ces essais.

❖ Un signal aléatoire stationnaire est dit ergodique si

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) f_X(x, t) dx \\ &= \mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t, \omega) dt = \overline{X(t, \omega)} \end{aligned} \quad (15)$$

Cette hypothèse d'ergodique est cependant difficile à vérifier. On admettra fréquemment que les processus aléatoires usuels sont ergodiques.

- Moyenne temporelle

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t) dt \equiv m_x \quad (16)$$

- Puissance du signal

$$P = \overline{X^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X^2(t) dt \equiv E[X^2] \quad (17)$$

Puissance des variations par rapport à la moyenne :

$$P_{m_x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [X(t) - \overline{X(t)}]^2 dt = P - \overline{X^2(t)} \equiv \sigma_x^2 \quad (18)$$

La fonction d'autocorrélation temporelle $C_{ss}(\tau)$

$$C_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t) \cdot X(t - \tau) dt \quad (19)$$

5. Questions

1. Quelle condition doit vérifier une fonction f pour être densité de probabilité d'une variable aléatoire continue ?
2. Quel est le lien entre densité et fonction de répartition ?
3. Connaissant la fonction de répartition F de X , comment calculer $p(a < X < b)$?
4. Quelles formules permettent de calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue X de densité f ?

Chapitre 5 : Signaux et systèmes

1. Systèmes linéaires et stationnaires

1.1 L'analyse de systèmes

Un système est caractérisé par ses relations d'entrée et sortie tel qu'indique à la figure 1 où $x(t)$ est le signal à l'entrée et $y(t)$ est le signal à la sortie du système. Le système peut représenter plusieurs choses, e.g., un circuit, un processus chimique, etc. Nous pouvons identifier les descriptions suivantes d'un système :

- Linéarité ;
- Invariance dans le temps ;
- Mémoire ;

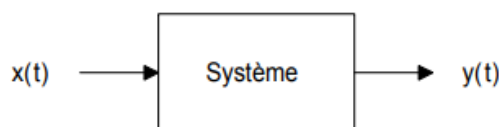


Figure 1 : Système.

- Causalité ;
- Stabilité ;

1.2 Linéarité

Supposons que la sortie d'un système est $y_1(t)$ quand l'entrée est $x_1(t)$, et que la sortie est $y_2(t)$ quand l'entrée est $x_2(t)$. Nous disons que le système est **linéaire** si et seulement si la sortie est:

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) \quad (1)$$

quand l'entrée est la combinaison linéaire suivante:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (2)$$

Nous appelons cette propriété la superposition :

$$x(t) = \sum_i a_i x_i(t) \text{ correspond la réponse } y(t) = \sum_i a_i y_i(t)$$

Exemple

$$y(t) = Rx(t).$$

Cette équation peut représenter une sortie qui est la tension sur une résistance ayant pour entrée un courant $x(t)$. Pour l'entrée $x_1(t)$, la sortie est $Rx_1(t)$, et, pour l'entrée $x_2(t)$ la sortie est $Rx_2(t)$.

Quelle est la sortie pour $ax_1(t) + bx_2(t)$? La sortie est R fois l'entrée, ou $R[ax_1(t) + bx_2(t)]$ que nous pouvons écrire comme :

$$R[ax_1(t) + bx_2(t)] = aRx_1(t) + bRx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t).$$

Donc, c'est bien un système linéaire.

Exemple (Contre exemple)

$$y(t) = x^2(t).$$

Cette équation peut représenter une sortie qui est le courant d'une photodiode ayant pour entrée les photons incidents $x(t)$. Pour l'entrée $x_1(t)$, la sortie est $x_1^2(t)$, et, pour l'entrée $x_2(t)$ la sortie est $x_2^2(t)$. Quelle est la sortie pour $ax_1(t) + bx_2(t)$? La sortie est l'entrée au carré, donc:

$$y(t) = [ax_1(t) + bx_2(t)]^2 = a^2x_1^2(t) + b^2x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ \neq ay_1(t) + by_2(t)$$

Donc, ce système n'est pas linéaire.

1.3 L'invariance dans le temps

Un système est dit **invariant dans le temps** (ou **stationnaire**) si son comportement se reproduit de façon identique dans le temps. Nous disons que le système est stationnaire si et seulement si la sortie est $y(t - \tau)$ quand l'entrée est une version d'écalée de l'entrée $x(t)$, soit $x(t - \tau)$.

Exemple

$$y(t) = ax(t)$$

Prenons le cas d'un amplificateur idéal. Le signal d'entrée $x(t)$ est associé au signal de sortie $y(t) = ax(t)$ (avec $a > 1$). Ce système est clairement stationnaire.

Exemple (Contre exemple)

$$y(t) = x(t)\sin(t)$$

Quand l'entrée est $x(t)$, la sortie est $y(t) = x(t)\sin(t)$. Si l'entrée est d'écalée la sortie sera $x(t - \tau)\sin(t)$ qui n'est pas égal à :

$$y(t)|_{t-\tau} = x(t - \tau)\sin(t - \tau)$$

Donc ce système n'est pas stationnaire.

1.4 Mémoire

Un système n'a pas de mémoire si la sortie au temps $t = t_0$ est une fonction de l'entrée au temps $t = t_0$, et si la sortie au temps $t = t_0$ n'est pas une fonction de l'entrée pour $t \neq t_0$.

Système sans mémoire : Un système sera dit sans mémoire si sa sortie à l'instant t ne dépend que de l'entrée au même instant.

Exemple

$$y(t) = Rx(t)$$

Cette équation peut représenter une sortie qui est la tension sur une résistance ayant pour entrée le courant $x(t)$. La tension est le courant multiplié par une résistance, et n'est pas influencée par le courant avant ou après.

Exemple (Contre exemple)

$$y(t_0) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t_0} x(z) dz$$

Cette équation peut représenter une sortie qui est la tension sur un condensateur avec un courant $x(t)$ pour entrée. La tension est une fonction du courant antérieur, i.e., $x(t)$ pour $t < t_0$.

1.5 Causalité

Un système est dit causal si la sortie à l'instant t ne dépend de l'entrée que pour des instants $t \leq t_0$, i.e., la sortie un instant donné ne dépend pas d'un instant futur. Cette propriété est souvent requise pour qu'un système physique analogique soit réalisable.

Cependant nous verrons que pour un signal numérique, cette contrainte peut être contournée car si le système est non causal cela suppose juste que le système peut être réalisable au prix d'un délai de traitement avec stockage des échantillons.

1.6 Stabilité

Un système est dit stable si une petite entrée n'engendre pas de gros changements (entrée bornée correspond une réponse bornée). Pour M1 et M2 fini, nous avons que :

$$|x(t)| < M_1 \Rightarrow |y(t)| < M_2 \quad (3)$$

1.7 Réponse impulsionnelle

Une brève impulsion, injectée à l'entrée d'un système causal, linéaire, continu et invariant donne en sortie un signal de durée finie appelé réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle, notée $h(t)$ est donc la réponse d'un système à une impulsion de Dirac.

La réponse impulsionnelle caractérise ainsi le comportement temporel du système (sa fonction de transfert).

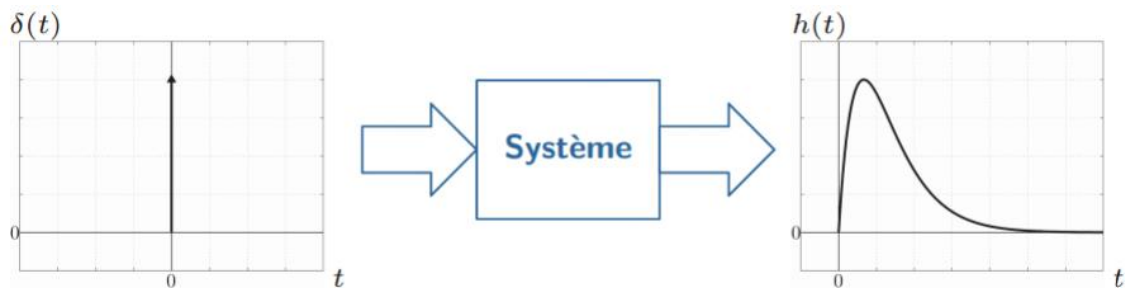


Figure 2 : Réponse impulsionnelle d'un système.

1.8 Réponse indicielle

L'intérêt d'une telle étude est d'observer l'effet d'une discontinuité finie du signal d'entrée. Cette « discontinuité » est obtenue en pratique lorsque le signal d'entrée présente un temps de montée très court devant les temps caractéristique du système étudié.

La réponse indicielle, noté $y(t)$, est la réponse d'un système à un échelon unitaire.

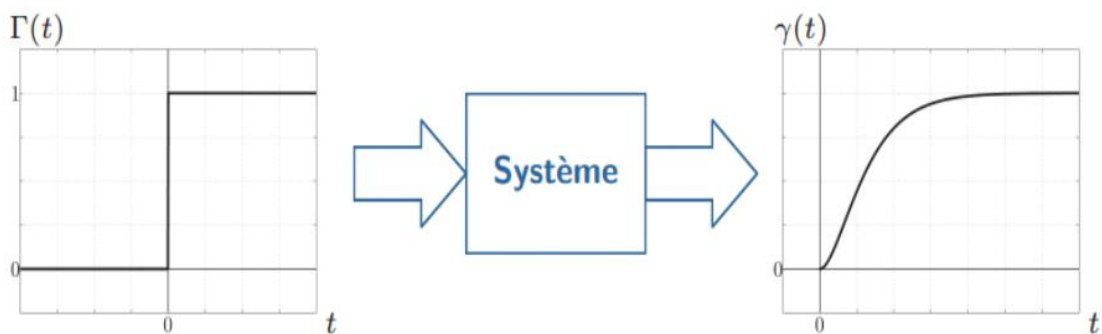


Figure 3 : Réponse indiciel d'un système.

2. La transformée en Z

2.1 Définition

La transformée en Z est un outil mathématique de l'automatique et du traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace dans le domaine continu.

- Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète. La transformée en Z est un outil permettant de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies.
- La transformée en Z peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace.

La transformée de Laplace est

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (4)$$

$f(t)$ est un signal continu, $F(p)$ est la transformée de Laplace.

Pour le cas discret $f(t)=f(nt)$

$$f(nt) \rightarrow F(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nt)e^{-npt} \quad (5)$$

Soit donc $Z = e^{pt}$

$$F(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)Z^{-n} \quad (6)$$

On peut remplacer l'opérateur p par son équivalent, $p=\sigma+j\omega$.

$Z=e^p=e^{\sigma}e^{j\omega}$, Z est une variable complexe composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Si $\forall n < 0, f(n)=0$, on parle de signal causal. Inversement ;

si $\forall n > 0, f(n)=0$, on parle de signal anti-causal.

Pour les signaux causaux, on peut utiliser la transformée en Z mono-latérale :

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)Z^{-n} \quad (7)$$

❖ Notation

Soit $x(n)$ un signal discret

$$X(Z) = TZ(x(n)) = Z(x(n)) \quad (8)$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)Z^{-n} \quad (9)$$

➤ **Exemple 1** : Représenter la séquence suivante par sa transformée en Z :

$$x[n] = \{-7, 3, \underset{\uparrow}{1}, 4, -8, 5\}.$$

Solution :

$$X(z) = -7Z^2 + 3Z^1 + Z^0 + 4Z^{-1} - 8Z^{-2} + 5Z^{-3} = -7Z^2 + 3Z^1 + 1 + 4Z^{-1} - 8Z^{-2} + 5Z^{-3}$$

➤ **Exemple 2 :** calculer la transformée en Z du signal suivant :

$$x(k) = a^k, \quad \forall k \geq 0$$

La transformée en Z est :

$$X(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot Z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a \cdot Z^{-1})^k = \frac{1}{1 - a \cdot Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - a} \quad \text{si } |a \cdot Z^{-1}| < 1$$

Rappel : C'est une série géométrique infinie.

$$1 + A + A^2 + A^3 + \dots = \frac{1}{1 - A} \quad \text{si } |A| < 1$$

2.2 Critère de Cauchy et la région de convergence

$X(Z)$ s'écrit comme la sommation d'un nombre infini de termes $X(Z)$ (série). On appelle l'ensemble des valeurs de Z pour lequel $X(Z)$ converge **région de convergence** de la TZ qui sera noté par **ROC** (région of convergence).

Pour trouver cette région de convergence on utilise ce qu'on appelle le critère de Cauchy, ce critère stipule qu'une série de type

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad \text{Converge} \quad \text{Si } \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{1/k} < 1 \quad (10)$$

On va appliquer le critère de Cauchy sur $X(Z)$ (on décompose la série en deux séries) :

$$\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)Z^{-n} \\ &= X_1(Z) + X_2(Z) \end{aligned} \quad (11)$$

La ROC de $X_2(Z)$ est obtenu par :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)Z^{-n}|^{1/n} &< 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{1/n} |Z^{-n}|^{1/n} &< 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{1/n} < |Z| &\rightarrow |Z| > R_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Alors la ROC de $X_2(Z)$ est l'**extérieur** d'un cercle de rayon R_2

Pour

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} \quad (13)$$

$l=-n$

$$X_1(Z) = \sum_{l=1}^{+\infty} x(-l)Z^l = \sum_{l=0}^{+\infty} x(-l)Z^l - x(0) \quad (14)$$

$X_1(Z)$ converge si $\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)Z^l|^{1/l} < 1$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{1/l} |Z| < 1$$

$$|Z| < \frac{1}{\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{1/l}} \rightarrow |Z| < R_1$$

Alors la ROC de $X_1(Z)$ est l'intérieur d'un cercle de rayon R_2 .

La ROC de $X(Z)$ sera la ROC commune entre celle de $X_1(Z)$ et $X_2(Z)$, soit pour cela $R_1 > R_2$. La ROC de $X(Z)$ est un anneau délimité par R_2 et R_1 du plan complexe des z et donné par

$$R_2 < |Z| < R_1$$

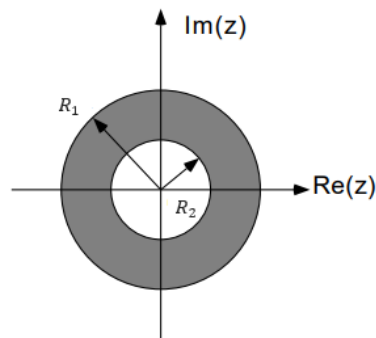


Figure 4 : Illustration d'un anneau de convergence.

Exemple : 1- soit $x(n) = U(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs } n < 0 \end{cases}$

2- $U(n) = -U(-n - 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs } n < 0 \end{cases}$

Déterminer la ROC de $X(Z)$.

2.3 Propriétés de la transformée en Z

Propriété	Signal	Transformée en Z
Déphasage	$x[n - s]$	$Z^{-s}X(Z)$
Réflexion	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{Z}\right)$
Échelonnage	$\alpha^n x(n)$	$X\left(\frac{Z}{\alpha}\right)$
Mult.cos	$\cos(n\Omega) x(n)$	$0.5[X(Ze^{j\Omega}) + X(Ze^{-j\Omega})]$
Mul.sin	$\sin(n\Omega) x(n)$	$j0.5[X(Ze^{j\Omega}) - X(Ze^{-j\Omega})]$
Convolution	$x(n) * h(n)$	$X(Z).H(Z)$
Dérivation	$nx(n)$	$-Z \frac{dX(Z)}{dZ}$

Tableau 1 : Propriétés de la transformée en Z.

2.4 Théorèmes limites

2.4.1 Théorème de la valeur initiale

Soit $x(n)$ un signal **causal** et $X(Z)$ sa transformée en Z. Alors :

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$X(Z) = x(0) + x(1)Z^{-1} + x(2)Z^{-2} + \dots$$

$$x(0) = \lim_{Z \rightarrow +\infty} X(Z) \quad (15)$$

2.4.2 Théorème de la valeur finale

Soit $x(n)$ un signal **causal** et $X(Z)$ sa transformée en Z. Alors

$$x(\infty) = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1})X(Z) = \lim_{Z \rightarrow 1} \left(\frac{Z-1}{Z}\right)X(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n), \text{ cette limite étant finie.}$$

Exemple :

$$x(n)=a^n \text{ avec } |a| < 1, \text{ on a } \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1})X(Z) = \lim_{Z \rightarrow 1} \left(\frac{Z-1}{Z}\right) \left(\frac{Z}{Z-a}\right) = 0$$

2.5 Table de la Transformée en Z des Fonctions usuelles

Numéro	Signal	Transformée en Z	ROC
1	$\delta[n]$	1	tout z
2	$u[n] - u[n - s]$	$\frac{1 - z^{-s}}{1 - z^{-1}}$	$z \neq 0$
3	$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$	$ z > 1$
4	$\alpha^n u[n]$	$\frac{z}{z - \alpha}$	$ z > \alpha $
5	$(-\alpha)^n u[n]$	$\frac{z}{z + \alpha}$	$ z > \alpha $
6	$nu[n]$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	$ z > 1$
7	$n\alpha^n u[n]$	$\frac{z\alpha}{(z - \alpha)^2}$	$ z > \alpha $

3. Transformée en Z inverse

La transformée en Z inverse est donnée par :

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) Z^{n-1} dz \quad (16)$$

Où C est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre appartenant entièrement au domaine de convergence.

Il existe plusieurs méthodes pour faire la transformée inverse comme le théorème des résidus, on cite les plus faciles dans ce cours.

3.1 Développement en série de puissance

Comme la transformé $X(z)$ est une fonction analytique de Z dans la région de convergence, on peut le développer en série de Taylor (voir annexe D) en fonction de Z^{-1} . On peut, ensuite, trouver les séries par identification avec les séries connus.

Soit $X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$, le développement de $X(Z)$ en une série de puissance Z^{-1} consiste à la division du numérateur par le dénominateur, et les coefficients pondérant le Z^{-1} constituent notre $x(n)$.

Exemple :

1) Soit la transformée en Z $X(z)$ d'un signal discret $x(k)$:

$$X(z) = \frac{0.1 \times Z \times (Z + 1)}{(Z - 1)^2 \times (Z - 0.6)} = \frac{0.1 Z^2 + 0.1 Z}{Z^3 - 2.6 Z^2 + 2.2 Z - 0.6}$$

On effectue la division formelle :

$0.1 \cdot z^2$	$+0.1 \cdot z$				$z^3 - 2.6 \cdot z^2 + 2.2 \cdot z - 0.6$
$0.1 \cdot z^2$	$-0.26 \cdot z$	$+0.22$	$-0.06 \cdot z^{-1}$		
	$0.36 \cdot z$	-0.22	$+0.06 \cdot z^{-1}$		$0.1 \cdot z^{-1} + 0.36 \cdot z^{-2} + 0.716 \cdot z^{-3} + \dots$
	$0.36 \cdot z$	-0.936	$+0.792 \cdot z^{-1}$	$-0.216 \cdot z^{-2}$	
		0.716	$+ \dots$		

Ce qui donne directement les valeurs des échantillons cherchées :

$$x(0) = 0; \quad x(1) = 0.1; \quad x(2) = 0.36; \quad x(3) = 0.716$$

2) Déterminer la TZ inverse de $X(Z) = \frac{1-Z^{-1}-5Z^{-2}-3Z^{-3}}{1-3Z^{-1}}$

3.2 Développement en fraction partielle

Soit la séquence

$$x(n) \rightarrow X(Z) = S(Z) + \frac{P_0(Z)}{Q_0(Z)} \quad (17)$$

Avec $S(Z)$ est un polynôme en Z et $\frac{P_0(Z)}{Q_0(Z)}$ est un rapport ayant les pôles Z_i simples et Z_n multiples d'ordre 0.

On peut développer $\frac{P_0(Z)}{Q_0(Z)}$ comme suit :

$$\frac{P_0(Z)}{Q_0(Z)} = \sum_i \frac{\alpha_i}{Z - Z_i} + \sum_j \frac{\beta_j}{(Z - Z_j)^j} \quad (18)$$

$$\alpha_i = \lim_{Z \rightarrow Z_i} (Z - Z_i) \frac{P_0(Z)}{Q_0(Z)} \quad (19)$$

$$\beta_j = \frac{1}{(Q - j)!} \lim_{Z \rightarrow Z_n} \frac{d^{(Q-j)}}{dZ^{(Q-j)}} \left((Z - Z_n)^Q \frac{P_0(Z)}{Q_0(Z)} \right) \quad (20)$$

Exemple : Déterminer $x(n)$ sachant que $X(Z) = \frac{1}{1-3Z^{-1}+2Z^{-2}} \quad |Z| > 2$

$$X(Z) = \frac{1}{1 - 3Z^{-1} + 2Z^{-2}} = \frac{1/2}{Z^{-2} - \frac{3}{2}Z^{-1} + \frac{1}{2}} = \frac{1/2}{(Z^{-1} - 1)\left(Z^{-1} - \frac{1}{2}\right)}$$

1 et $\frac{1}{2}$ sont les racines du polynôme.

$$X(Z) = \frac{\alpha_1}{(Z^{-1} - 1)} + \frac{\alpha_2}{\left(Z^{-1} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\alpha_1 = \lim_{Z^{-1} \rightarrow 1} (Z^{-1} - 1) \frac{1/2}{(Z^{-1} - 1)\left(Z^{-1} - \frac{1}{2}\right)} = 1$$

$$\alpha_2 = \lim_{Z^{-1} \rightarrow \frac{1}{2}} \left(Z^{-1} - \frac{1}{2}\right) \frac{1/2}{(Z^{-1} - 1)\left(Z^{-1} - \frac{1}{2}\right)} = -1$$

Alors

$$X(Z) = \frac{1}{Z^{-1} - 1} + \frac{-1}{Z^{-1} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{1 - Z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2Z^{-1}}$$

Ce qui donne par transformée en Z inverse, en utilisant la table des transformées en Z:

$$x(n) = -u(n) + 2 \cdot 2^n u(n)$$

3.3 Transformée en Z rationnelle

Soit un système numérique de réponse impulsionnelle

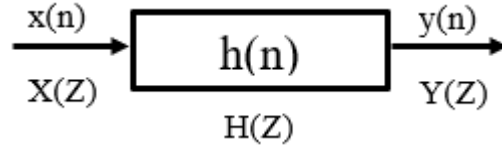


Figure 5 : système numérique.

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(Z) = X(Z) \cdot H(Z) \Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (21)$$

Un système peut être décrit par son équation aux différences :

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^M b_k x(n-k) \quad \Rightarrow$$

$$Y(Z) = -\sum_{k=1}^N a_k Z^{-k} Y(Z) + \sum_{k=1}^M b_k Z^{-k} X(Z) \quad (22)$$

$$Y(Z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k} \right) = X(Z) \sum_{k=1}^M b_k Z^{-k} \quad (23)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{k=1}^M b_k Z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}} \quad (24)$$

$H(Z)$: est appelée la fonction de transfert.

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_M Z^{-M}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_N Z^{-N}} \quad (25)$$

Avec $a_0 = 1$

$$H(Z) = \frac{b_0 Z^{-M} \left(Z^M + \left(\frac{b_1}{b_0} \right) Z^{M-1} + \dots + \frac{b_M}{b_0} \right)}{Z^{-N} (Z^N + a_1 Z^{N-1} + \dots + a_N)} \quad (26)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = b_0 Z^{-(M-N)} \frac{\prod_{i=1}^M (Z - Z_i)}{\prod_{j=1}^N (Z - P_j)} \quad (27)$$

$$H(Z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (Z - Z_i)}{\prod_{j=1}^N (Z - P_j)} \quad (28)$$

Z_i : sont les zéros de $H(Z)$

P_j : sont les pôles de $H(Z)$

Si les a_i sont nuls : $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0 \Rightarrow$

$$H(Z) = b_0 Z^{-M} \prod_{i=1}^M (Z - Z_i) \quad (29)$$

Ce système est dit **tout Zéros**, c'est un système **non récursif**.

Si les b_i sont nuls (sauf $b_0 \neq 0$)

$$H(Z) = b_0 Z^N \frac{1}{\prod_{j=1}^N (Z - P_j)} \quad (30)$$

Ce système est dit **tout Pôles**, c'est un système **récursif**.

4. Représentation des pôles et zéros

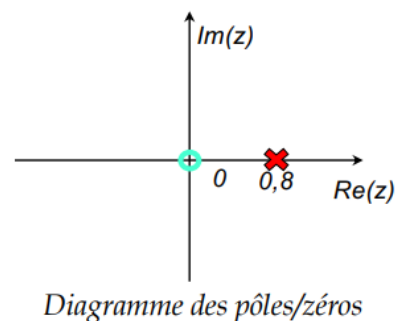
Représentation des pôles et des zéros de la fonction de transfert $H(Z)$ dans le plan complexe.

- ✓ Les pôles P_j sont représentés avec des croix.
- ✓ Les zéros Z_i sont représentés avec des cercles.

Exemple

$$H(Z) = \frac{0.2}{1 - 0.8Z^{-1}} = \frac{0.2Z}{Z - 0.8}$$

Donc un zéro pour $z_1 = 0$ et un pôle pour $P_1 = 0.8$.



5. Stabilité d'un système à temps discret

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Soit $h(n)$ la réponse impulsionnelle d'un système discret, sa fonction de transfert est $H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)Z^{-n}$.

Le système est dit **stable** si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)Z^{-n}| < \infty$

Soit un système stable :

$$|H(Z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)Z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)||Z^{-n}| \quad (31)$$

Quand on évalue cette inégalité sur le cercle unité $|Z| < 1$, $H(Z) \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

De ce résultat, on en déduit que si un système est stable, sa ROC contient forcément le cercle unité.

✓ Pour un système causal $\Rightarrow$

ROC : $|Z| > R$ (l'extérieur d'un disque)

✓ Pour un système stable $\Rightarrow$

ROC : $R < 1$

✓ Pour un système causal soit stable il faut : $Z > R < 1$

Remarque

Un système stable ne veut pas dire qu'il est causal.

Pour un système **stable et causal**, les pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

Exemple

Soit la fonction de transfert d'un système :

$$H(Z) = \frac{3 - 4Z^{-1}}{1 - 3.5Z^{-1} + 1.5Z^{-2}}$$

1. Trouver les pôles de ce système
2. Trouver la ROC et la réponse impulsionnelle pour que :
 - Le système soit stable
 - Le système soit causal
 - Le système soit purement anticausal

6. Transformation de Hilbert

6.1 Définition

Soit un signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est $X(f)$. On appelle la transformée de Hilbert de ce signal le signal défini par la relation:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \text{ Ou encore } \hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (32)$$

En toute rigueur et d'un point de vue mathématique, cette intégrale doit être prise au sens de la valeur principale de Cauchy :

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{x(u)}{t-u} du + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x(u)}{t-u} du \right\} \quad (33)$$

Cette transformation étant régie par un opérateur de convolution, elle peut donc être interprétée comme un filtrage linéaire et invariant dans le temps (*filtre de Hilbert*).

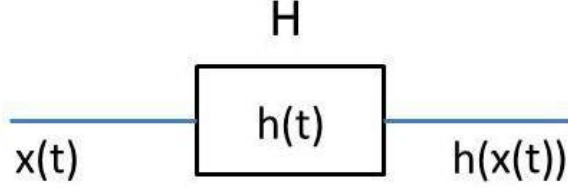


Figure 6 : filtre de Hilbert.

La réponse impulsionnelle d'un filtre de Hilbert est donc :

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (34)$$

Remarque

La fonction $h(t)$ étant non causale, le filtre de Hilbert est lui-même non causal donc non réalisable (dans la pratique, on en réalise des approximations sur des bandes de fréquences limitées). Nous admettrons que sa fonction de transfert est :

$$H(f) = TF\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j \cdot \text{sgn}(f) \quad (35)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(f) &= -1 & f < 0 \\ \text{sgn}(f) &= +1 & f > 0 \end{aligned}$$

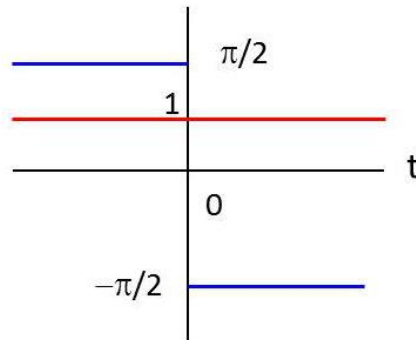


Figure 7: représentation du module et de la phase du $\text{sgn}(f)$.

La figure (7) représente le module de $|H(f)|$, en rouge et de la phase en bleu. En désignant par $\hat{X}(f)$ la transformée de Fourier de la transformée de Hilbert :

$$\hat{X}(f) = TF\{\hat{x}(t)\}$$

On a :

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \xrightarrow{TF} \hat{X}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) \cdot X(f) \quad (36)$$

Souvent, on peut trouver $\hat{x}(t)$ à partir de la transformée de Fourier inverse de $\hat{X}(f)$.

Application

On se propose de calculer la transformée de Hilbert de $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$.
Calculons les transformées de Fourier respectives :

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} X(f) = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} &\xrightarrow{TF} \hat{X}(f) = (-j \cdot \text{sgn}(f)) \cdot \left[\frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \right] \\ \hat{X}(f) &= -j \frac{a}{2} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \end{aligned}$$

$$\text{On sait que : } a \cdot \sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \hat{X}(f) = -\frac{aj}{2} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

Par la transformation de Hilbert :

$$\hat{x}(t) = a \cdot \sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TH} \hat{X}(f) = -j \frac{a}{2} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

6.2 Signal causal

Soit un signal $x(t)$ réel possédant une transformée de Fourier $X(f)$.

Le signal $x(t)$ étant réel, nous savons que $X(f)$ possède la symétrie hermitienne :

$$X(f) = \bar{X}(-f) \quad (37)$$

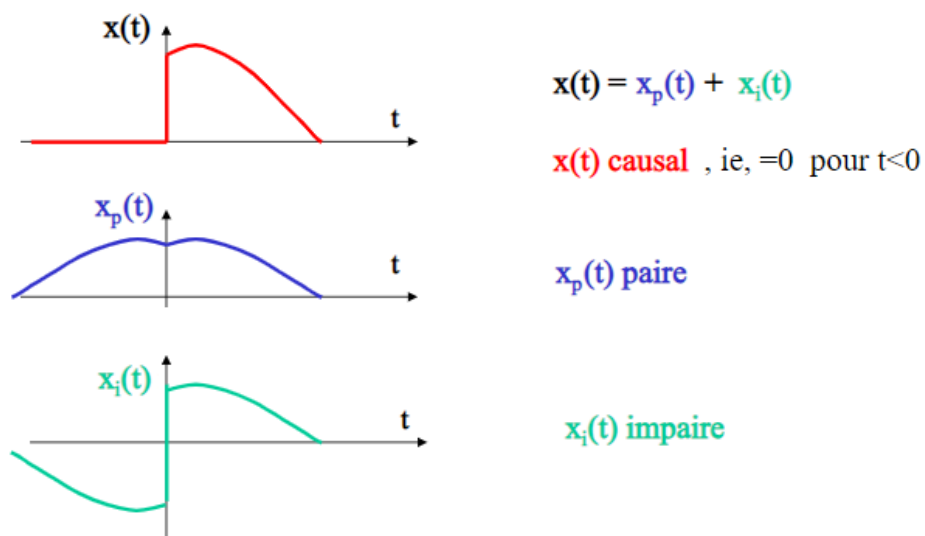


Figure 8 : Signal causal, pair et impair.

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \end{cases} \quad (38)$$

$x_p(t) = x_p(-t)$: est la partie paire de $x(t)$.

$x_i(t) = -x_i(-t)$: est la partie impaire de $x(t)$.

Soit la fonction $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$

Il apparait clairement que :

$$x_p(t) = x_i(t) \cdot \text{sign}(t) \quad \text{et} \quad x_i(t) = x_p(t) \cdot \text{sign}(t) \quad (39)$$

6.3 Etude des propriétés de $X(f)$, $X_p(f)$ et $X_i(f)$

$$X(f) = TF[x_p(t)] + TF[x_i(t)] = \text{Re}[X(f)] + j \cdot \text{Im}[X(f)] \quad (40)$$

En utilisant l'équation (39)

$$\begin{aligned} \text{Re}[X(f)] &= TF[x_p(t)] = TF[x_i(t) \cdot \text{sign}(t)] = TF[x_i(t)] * TF[\text{sign}(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} X_i(f) * \frac{2}{j2\pi f} = \frac{1}{\pi} \left(X_i(f) * \frac{1}{j\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(j \cdot \text{Im}[X(f)] * \frac{1}{j\pi f} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{Re}[X(f)] = \frac{1}{2\pi} \left(\text{Im}[X(f)] * \frac{1}{\pi f} \right) \quad (42)$$

L'équation (42) est dit transformée de Hilbert de $X(f)$ dans le domaine fréquentiel.

$$\begin{aligned} j \cdot \text{Im}[X(f)] &= TF[x_i(t)] = TF[x_p(t) \cdot \text{sign}(t)] = TF[x_p(t)] * TF[\text{sign}(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} X_p(f) * \frac{2}{j2\pi f} = \frac{1}{\pi} \left(X_p(f) * \frac{1}{j\pi f} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\text{Re}[X(f)] * \frac{1}{j\pi f} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\text{Im}[X(f)] = -\frac{1}{2\pi} \left(\text{Re}[X(f)] * \frac{1}{\pi f} \right) \quad (44)$$

L'équation (44) est dit transformée de Hilbert de $\text{Re}[X(f)]$ dans le domaine fréquentiel.

On peut constater que :

$$\text{Re}[X(f)] = TH\{\text{Im}[X(f)]\} \quad \text{et} \quad \text{Im}[X(f)] = -TH\{\text{Re}[X(f)]\} \quad (45)$$

Un signal causal $x(t)$ admet un spectre $X(f)$, dont la partie réelle et imaginaire sont reliées par la transformation de Hilbert.

6.4 Signal analytique

Un signal est dit analytique si sa transformée de Fourier est causale.

Soit un signal $x(t)$ réel possédant une transformée de Fourier $X(f)$.

Soit le signal $z_x(t)$ dont la transformée $Z_x(f)$ est égale à $X(f)$ sur le domaine des fréquences positives et nulle sur le domaine des fréquences négatives, est définie par :

$$Z_x(f) = \begin{cases} 2 X(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (46)$$

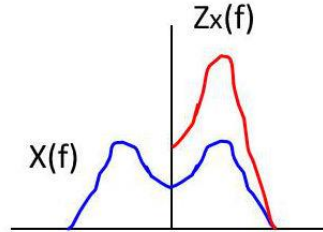


Figure 9: Signal analytique associé à un signal réel.

Le coefficient 2 n'est introduit que pour des raisons de conservation d'énergie ou de puissance.

Le signal $z_x(t)$ est appelé signal analytique associé au signal réel $x(t)$. Nous pouvons déjà remarquer que sa transformée de Fourier ne possède pas, par construction même, la propriété de symétrie hermitienne. Il s'agit donc d'un signal purement complexe.

Calculons son expression temporelle $z_x(t)$:

$$Z_x(f) = \begin{cases} X(f) + X(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (47)$$

On peut écrire :

$$Z_x(f) = X(f) + \text{sgn}(f)X(f) = X(f) - j^2 \text{sgn}(f)X(f) \quad (48)$$

Avec une autre écriture :

$$Z_x(f) = X(f) - j \cdot [j \cdot \text{sgn}(f)X(f)] \quad (49)$$

D'après la relation (36) , on trouve :

$$Z_x(f) = X(f) + j\hat{X}(f) \quad (50)$$

Un signal $x(t)$ étant réel par hypothèse, sa transformée de Hilbert l'est également.

On en déduit immédiatement la relation réciproque :

$$x(t) = \Re\{z_x(t)\} \quad (51)$$

Définition :

Le signal temporel analytique $Z_x(t)$ est défini par :

$$Z_x(t) = z(t) + j\hat{z}(t) \quad (52)$$

Application :

Soit le signal $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$

$\hat{x}(t) = a \sin(2\pi f_0 t)$

Le signal analytique $z(t)$ associé $x(t)$ est :

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = a\cos(2\pi f_0 t) + ja.\sin(2\pi f_0 t) = ae^{j(2\pi f_0)t}$$

6.5 Propriété (Transformée de HILBERT d'un signal modulé)

Soit un signal $g(t)$ en bande de base,

$$\widehat{g(t)\cos(2\pi f_c t)} = g(t)\sin(2\pi f_c t) \quad (53)$$

A. Ou trouve-t-on des transformées de Hilbert ?

L'utilisation de la transformée de Hilbert dans l'étude des signaux causaux et des signaux non-stationnaire.

B. Formulaire : transformée de Hilbert

- $\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TH} \sin(2\pi f_0 t)$
- $\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TH} -\cos(2\pi f_0 t)$
- $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow{TH} \frac{[1-\cos(t)]}{t}$
- $\frac{1}{t^2} \xrightarrow{TH} \frac{1}{(1+t^2)}$
- $\exp(-\alpha |t|)\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TH} \exp(-\alpha |t|)\sin(2\pi f_0 t)$

7. La prédiction linéaire

La prédiction linéaire est une opération mathématique dans laquelle les valeurs futures d'un signal à temps discret sont estimées comme une fonction linéaire des échantillons précédents.

Dans le traitement du signal numérique, la prédiction linéaire est souvent appelée codage prédictif linéaire (LPC) et peut donc être considérée comme un sous-ensemble de la théorie des filtres. Dans l'analyse de système, un sous-domaine des mathématiques, la prédiction linéaire peut être considérée comme faisant partie de la modélisation ou de l'optimisation mathématique [11].

7.1 Le modèle de prédiction

La représentation la plus courante est

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) \quad (54)$$

Où $\hat{x}(n)$ est la valeur de signal prédite, $x(n-i)$ les valeurs précédemment observées, avec $p < n$, a_i les coefficients prédictifs. L'erreur générée par cette estimation est

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) \quad (55)$$

Où $\hat{x}(n)$ est la vraie valeur du signal.

Ces équations sont valables pour tous les types de prédiction linéaire (unidimensionnelle). Les différences se trouvent dans la façon dont les coefficients prédictifs a_i sont choisis.

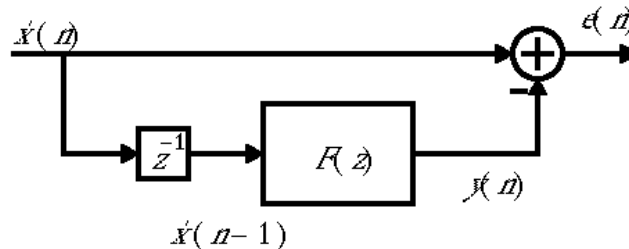
Pour les signaux multidimensionnels, la métrique d'erreur est souvent définie comme

$$e(n) = \|x(n) - \hat{x}(n)\| \quad (56)$$

Où $\|*\|$ est une norme vectorielle choisie appropriée. Des prédictions telles que $\hat{x}(n)$ sont couramment utilisés dans les filtres de Kalman et les lisseurs pour estimer les valeurs de signal actuelles et passées, respectivement.

7.2 Prédiction Linéaire Pour le Traitement de la Parole [12]

Un prédicteur linéaire utilise les observations passées du signal pour essayer de prédire le prochain échantillon du signal. La structure d'un tel filtre prédicteur est donné par le diagramme suivant

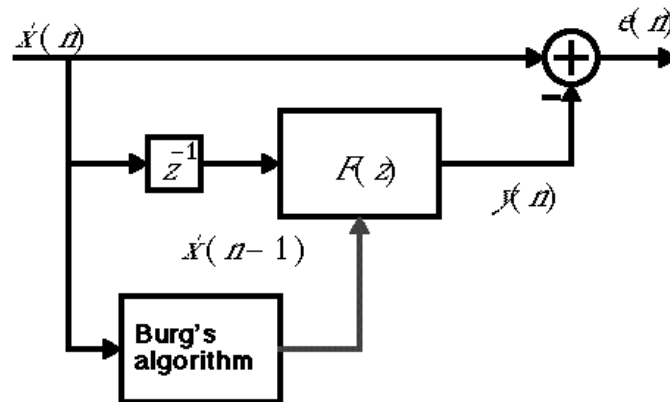


Le signal d'entrée, $x'(n)$ est retardé d'un échantillon par l'opérateur z^{-1} . L'opérateur $F(z)$ est un filtre dont la sortie $y(n)$ est une estimée de la valeur courante de $x'(n)$. Puisque ce bloc voit seulement une version retardée de $x'(n)$, sa sortie est donc une prédiction (de $x'(n)$). $e(n)$ est l'erreur de la prédiction (ou différence entre ce qui est prédit et la valeur réelle du signal).

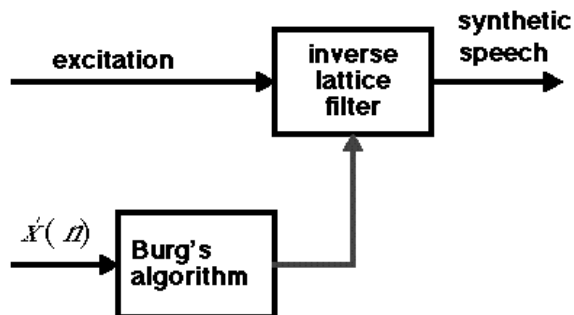
Qualitativement, une prédiction linéaire exploite le fait qu'un nouvel échantillon d'un signal n'est pas (habituellement) totalement indépendant des échantillons précédents. Cette prédiction capture cette dépendance entre échantillons. Quand un prédicteur fonctionne bien, le signal d'erreur sera composé d'échantillons faiblement corrélés entre eux.

Si l'entrée du prédicteur linéaire est le signal de parole suivant, alors le signal d'erreur est qui n'est pas très intelligible. L'intelligibilité (ou l'information liée à celle-ci), est donc lié à la corrélation existante entre les différents échantillons du signal.

En fait, pour la parole, le prédicteur linéaire doit constamment changer et s'adapter à ce qui est dit. A cette fin, le signal d'entrée est divisé en segment de 20 ms (160 échantillons) et chaque segment est analysé pour fournir les coefficients d'un filtre prédicteur. Un opérateur nommé dans l'exemple ci-dessous "Burg's algorithm" utilise une des nombreuses méthodes existantes pour calculer les coefficients de ce filtre prédicteur tous les tranches de 20 ms.



On peut vérifier que l'hypothèse de l'intelligibilité d'un signal de parole est liée à la corrélation existante entre les échantillons en introduisant cette corrélation dans un signal aléatoire comme du bruit blanc et filtrer ce bruit avec l'inverse du filtre d'erreur de prédiction (et en changeant les paramètres de ce filtre tous les 20ms). Le résultat sera un signal de parole qui semble être chuchoté mais qui est néanmoins intelligible. Le bloc diagramme utilisé pour créer cette parole synthétique est le suivant



Chapitre 6 : Synthèse de filtres numériques

1. Filtrage

Le filtrage est une forme de traitement du signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuit électronique pour :

- Modifier son spectre de fréquence et donc sa forme.
- Modifier sa phase et donc sa forme.
- Extraire une partie de l'information liée à ce signal
- Eliminer ou affaiblir des fréquences parasites indésirables
- Isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles

Le filtrage s'applique à des signaux représentés sous forme analogique (filtre analogique), ou sous forme numérique après échantillonnage du signal (filtres numériques).

Les **filtres analogiques** se divisent eux-mêmes en plusieurs catégories :

- Les filtres passifs qui font appel essentiellement à des inductances de haute qualité et des condensateurs. Jusque dans les années 70, c'était les seuls filtres conçus. Ils sont actuellement utilisés pour les hautes fréquences. (utilisation de quartz)
- Les filtres actifs sont constitués de condensateurs, de résistances et d'éléments actifs qui sont essentiellement des AIL. Ils sont moins encombrants, faciles à concevoir et moins coûteux que les filtres passifs mais restent limités en fréquence ($< 1\text{MHz}$ à cause de l'AIL). Ils consomment plus et nécessitent une source d'alimentation.

Applications

- Systèmes de télécommunications (téléphone, télévision, radio, transmission de données...)
- Systèmes d'acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, ensemble de mesure, radars...)
- Alimentation électrique....

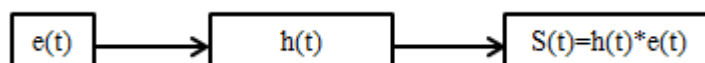
Un filtre numérique est une combinaison linéaire d'échantillons. Le filtrage et l'analyse spectrale sont des techniques de base dans le traitement numérique du signal.

1.2 Rappels sur la théorie du filtrage

1.2.1 Notion de fonction de transfert

Un filtre est essentiellement décrit par une fonction de transfert $h(t)$ ($H(w)$).

La figure au-dessous illustre un filtre qui reçoit un signal d'entrée $x(t)$ et qui délivre un signal de sortie $y(t)$.



Domaine temporel : $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t - \tau).d\tau$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Domaine fréquentiel : $y(t) = h(t) * x(t) \rightarrow Y(w) = H(w)X(w)$

Tout filtre linéaire est entièrement décrit par sa réponse fréquentielle en amplitude $|H(w)|$ et sa réponse de phase $\varphi(w) = \arg(H(w))$

$$|Y(w)| = |H(w)||X(w)| \text{ et } \arg(Y(w)) = \arg(H(w)) + \arg(X(w))$$

$$\text{alors } H(w) = |H(w)|e^{j\varphi(w)}$$

1.2.2 Filtres stables physiquement réalisables

Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle pour $t < 0$.

Il existe plusieurs types de filtres linéaires réalisables : Passe bas, Passe haut, Passe bande, Coupe bande

Des filtres particuliers : les filtres de Butterworth, les filtres de Tchebyshev, les filtres elliptiques (filtre de Cauer).

La conception des filtres linéaires fait appel à un gabarit, qui rassemble les caractéristiques du gain fréquentiel désiré.

1.2.3 Synthèse des filtres analogiques

Les spécifications qui définissent un gabarit sont les caractéristiques du filtre. On doit préciser :

- Le gain du filtre dans bande passante (≈ 0 dB),
- L'atténuation du filtre en bande occupée (typiquement 30 dB à 90 dB),
- La fréquence de coupure (une dans le cas d'un passe-bas ou d'un passe-haut et deux dans le cas d'un passe-bande ou d'un coupe-bande),
- La largeur de bande de transition qui généralement doit être la plus petite possible,

1.2.4 Les filtres idéaux

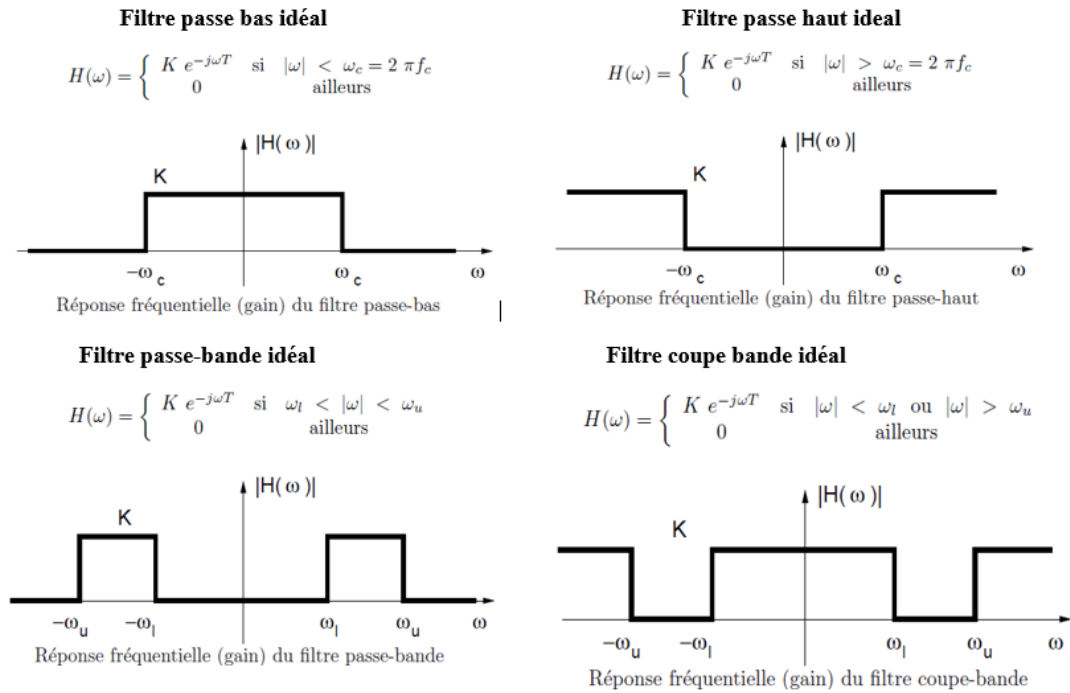


Figure 1 : Types de filtres idéaux.

Les filtres idéaux présentent un déphasage linéaire et ne sont pas physiquement réalisables, car les réponses fréquentielles idéales (ci-dessus) correspondent à une réponse temporelle non-causale. Par exemple, en considérant le filtre passe-bas $h(t) = K \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} (t - T)\right)$ représentée ci-dessous :

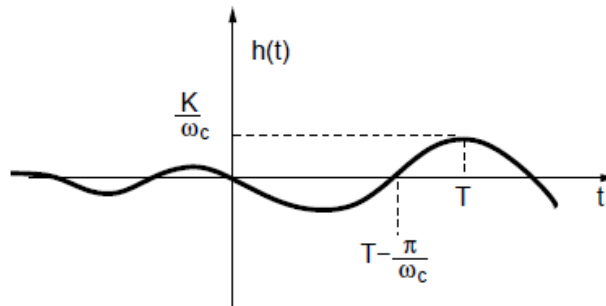


Figure 2: Réponse temporelle du filtre passe-bas idéal : une partie du signal n'est pas nulle pour $t < 0$.

Il s'ensuit que les filtres qui vont pouvoir être réellement synthétisés n'ont pas de réponse fréquentielle correspondant à la fréquence porte, mais pourront s'en rapprocher. Des caractéristiques qui exhibent ces différences plus ou moins fortes vis-à-vis de la fonction porte sont principalement les ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuée ainsi que la largeur de la transition. Les filtres que l'on réalise sur les signaux continus (non échantillonnés) sont composés de résistances, de capacités, de self-inductances et d'amplificateurs opérationnels.

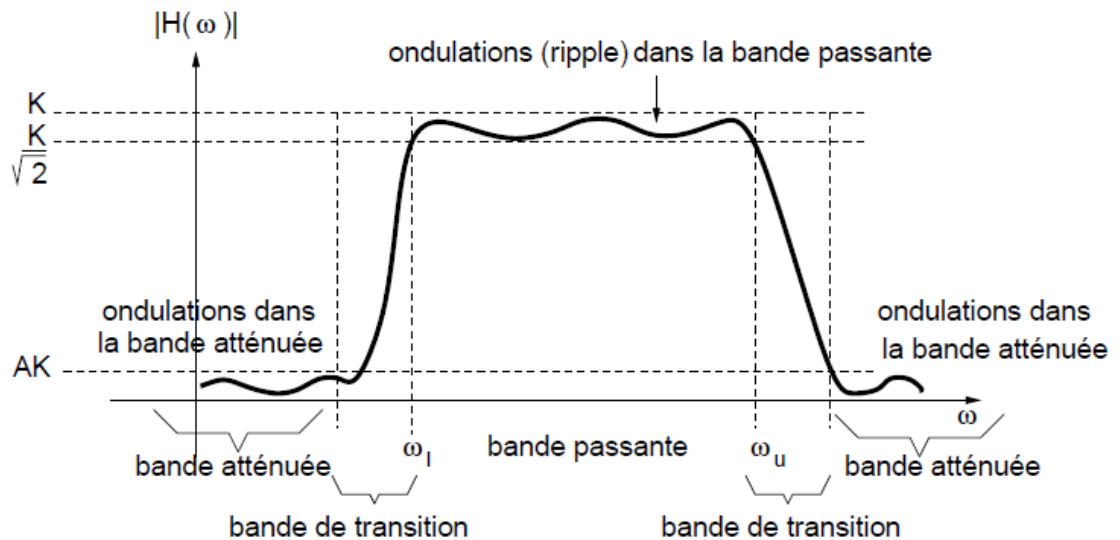


Figure 3 : définition et exemple de réponse fréquentielle d'un filtre réel.

2. Filtres numériques

2.1 Définition d'un filtre numérique

Un filtre numérique est réalisé par des circuits logiques, un signal numérique est appliqué à l'entrée d'un système et serait modifié à la sortie. Les deux signaux à l'entrée ou à la sortie ont leurs supports temporaires sur des séquences déterminées. On distingue différents types de filtres, le passe bas, le passe haut, le passe bande, l'éjecteur de bande, l'intégrateur, et le différentiateur. La plupart des filtres analogiques peuvent être reproduits en filtre numérique.

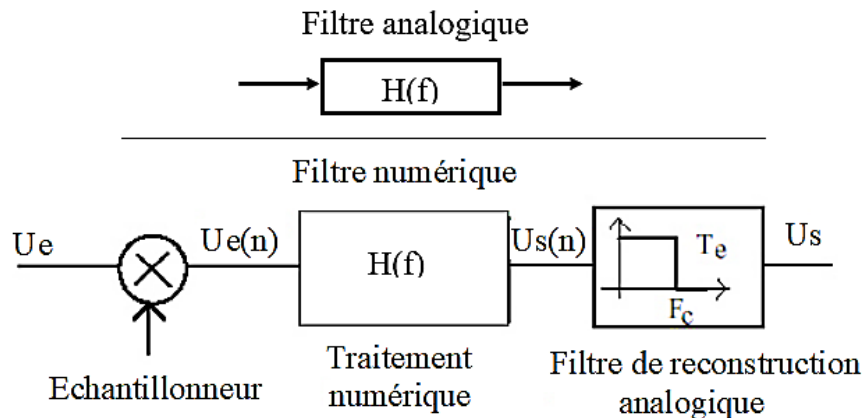


Figure 4: filtre numérique et le filtre analogique.

2.2 Classification

On distingue deux grandes familles de filtres numériques, lesquels sont caractérisés par leur réponse impulsionnelle. Cette réponse doit être causale et stable, ce qui conduit à :

- ✓ $h(n) = 0$ pour $n < 0$, (causalité).
- ✓ $\sum_0^N |h(n)| < \infty$, (stabilité).

D'une façon générale l'équation de récurrence d'un filtre numérique s'écrit :

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^M b_k x(n-k) \quad (1)$$

Si les coefficients a_k sont nuls le filtre serait récursif ou FIR (finite impulse response), et il suffit qu'un des coefficients a_k soit différent de zéro pour que le filtre serait non récursif ou IIR (infinite impulse response).

2.2.1 Filtre non récursif : filtre RIF (réponse impulsionnelle finie)

Le filtre à réponse impulsionnelle finie, les coefficients a_k sont nuls

$$y(n) = \sum_{k=1}^M b_k x(n-k) \quad (2)$$

- Filtres pour lesquels la sortie ne dépend que des entrées et pas des sorties,
- Leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un certain temps,
- Ils n'ont pas d'équivalent analogique.

Un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) est un système linéaire discret invariant dans le temps régi par une équation aux différences pour lequel l'échantillon de sortie $y(n)$ ne dépend que d'un certain nombre d'échantillons d'entrée $x(n)$.

Le schéma de mise en œuvre sera le suivant :

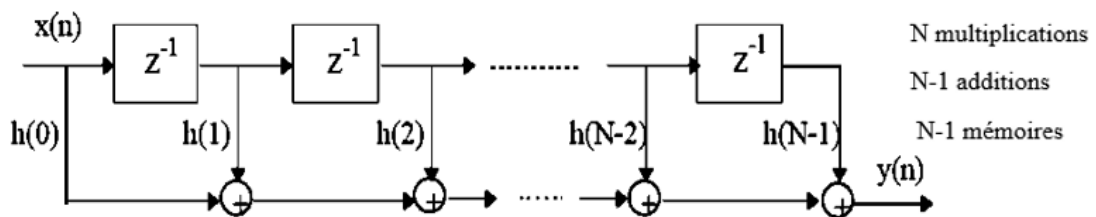


Figure 5: structure d'un filtre FIR.

Exemple

Soit l'équation de récurrence $y(n) = x(n) + 3x(n-1) + 2x(n-2)$

On a $h(0) = 1$, $h(1) = 3$, $h(2) = 2$.

Sa structure est de la forme:

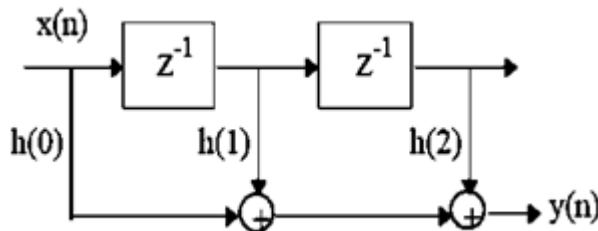


Figure 6: exemple d'un filtre FIR.

2.2.2 Filtre Récursif RII (Filtre à réponse impulsionnelle infinie)

- Filtre pour lesquels la sortie dépend des entrées et des sorties précédentes ;
- Leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un temps infini,

Elle sera mise en œuvre en suivant simplement l'équation aux différences :

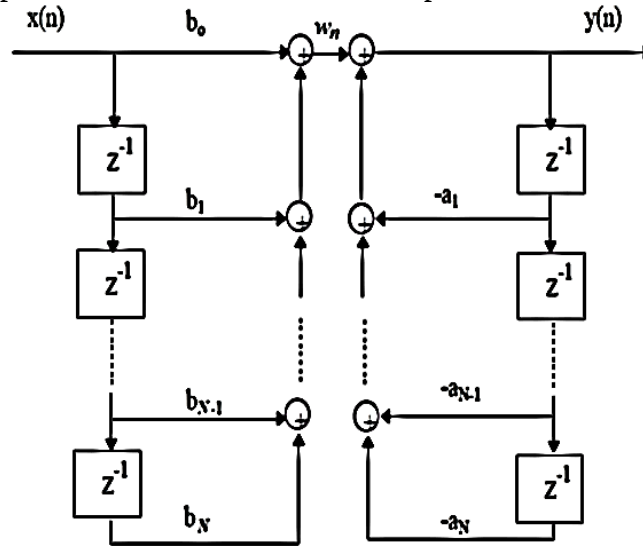
$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (3)$$

→ Présence de pôles, risque d'instabilité.

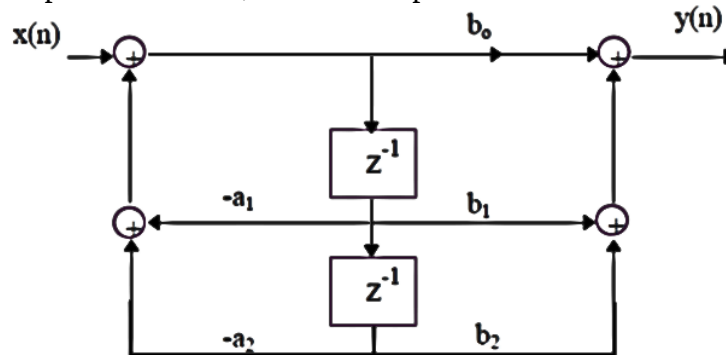
→ Systèmes à minimum de phase, si tous les zéros du numérateur sont à l'intérieur du cercle unité. → Filtres rationnels ne peuvent pas avoir de phase linéaire.

2.3 Structure canonique directe et transposée

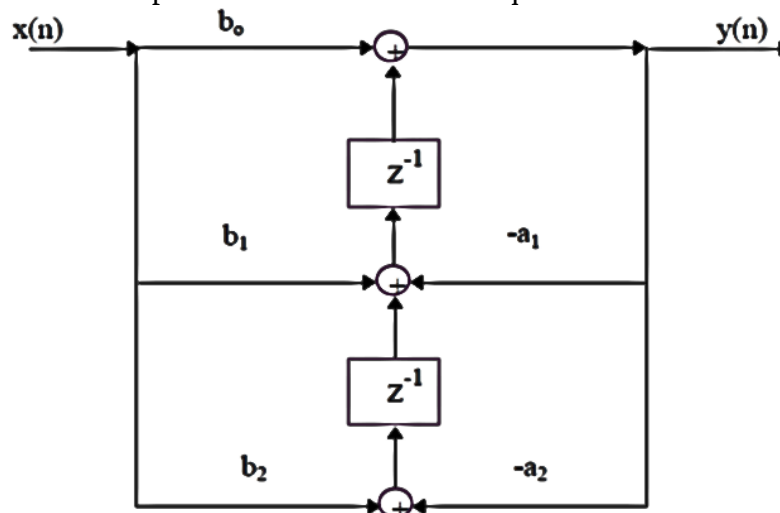
2.3.1 **Forme I** : partie non réursive, suivie de la partie réursive.



2.3.2 **Forme II** : partie réursive, suivie de la partie non réursive.



2.3.3 **Forme III** : transposition de la forme canonique.



3. Synthèse d'un filtre numérique

Le but est de transformer un filtre analogique en filtre numérique, ce dernier serait une conception approximative du filtre analogique idéal, bien sûr il est nécessaire de contraindre quelques inconvénients inévitables car on aura des oscillations dans la bande passante et dans la bande atténuée du filtre et entre les deux bandes il y aura une bande de transition :

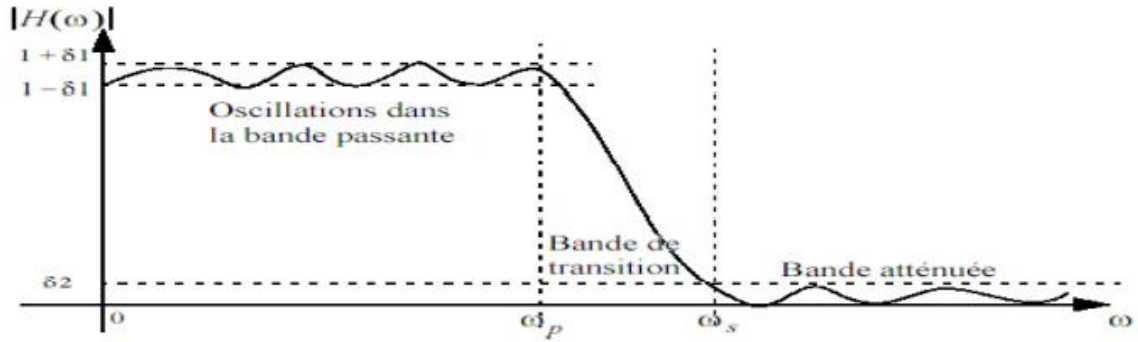


Figure 7: filtre analogique avec les oscillations.

Les méthodes de synthèse les plus utilisées s'appuient sur les propriétés des filtres analogiques, à partir d'un filtre analogique « prototype » de fonction de transfert $G(p)$ ayant les propriétés souhaitées, puis on cherche le filtre numérique de fonction de transfert $H_{\text{num}}(z)$ ayant sensiblement les mêmes propriétés :

- Même réponse impulsionnelle
- Même réponse indicielle
- Même réponse harmonique sur l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$

3.1 Synthèse de filtres RIF

Le calcul des coefficients des filtres FIR repose sur l'utilisation de la transformée de Fourier numérique et des fenêtres spectrales (rectangulaire, Hamming, Hanning, ...). Une suite d'échantillon $h(n)$ séparés de $T_e = \frac{1}{F_e}$ admet pour transformée de Fourier numérique $H(j\omega)$:

Un filtre RIF est défini par une fonction de transfert :

$$H(Z) = \sum_{k=0}^p a_k Z^{-k} \quad (4)$$

Soit en régime harmonique :

$$H(j\omega) = \sum_{k=0}^p a_k (e^{j\omega T_e})^{-k} = \sum_{k=0}^p a_k e^{-kj\omega T_e} \quad (5)$$

Il arrive souvent que ces coefficients aient des propriétés de symétrie :

$$a_k = a_{p-k} \text{ ou } a_k = -a_{p-k}$$

Si on regroupe deux à deux les termes :

$$\begin{aligned}
a_k e^{-kj\omega T_e} + a_{p-k} e^{-(p-k)j\omega T_e} &= a_k [e^{-kj\omega T_e} + e^{-(p-k)j\omega T_e}] \\
&= a_k e^{-j\frac{p}{2}\omega T_e} [e^{(\frac{p}{2}-k)j\omega T_e} + e^{-(\frac{p}{2}-k)j\omega T_e}] \\
&= 2a_k \cos \left[\left(\frac{p}{2} - k \right) \omega T_e \right] e^{-j\frac{p}{2}\omega T_e} \quad (6)
\end{aligned}$$

Si $a_k = -a_{p-k}$, on obtient $2ja_k \sin \left[\left(\frac{p}{2} - k \right) \omega T_e \right] e^{-j\frac{p}{2}\omega T_e}$

On aura alors :

$$H(j\omega) = e^{-j\frac{p}{2}\omega T_e} \underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}} 2a_k \cos \left[\left(\frac{p}{2} - k \right) \omega T_e \right]}_A \quad (7)$$

D'où :

$$\text{Arg}[H(j\omega)] = -\frac{p}{2}\omega T_e \omega (+\pi) \quad (\text{le terme } +\pi \text{ intervient si } A < 0)$$

3.1.1 Méthodes de synthèse

On cherche à réaliser un filtre de fonction de transfert :

$$H_{Num}(Z) = \sum_{k=0}^p a_k Z^{-k} \quad (8)$$

ou, ce qui est équivalent, défini par la récurrence :

$$y(n) = \sum_{k=0}^p a_k x(n-k) \quad (9)$$

Or, on a vu que pour un filtre RIF : $a_k = h(k)$, où $h(n)$ est la réponse impulsionnelle du filtre. Le problème se ramène donc à la détermination de la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre numérique.

Deux cas peuvent se présenter :

- on sait calculer la réponse impulsionnelle $g(t)$ du filtre analogique prototype (technique de l'échantillonnage temporel)
- on ne sait pas calculer $g(t)$, mais on connaît l'allure de la réponse en fréquence du filtre analogique prototype. $G_{anal}(j\omega)$ est connu, ou au moins un gabarit (technique de l'échantillonnage en fréquence).

On travaillera sur un exemple pour mettre en œuvre ces deux techniques: on cherche à réaliser sous forme numérique un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_c = \frac{F_e}{10}$

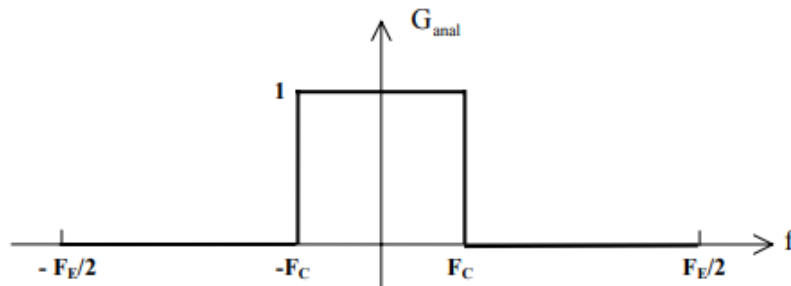


Figure 8: filtre passe-bas.

A. Echantillonnage temporel (invariance impulsionnelle)

Soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre analogique :

$$\begin{aligned}\delta(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} \Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1 \\ &\xrightarrow{\text{Filtrage}} G(f) = G_{anal}(j\omega) \Delta(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -F_c < f < F_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ &\xrightarrow{\text{Fourier inverse}} g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-F_c}^{F_c} e^{j2\pi f t} df = \frac{e^{j2\pi F_c t} - e^{-j2\pi F_c t}}{j2\pi t} \\ &= 2F_c \frac{\sin(2\pi F_c t)}{2\pi F_c t}\end{aligned}$$

Cette réponse impulsionnelle est échantillonnée pour fournir la réponse impulsionnelle du filtre numérique :

$$h(n) = T_e g(nT_e) = 2F_c T_e \frac{\sin(2\pi F_c nT_e)}{2\pi F_c nT_e}$$

Pour $F_c = \frac{F_e}{10}$, on obtient numériquement :

$$h(n) = 0.2 \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{5}\right)}{n \frac{\pi}{5}}$$

Deux problèmes surgissent :

1. la réponse impulsionnelle est infinie. Pour la rendre finie, on tronque cette réponse (fenêtre rectangulaire) ; on ne prend que 17 échantillons, de $n = -8$ à $n = +8$.

2. le filtre n'est pas causal : il répond avant l'impulsion. Il n'est donc pas réalisable physiquement. Pour le rendre causal (et donc réalisable), on translate cette réponse de 8 échantillons : $h(-8)$ devient $h(0)$, $h(-7)$ devient $h(1)$... $h(8)$ devient $h(16)$.

L'ensemble des opérations de synthèse est résumé page suivante. Valeurs des coefficients :

k	0	1	2	3	4
a_k	-0.037841	- 0.043247	-0.031183	0	0.046774
k	5	6	7	8	9
a_k	0.10091	0.15137	0.1871	0.2	0.1871
k	10	11	12	13	14
a_k	0.15137	0.10091	0.046774	0	-0.031183
k	15	16			
a_k	-0.043247	-0.037841			

Dans le tableau on remarque qu'on retrouve la propriété $h(k) = h(16 - k)$ et l'argument variera de façon linéaire traduisant un retard de 8.

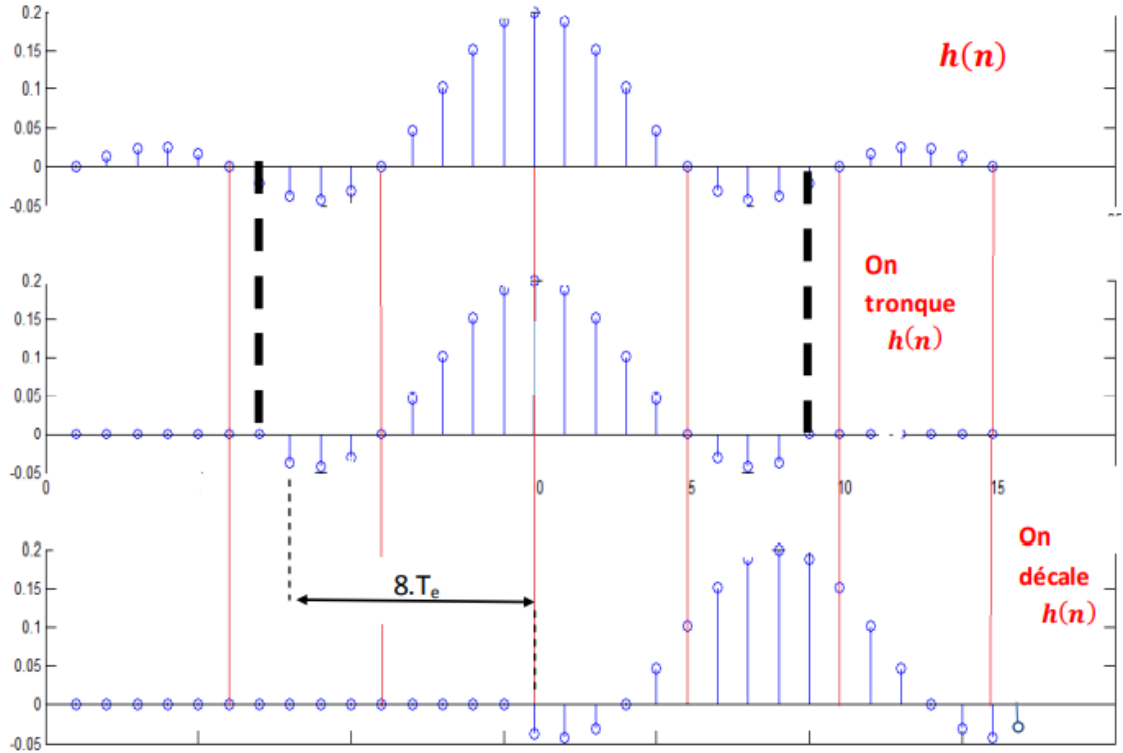


Figure 9: étapes de calcul de la réponse impulsionnelle du filtre numérique.

B. Echantillonnage en fréquence

On décide d'échantillonner en fréquence anal on a la réponse en fréquence du filtre analogique prototype $G_{anal}(j\omega)$. On définit donc la suite :

$$H(k) = G_{anal}\left(jk \frac{\omega_e}{N}\right) \quad (10)$$

Où N est le nombre d'échantillons. En reprenant le même exemple que précédemment $N = 17$, $H(0)=H(-1)=H(1)=1$ et $H(2)=H(-2)=\dots=H(8)=H(-8)=0$. On peut en déduire, par transformation de Fourier discrète (TFD), les valeurs de la réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (11)$$

Dans notre cas :

$$h(n) = \frac{1}{17} \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{17}n} + e^{j\frac{2\pi}{17}n} \right) = \frac{1}{17} \left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}n\right) \right) \text{ avec } -8 \leq n \leq 8$$

Enfin, pour rendre ce filtre réalisable physiquement, on translate cette réponse impulsionnelle de 8 échantillons. L'ensemble de ces opérations est résumé page suivante. La figure ci-dessous indique la réponse en fréquence de chaque filtre.

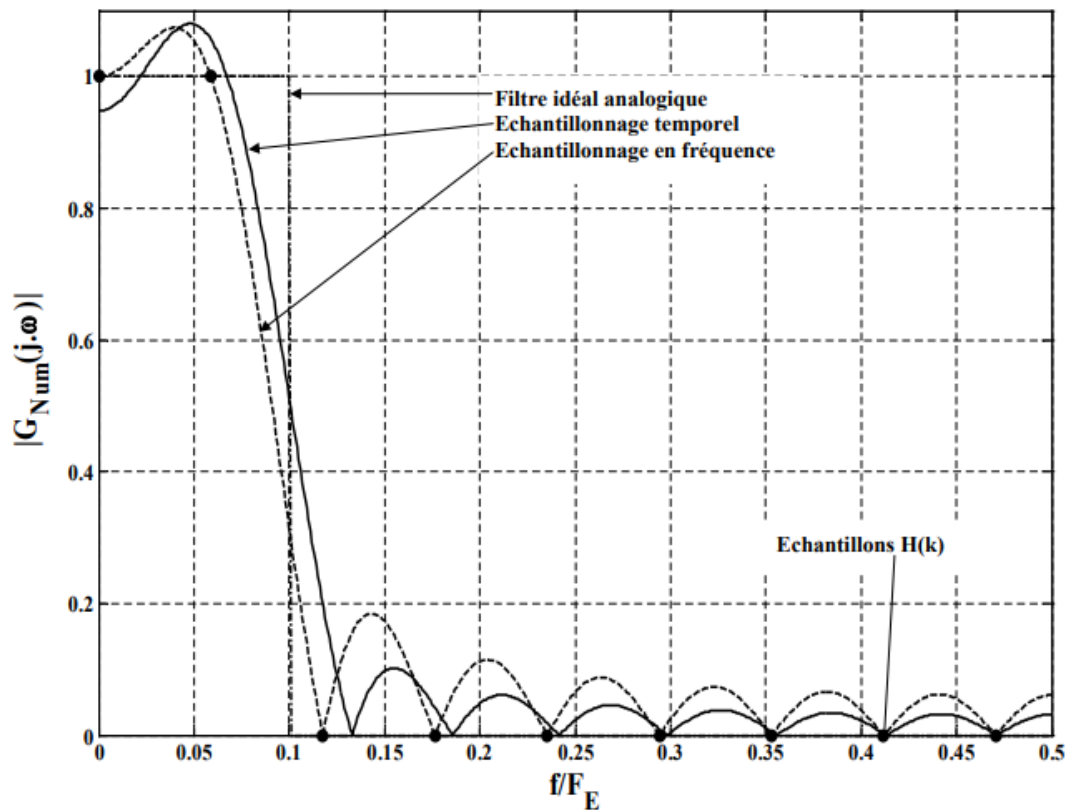
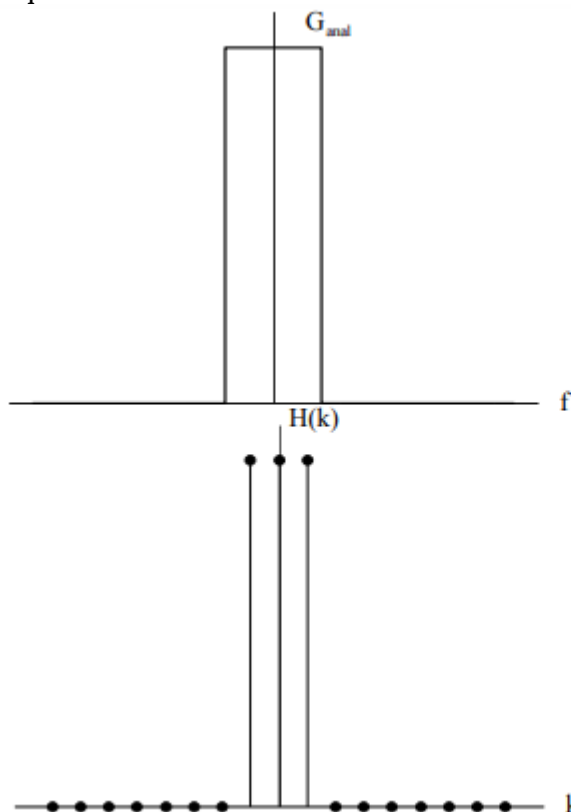


Figure 9: La réponse en fréquence de chaque filtre.

Exemple de Synthèse d'un filtre passe-bas « idéal » ($F_C = \frac{F_E}{10}$) : un échantillonnage en fréquence

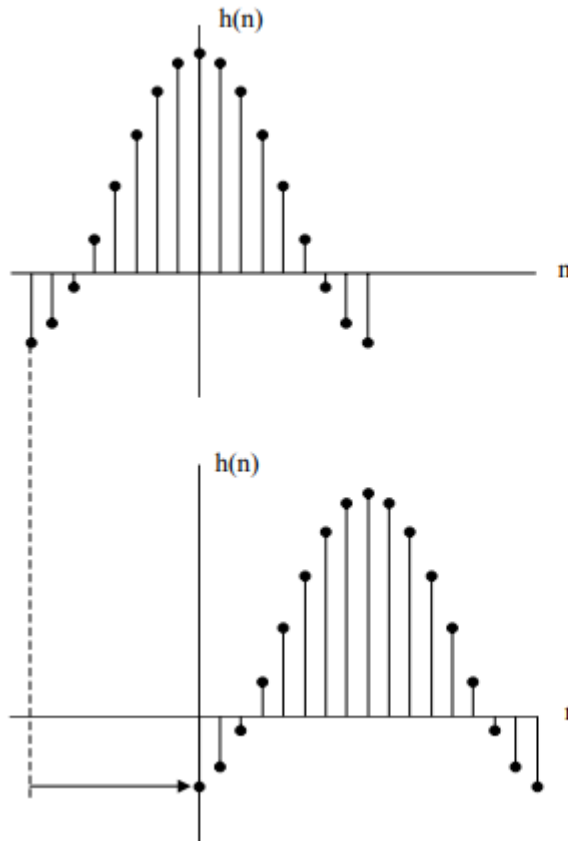


Réponse en fréquence du filtre analogique prototype

$$G_{anal}(j, \omega)$$

Echantillonnage en fréquence :

$$H(k) = G_{anal}\left(jk \cdot \frac{\omega_E}{N}\right)$$



Transformée de Fourier Discrète :

$$h(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-N/2}^{N/2} H(k) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} k \cdot n}$$

Décalage
(filtre réalisable physiquement)

3.2 Synthèse des filtres R.I.I

Les différentes méthodes de synthèse :

Il existe plusieurs méthodes de synthèse des filtres RII, suivant le critère qu'on s'impose :

- a- La réponse temporelle imposée est : - une réponse impulsionnelle alors la méthode est appelée méthode d'invariance impulsionnelle - réponse indicielle alors la méthode est appelée méthode d'invariance indicielle
- b- Simulation numérique d'une équation différentielle on a la méthode d'Euler et la méthode des trapèzes
- c- la réponse en fréquence imposée alors la méthode est appelée transformation bilinéaire

Dans ces méthodes, on cherche à réaliser un filtre numérique à partir d'un filtre analogique prototype de fonction de transfert $G_{anal}(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ avec $\tau = T_e$

A. Invariance impulsionnelle

Dans cette méthode on procède de la manière suivante:

$$G_{anal}(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \xrightarrow{\text{Transformée de Laplace}} g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau} t} \gamma(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Echantillonnage}} h(n) = T_e g(nT_e) = \frac{T_e}{\tau} \left(e^{-\frac{T_e}{\tau}} \right)^n u(n)$$

$$\xrightarrow{\text{Transformée en Z}} H(Z) = \frac{T_e}{\tau} \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}} Z^{-1}}$$

Remarque : $G_{anal}(p)$ possède un pôle (valeur de p rendant $G_{anal}(p)$ infini) : $p = -\frac{1}{\tau}$
 $H(Z)$ possède un pôle : $Z = e^{-\frac{1}{\tau}} = e^{T_e p}$, ou p est le pôle de $G_{anal}(p)$.

B. Invariance indicielle

$$G_{anal}(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \Rightarrow Y(p) = G_{anal}(p) \Gamma(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \tau p}$$

Dans cette méthode on fait la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$ qui donne $y(t)$ puis on échantillonne $y(t)$ qui va donner $y(n)$ (numérique) et enfin la TR en Z de $y(n)$.

$$\xrightarrow{\text{Laplace}} y(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) \gamma(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Echantillonnage}} y(n) = \left(1 - e^{-\frac{nT_e}{\tau}}\right) u(n)$$

$$\xrightarrow{\text{Transformée en } Z} Y(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}} Z^{-1}} = H(Z) \cdot U(Z)$$

$$= H(Z) \cdot \frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

On obtient donc l'expression de $H(z)$:

$$H(Z) = (1 - Z^{-1})Y(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}} Z^{-1}} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}}\right) Z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}} Z^{-1}}$$

Chapitre 7 : Introduction à l'analyse et l'estimation spectrale

1. C'est quoi l'analyse spectrale ?

C'est l'ensemble des méthodes permettant de mettre en évidence les composantes périodiques présentes dans un signal, une série de données, une courbe, une image ou même une vidéo.

Donc elle permet d'identifier le contenu spectral (ensemble des fréquences) présentes dans ces données traitées.

2. Pour quelles applications ?

Les données mesurées et/ou acquises (signal, images, vidéos donnéesetc) doivent être traitées surtout numériquement (par exemple un filtrage, un débruitage, une extraction, une détection, une compression, une synthèseetc). Souvent il est plus intéressant d'effectuer ces traitements dans le domaine spectral (dit domaine transformé) au lieu du domaine original dit direct (temporel, spatial, spatio-temporel ...etc).

3. Quels sont les outils de base pour l'analyse spectrale ?

Sans nul doute la transformée de Fourier ...!

Mais aussi bien d'autres transformées linéaires et surtout orthogonales.

D'ailleurs pourquoi on les appelle transformées linéaires et aussi orthogonales? (Voir cours cité en [12]),

Cependant,

- 1, l'intégrale de Fourier représente plusieurs limitations, entre autres, elle nécessite la connaissance de tout l'historique du signal et elle peut aussi diverger (non sommable),
- 2, les signaux informatifs ont généralement des caractéristiques aléatoires et ils ne peuvent pas être représentés par des modèles aléatoires,

4. Analyse spectrale des processus stochastiques

4.1 Introduction

Pourquoi on doit surtout s'intéresser à l'analyse spectrale des processus stochastiques (signaux aléatoires) et ne pas se contenter uniquement de l'analyse spectrale des signaux déterministes ?

4.2 Les signaux utiles informatifs

D'après la théorie de l'information :

- Seuls les signaux ayant certaines caractéristiques aléatoires peuvent transmettre de l'information.
- De plus ce sont les données les moins probables qui portent plus d'informations
- Un signal naturel (un son, une image naturelle ...etc) est plus ou moins imprévisible.

Donc pas de modèles mathématiques déterministes pour représenter les signaux informatifs

D'autre part, ces signaux informatifs aléatoires peuvent ne pas être intégrables (ou sommables) ce qui veut dire que l'intégrale de Fourier n'existe pas.

4.3 Les bruits et perturbations

- Les bruits et les perturbations qui dégradent les signaux mesurés, acquis ou encore transmis sont également aléatoires,

Origine des "bruits"

- ✓ Conditions de prises de sons (Concert en plein air)
 - ✓ Bruits environnants (Applaudissements, personne qui tousse)
 - ✓ Bruits électroniques (le "50 Hz")
 - ✓ Saturation
 - ✓ Dégradation de la qualité par codage (MP3)
 - ✓ Dégradation des enregistrements — etc.
-
- Parmi les bruits les plus utilisés nous avons
 - le bruit blanc
 - le bruit coloré par exemple rose
 - ...etc

Bruit blanc

- Un processus aléatoire $x(t)$ est dit "bruit blanc" si sa densité spectrale de puissance est constante pour toutes les fréquences :
- Dès lors un tel bruit aura une puissance moyenne totale infinie ...!

4.4 Spectre d'un signal aléatoire

Pour avoir une information pertinente sur le processus aléatoire, nous avons besoin de faire recours à une analyse statistique, moyennant sur des grands nombres de réalisation (ou sur des temps très longs pour des signaux ergodiques). Une seule réalisation n'est généralement pas suffisante, car elle ne contient pas suffisamment d'information sur le processus aléatoire : en effet, si on calcule la TF d'un signal aléatoire individuel, on n'obtient en général que peu d'information. La figure 1 montre un exemple où on a calculé la TF de trois réalisations d'un même phénomène aléatoire [13].

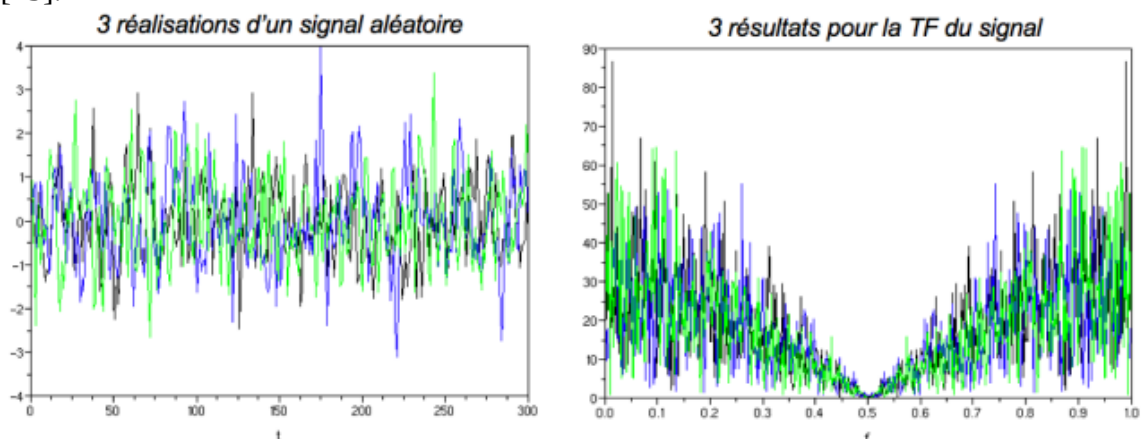


Figure 1 : Signaux aléatoire et leurs transformée de Fourier.

On peut en déduire que la TF d'un signal aléatoire n'est pas un élément caractéristique. Ce qu'il nous faudrait, c'est probablement de calculer la moyenne des TF d'un grand nombre de réalisations du même signal. C'est une solution pratique à laquelle on va finir par arriver ; mais nous allons suivre ici une autre piste. Nous pouvons en effet

mieux exploiter ce que nous avons fait jusqu'ici pour l'étude des signaux aléatoires, et nous dire que nous avons déjà un outil statistique qui contient de l'information par exemple sur la répétition du signal : c'est la fonction de corrélation. Cette fonction du temps présente en effet des oscillations caractéristiques si le signal contient des périodicités cachées, décroît à une vitesse caractéristique de la perte de mémoire dans le signal : on peut donc se dire que la TF de la fonction de corrélation pourrait être un bon candidat pour obtenir une sorte de spectre du signal, car on peut s'attendre à des pics caractéristiques de ses oscillations, à une TF d'autant plus étroite que la fonction de corrélation est étendue dans le temps... Voyons donc qu'est-ce qu'on peut obtenir.

5. Estimation spectrale

5.1 Introduction

Dans le domaine de la statistique, l'incertitude est omniprésente, tout comme dans la théorie des probabilités. Cependant, une différence majeure réside dans l'approche adoptée pour traiter cette incertitude. En théorie des probabilités, on suppose souvent que la loi sous-jacente est connue avec précision, et l'objectif principal est de caractériser les propriétés de la variable aléatoire qui suit cette loi. En revanche, en statistique, notre objectif est souvent inversé : à partir de données observées, nous cherchons à déduire des informations sur la loi sous-jacente qui a généré ces données. Dans cette perspective, l'estimation spectrale joue un rôle crucial en nous permettant de comprendre les propriétés fréquentielles des processus aléatoires, ce qui est essentiel pour tirer des conclusions fiables à partir de données empiriques. Au cours de cette exploration, nous offrirons un aperçu de la théorie de l'estimation, en définissant ce qu'est un estimateur, en examinant ses qualités souhaitables, et en abordant des techniques spécifiques telles que l'estimation des moments et les méthodes d'estimation de la densité spectrale.

5.2 Le problème d'estimation

On observe N valeurs $x = (x_1, \dots, x_N)$ provenant de tirage indépendants d'une variable aléatoire X . Cette v.a a pour densité de probabilité $f(x; \theta)$ ou θ représente un ensemble de paramètres inconnus considérés comme étant déterministes, scalaire ou vectoriel. On notera $X = (X_1, \dots, X_N)$ le vecteur aléatoire dont une réalisation est x . Pour extraire θ , il faut trouver la transformation :

$$\theta = f(x)$$

Dans l'équation, où x est une variable aléatoire, θ est également considérée comme une variable aléatoire. Cependant, une relation exacte entre θ et x telle que décrite par cette équation n'est pas possible à établir.

La variable aléatoire $\theta = f(x)$ est notée $\hat{\theta}$ ou $\hat{\theta}(x)$ est s'appelle **estimateur** du paramètre θ . Une réalisation de cette v.a, noté θ , est appelée estimée du paramètre.

La théorie de l'estimation a pour principal objectif d'approcher numériquement la valeur du paramètre θ .

On distingue deux formes d'estimation :

- 1- Estimation ponctuelle : attribuer une valeur unique à θ (ou encore à θ).
- 2- Estimation par intervalle de confiance : attribuer un ensemble de valeurs à θ . Règle générale, l'estimation se fait au moyen de l'information puisée dans un échantillon.

Une estimation de θ est une fonction mesurable $\hat{\theta}(x)$ des observations. La valeur de l'estimée dépend de la réalisation x . Des exemples d'estimateur sont :

- $\hat{\theta}_1(x) = x_1$,
- $\hat{\theta}_2(x) = \frac{(x_1+x_1)}{2}$,
- $\hat{\theta}_3(x) = (\min\{x_1, \dots, x_n\} + \max\{x_1, \dots, x_n\})$,
- $\hat{\theta}_1(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Il y a plusieurs estimateurs possibles dans un problème donné. C'est au moyen de critères que l'on va départager les estimateurs

Dans ce qui suit, $\hat{\theta}$ sera une notation pour un estimateur du paramètre $\hat{\theta}(x)$.

5.3 Qualité d'un estimateur

Un estimateur, noté $\hat{\theta}$, est une fonction des variables aléatoires. En tant que tel, il possède une espérance $E[\hat{\theta}]$ et une variance $Var(\hat{\theta})$. L'objectif principal de l'estimation statistique est de contrôler l'erreur entre l'estimateur $\hat{\theta}$ et la vraie valeur du paramètre à estimer, θ . Il est important de noter que bien que l'estimateur puisse être parfois interprété comme une variable aléatoire, cette interprétation peut induire en erreur si elle n'est pas clairement précisée.

La qualité des estimateurs s'exprime par leur convergence, leur biais, leur efficacité et leur robustesse. Diverses méthodes permettent d'obtenir des estimateurs de qualités différentes.

5.3.1 Le biais

Ou la moyenne de l'erreur.

Une variable aléatoire fluctue autour de son espérance. On peut donc souhaiter que l'espérance de $\hat{\theta}$ soit égale à θ , autrement dit qu'en « moyenne » l'estimateur ne se trompe pas.

On définit le biais de la façon suivante :

$$Biais(\hat{\theta}) \equiv b(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta \quad (1)$$

5.3.2 la variance de l'estimateur

La variance de l'estimateur, souvent notée $Var(\hat{\theta})$, mesure la dispersion des valeurs de l'estimateur autour de sa moyenne, reflétant ainsi sa précision dans l'estimation du paramètre θ . Cette mesure est obtenue en prenant la moyenne des carrés des écarts entre chaque observation de l'estimateur et sa moyenne, permettant ainsi d'évaluer la variabilité de l'estimateur.

$$Var(\hat{\theta}) \equiv \sigma_E^2 = E \left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 \right] \quad (2)$$

$E(\hat{\theta})$ représente l'espérance de l'estimateur $\hat{\theta}$.

5.4 L'erreur quadratique moyenne - MSE : Mean Squared Error

Elle permet de définir la qualité de l'estimateur au second degré.

$$MSE(\hat{\theta}) \equiv E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var[\hat{\theta}] - b(\hat{\theta})^2 \quad (3)$$

Plus l'MSE d'un estimateur est petit, plus l'estimateur est considéré précis.

5.5 Efficacité

Supposons que les deux estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ soient non biaisés alors on dira que $\hat{\theta}_1$ est plus efficace que $\hat{\theta}_2$ si

$$Var[\hat{\theta}_1] < Var[\hat{\theta}_2]$$

Ainsi, parmi la classe des estimateurs sans biais de θ , l'estimateur sans biais à variance minimale est celui qui a la plus petite variance.

5.6 Performance d'un estimateur

Dans cette section, nous examinons les performances d'un estimateur en explorant ses propriétés de biais et de consistance. Nous démontrons comment les estimations peuvent être affectées par la présence de biais et comment la consistance de l'estimateur peut influencer la précision des résultats. Cette analyse permettra une meilleure compréhension des performances de l'estimateur dans diverses applications statistiques.

Les critères de performance de l'estimateur cherchent à minimiser la moyenne des erreurs, qui représente le biais de l'estimateur (voir l'équation (1)), ainsi que la variance de l'estimateur ((voir équation (2)), une mesure de la variabilité des estimations autour de leur moyenne. Cette dernière, parfois appelée également l'étendue des fluctuations, reflète la capacité de l'estimateur à produire des résultats cohérents et peu variables dans différentes situations.

Définition 1. L'estimateur est dit sans biais, ou non biaisé si le biais d'estimation est nul.

$$\hat{\theta} \text{ non biaisé} \Rightarrow b(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta = 0 \Leftrightarrow E[\hat{\theta}] = \theta$$

Définition 2. L'estimateur $\hat{\theta}$ est dit asymptotiquement non biaisé si le biais existe mais tend vers zéro lorsque la durée d'observation augmente.

$$\hat{\theta} \text{ asymptotiquement non biaisé} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} b(\hat{\theta}) = 0$$

Définition 3. L'estimateur est dit consistant si l'estimateur tend en probabilité vers la valeur exacte du paramètre lorsque la durée de l'observation augmente.

$$\hat{\theta} \text{ consistant} \Leftrightarrow \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{(x)} = \theta$$

En pratique, la variance étant une quantité positive,

Définition 4. L'estimateur sera consistant si la variance d'estimation s'annule lorsque la durée de l'observation augmente.

$$\hat{\theta} \text{ consistant} \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_E^2 = 0$$

5.7 Estimation des moments

On développe dans ce paragraphe certaines méthodes d'estimation des caractéristiques temporelle et fréquentielle représentées par les moyennes et les fonctions de corrélation d'une part et les densités spectrales d'autre part.

5.7.1 Estimation de la moyenne

Cas continu

$X(t)$ étant un processus stationnaire ergodique du second ordre, on cherche à estimer la moyenne théorique :

$$m = E\{x(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt = \text{constante}$$

à partir d'une seule réalisation de durée T de $x(t)$, soit :

$$\hat{m} = E\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (4)$$

(4) peut être considéré comme réalisation particulière de la v.a :

$$\hat{M} = E\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (5)$$

A. Biais d'estimation

Le biais est égal à :

$$b(\hat{M}) = E\{\hat{M} - m\} = E\{\hat{M}\} - m = 0 \quad (6)$$

Puisque

$$E(\hat{M}) = E\left\{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right\} = \frac{1}{T} \int_0^T E\{x(t)\} dt = \frac{1}{T} \int_0^T m dt = m \quad (7)$$

$\hat{M}$ est donc un estimateur sans biais.

B. Variance d'estimation

La variance est égale à :

$$\sigma_E^2 = E\{(\hat{M} - m)^2\} = E\{\hat{M}^2\} - m^2 \quad (8)$$

Calcul de $E\{\hat{M}^2\}$

$$\begin{aligned}
E\{\hat{M}^2\} &= E\left\{\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x(t)x(u)dtdu\right\} = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E\{x(t)x(u)\}dtdu \\
&= \int_0^T \int_0^T E\{x(t)x(u)\}dtdu = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_x dtdu
\end{aligned} \tag{9}$$

En faisant le changement de variable :

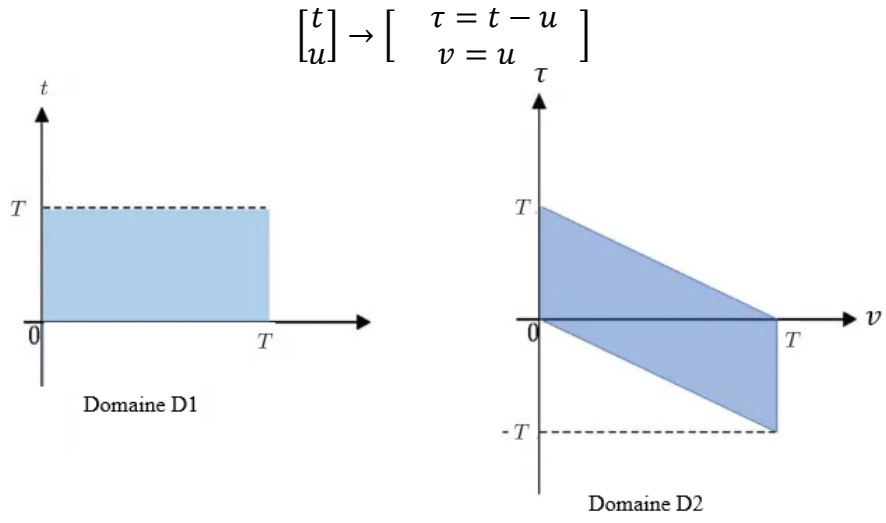
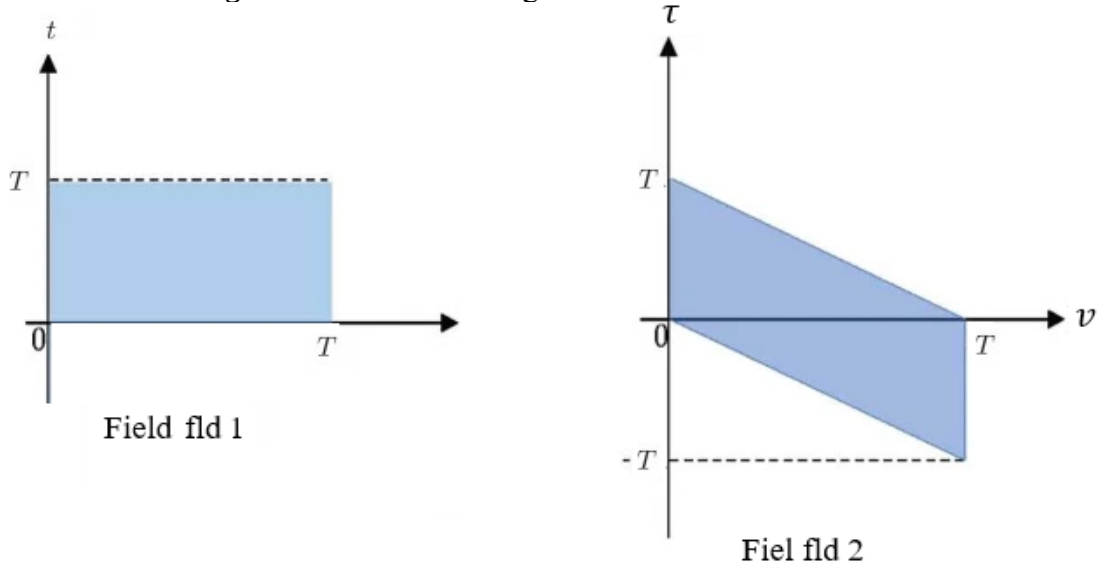


Figure 2: Domaine d'intégration du moment d'ordre 2.



Le domaine d'intégration D1 est transformé en le domaine D2, (Figure 2) et le moment d'ordre 2 devient :

$$\begin{aligned}
E\{\hat{M}^2\} &= \frac{1}{T^2} \left[\int_{-T}^0 (T + \tau) R_x(\tau) d\tau + \int_0^T (T - \tau) R_x(\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_x(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{10}$$

Ce qui donne une variance égale à :

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) [R_x(\tau) - m^2] d\tau \tag{11}$$

La variance d'estimation représente donc la moyenne de la fonction d'autocorrélation centrée $R_{xc}(\tau) = R_x(\tau) - m^2$ pondérée par la fonction triangle sur la durée $[-T, +T]$.

Comme

$$\sigma_E^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) d\tau \leq \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xc}(\tau) d\tau = \frac{R_{xc}(0)}{T} \tag{12}$$

La variance tend vers zéro lorsque le support T de la réalisation augmente. $\hat{M}$ est donc un estimateur consistant.

Cas discret

La moyenne et la fonction d'autocorrélation d'un processus discret $x(k)$ causal stationnaire et ergodique au second ordre sont respectivement égale à :

$$m = E\{x(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) \tag{13}$$

$$R_x(k) = E\{x(i)x(i-k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(i)x(i-k) \tag{14}$$

Pour une réalisation discrète $\{x(1), x(2), \dots, x(N-1)\}$, de hauteur N, on estime cette moyenne par :

$$\hat{M} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) \tag{15}$$

$\hat{M}$ est appelée la moyenne empirique.

A. Biais d'estimation

$$E\{\hat{M}\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)\right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E\{x(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m = m \tag{16}$$

L'estimateur $\hat{M}$ est donc sans biais et convergent de m.

B. Variation d'estimation

La variance d'estimation est égale à :

$$\sigma_E^2 = E\{(\hat{M} - m)^2\} = E\{\hat{M}^2\} - m^2$$

- Si m est connu, $S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - m)^2$ est sans biais pour σ^2 .
- Si m est inconnu, $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$ est sans biais pour σ^2 .

Avec un moment d'ordre deux :

$$E\{\hat{M}^2\} = E\left\{\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N x(i) x(j)\right\} = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N E\{x^2(i)\} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1, j \neq k}^N E\{x(i)x(j)\} \right] \quad (17)$$

Si les échantillons sont indépendants ou décorrélés, ce qui peut advenir lorsque les échantillons sont suffisamment éloignés les uns des autres, on a :

$$E\{x(i)x(j)\} = m^2 \cdot \delta(i - j) \quad (18)$$

Avec un moment d'ordre deux :

$$E\{\hat{M}^2\} = \frac{1}{N^2} [N(\sigma^2 + m^2) + (N^2 - N^2)] = \frac{\sigma^2}{N} + m^2 \quad (19)$$

$$\sigma_E^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad (20)$$

La relation (20) montre que la précision de l'estimation par moyenne est fonction de $1/N$ en puissance et de $1/\sqrt{N}$ en amplitude.

$$\sum_{k=1}^N \sum_{j=1, j \neq k}^N E\{x(i)x(j)\} = 2 \sum_{j=1}^N (N - k) R_x(k) \quad (k = j - i) \quad (21)$$

Et le moment d'ordre deux devient :

$$E\{\hat{M}^2\} = \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^N (N - k) R_x(k) + \frac{\sigma^2 + m^2}{N} \quad (22)$$

La fonction d'autocorrélation étant une fonction paire vérifiant $R_x(0) = \sigma^2 + m^2$, on déduit l'expression de la variance d'estimation :

$$\sigma_E^2 = \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^N \frac{N - |k|}{N} R_{xc}(k) \quad (23)$$

Avec $R_{xc}(k) = R_x(k) - m^2$ l'autocorrélation du processus centré.

On retrouve la formulation discrète de l'expression (12), ou la valeur de σ_E^2 dans le cas d'échantillons indépendants ou décorrélés correspond au terme à l'origine dans σ_E^2 dans le cas d'échantillons dépendants ou corrélés. En effet, de

$$R_{xc}(k) = E\{(x(i) - m)(x(i - k) - m)\} = \sigma^2 \delta(k) \quad (24)$$

On vérifie que

$$\sigma_E^2 = \frac{2}{N^2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{N - |k|}{N} \sigma^2 \delta(k) = \frac{\sigma^2}{N} \delta(k) \quad (25)$$

De la même manière que pour les processus continus, l'estimateur discret de la moyenne est un estimateur consistant.

Exemple:

Considérons X un caractère tel que $E(X) = \mu$ et $var(x) = \sigma^2$. Soit $\varepsilon : X_1, \dots, X_n$ un échantillon associé à X . Soient:

$$\hat{\mu}_1 = X_1,$$

$$\hat{\mu}_2 = (X_1 + X_2)/2,$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Parmi les estimateurs suivants, lequel est sans biais et possède une variance minimale ?

Ces trois estimateurs sont dans la classe des estimateurs sans biais:

$$E(\hat{\mu}_1) = E(X_1) = \mu,$$

$$E(\hat{\mu}_2) = \{E(X_1) + E(X_2)\}/2 = (\mu + \mu)/2 = \mu,$$

$$E(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu.$$

On trouve aussi : $var(\hat{\mu}_1) = \sigma^2$; $var(\hat{\mu}_2) = \sigma^2/2$ et $var(\hat{\mu}_3) = \sigma^2/n$

C. Densité spectrale de puissance et théorème de Wiener-Khintchine

Soit X un processus stationnaire. La densité spectrale de puissance (DSP) S_x est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation R_x .

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (26)$$

On rappelle que :

$$- S_x(f) = E[|\hat{X}(f)|^2] \quad R_x(t) = E[x(\tau)x(\tau+t)] \quad (27)$$

- Processus stationnaire Un processus est dit stationnaire si ses statistiques (moyenne, variance, etc) sont invariantes par translation.

Le théorème de Wiener-Khintchine permet d'interpréter la DSP comme une distribution de puissance.

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{xx}(f)|^2 df = p(x): \quad p(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (28)$$

5.8 Estimation des densités spectrales

On desire ici estimer la DSP théorique du signal $x(t)$:

$$\gamma_x(\omega) = TF[R_x(\tau)] \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(\omega)|^2\}}{T} \quad (29)$$

$$R_{xc}(k) = TF[x(t)f(t)] = \int_0^T x(t)f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (30)$$

La TF du signal pondéré par une fenêtre $f(t)$ de largeur T .

La fonction $X_T(\omega, T) \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$ est une v. a appelée périodogramme qui renseigne sur le comportement fréquentiel du processus stationnaire $x(t)$ à l'intérieur de l'intervalle $[0, T]$. D'où l'idée première de prendre pour $\gamma_x(\omega)$ la limite de $X_T(\omega, T)$ quand T tend vers l'infini, soit :

$$\gamma_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \quad (31)$$

Cet estimateur est peu utilisé à cause de ses faibles performances, surtout en ce qui concerne la variance d'estimation. En effet, bien qu'asymptotiquement non biaisé, cet estimateur n'est pas consistant.

A la place, et pour des raisons d'environnement et/ou de précision, des techniques analogiques basées sur le filtrage, la quadrature et l'intégration, reposant sur la notion intuitive de la DSP déjà rencontrée, ainsi que des techniques numériques telles que le periodogramme ou le corrélogramme, ou encore des méthodes paramétriques, sont utilisées [15].

5.8.1 Méthode périodogramme

A partir de N données temporelles $x(1), x(2), \dots, x(N)$, on veut estimer la DSP du signal $x(k)$ par :

$$\hat{\gamma}_x(\omega) = \frac{1}{N} |X(\omega)|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x(k) f(k) e^{-jk\omega} \right|^2 \quad (32)$$

L'estimation peut se faire soit par estimation de la fonction de corrélation et application de la TF : c'est la technique du corrélation, ou bien par application de la TF et quadrature : c'est la technique du périodogramme.

A. Periodogramme simple :

La figure 3 donne le principe de réalisation.

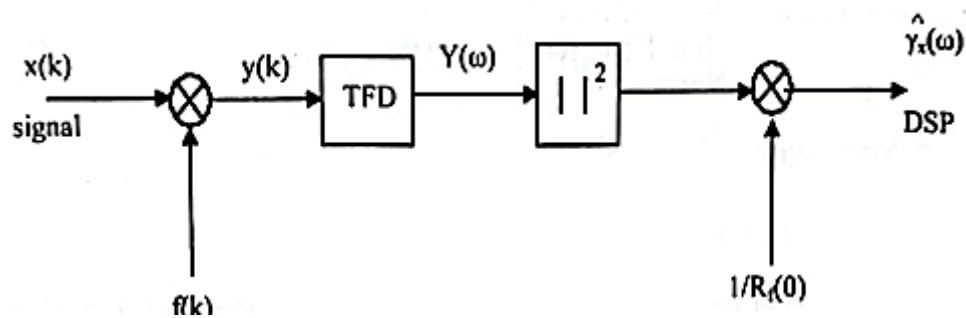


Figure 3: Périodogramme simple.

On calcule la transformée de Fourier discrète d'une réalisation de durée N du signal. Le spectre de puissance obtenu, affecté d'un facteur de normalisation, représente l'estimée de la DSP qui est donc égale à :

$$\hat{\gamma}_x(\omega) = \frac{1}{R_f(0)} |Y(\omega)|^2 = \frac{1}{N \cdot R_f(0)} \left| \sum_{k=1}^N x(k) f(k) e^{-jk\omega} \right|^2 \quad (33)$$

Dans le cas d'une fenetre rectangulaire $f(k) = \text{rec}\left(\frac{k}{N}\right)$, on retrouve l'expression (32) de la DSP :

$$\hat{y}_x(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x(k) e^{-jk\omega} \right|^2$$

Ce qui, développé, donne :

$$\hat{y}_x(\omega) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{N} x(i) x(i-k) \right] e^{-jk\omega} \quad (34)$$

Où le terme entre crochets désigne l'estimée de la fonction d'autocorrélation $\hat{R}_x(k)$.

Remarque: dans la définition (30), de la TFD $Y(\omega)$ de $y(k)$ est calculée avec un facteur de normalisation égal à $1/\sqrt{N}$ et identique à celui qui sera considéré pour la TFD inverse.

B. Fondement théorique [14]

Le théorème de Wiener-Khintchine nous a permis de relier la DSP, que nous avons défini initialement comme la TF de la fonction de corrélation, à la TF du signal lui même. De manière exacte, la DSP s'écrit comme :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

C'est à dire comme le rapport entre le module carré de la TF du signal et sa durée, pour une durée infinie.

Pratiquement, lorsqu'on analyse le signal issu d'une mesure, on aura affaire à un signal de durée limitée : tout ce qu'on pourra calculer est alors la grandeur

$$\frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

avec T la durée du signal. Le théorème de Wiener-Khintchine nous permet de comprendre que la DSP est bien liée à la TF du signal de la même manière que la puissance pour un signal déterministe : c'est le module care de la TF su signal qui est associé à sa distribution de puissance. Pour un signal de durée finie, cependant, la grandeur de l'équation (5) peut être considérée comme un estimateur de la DSP, mais, comme nous l'avons vu, il ne contiendra pas beaucoup d'information, surtout pour des durées T pas très importantes.

On peut cependant améliorer la statistique en recourant à une moyenne d'ensemble : en moyennant $\frac{1}{T} |X_T(f)|^2$ sur plusieurs réalisations du signal, on obtient ce qu'on appelle le **périodogramme** :

$$\text{Periodigramme} = \left\langle \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right\rangle_{N \text{ realisation}} \sim S_{xx}(f)$$

La moyenne sur plusieurs réalisation « compense » partiellement la durée finie du signal enregistré (ergodique) et permet de mieux approcher la limite théorique de définition de la DSP.

De la même manière, on peut obtenir une estimation raisonnable de la fonction de corrélation d'un enregistrement de durée limitée d'un signal en moyennant sur plusieurs réalisations. Cela s'appelle le **corrélogramme** :

$$\text{Corrélogramme} = \langle \varphi_{xTxT} \rangle_{N \text{ realisation}} \sim \varphi_{xx}(t)$$

La figure 4 montre un exemple d'utilisation de périodogramme et corrélogramme sur un signal aléatoire construit de manière à contenir une partie corrélée. On voit bien comment, à l'augmenter du nombre de réalisations, les estimateurs approchent de mieux en mieux leur limite théorique (une fonction triangle pour la fonction de corrélation, d'où un sinus cardinal carré pour la DSP).

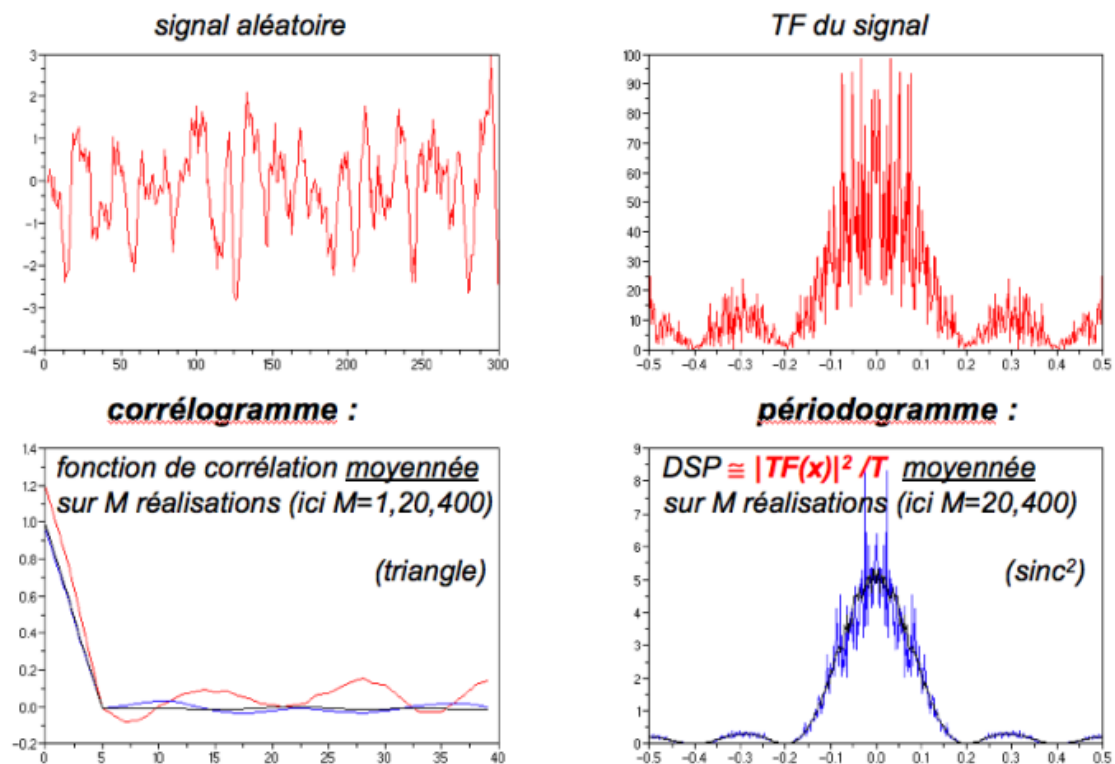


Figure 4 : périodogramme et corrélogramme sur un signal aléatoire.

5.8.2 Méthodes paramétriques

La modélisation porte soit sur le système générant l'observation dont on veut estimer la DSP : méthodes paramétriques, ou bien sur le signal lui-même : méthode de maximum de vraisemblance [15].

Les méthodes d'estimation spectrale paramétriques utilisent un modèle pour obtenir une estimation du spectre. Ces modèles reposent sur une connaissance *a priori* du processus et peuvent être classées en trois grandes catégories :

- Modèles autorégressif (AR)
- Modèles à moyenne ajustée (MA)
- Modèles autorégressifs à moyenne ajustée (ARMA).

L'approche paramétrique se décompose en trois étapes :

1. Choisir un modèle décrivant le processus de manière appropriée.
2. Estimer les paramètres du modèle à partir de données disponibles.
3. Estimer le spectre à partir des paramètres du modèle.

A. Modèles autorégressif (AR)

Le processus AR signifie **autorégressif**.

Elle suppose que le signal, dont on veut estimer la DSP, représente la sortie d'un bruit centré à travers un filtre linéaire autorégressif, tel que décrit dans la figure 5.

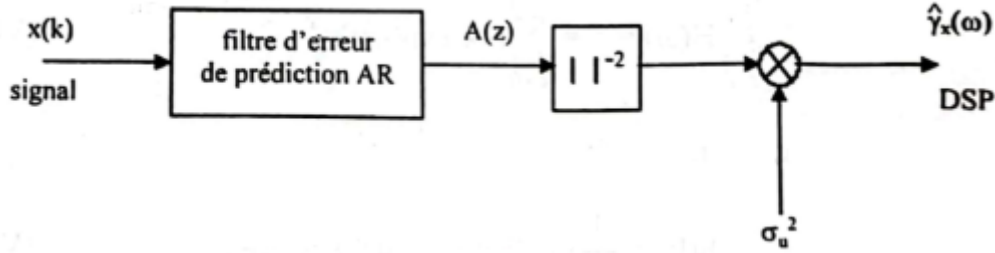


Figure 5 : estimation AR de la DSP.

Concrètement, si l'on considère un processus stationnaire $x(k)$, on considère qu'il est autorégressif d'ordre p si l'on peut **expliquer sa valeur à l'instant k en utilisant ses p termes précédents**.

Mathématiquement, cela signifie que :

$$\forall t: x(k) = \sum_{i=1}^p a_i x(k-i) + \epsilon_k \quad (35)$$

Le bruit ϵ_k étant blanc de puissance σ_u^2 et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ des réels.

On tire une réponse en Z du filtre égale à :

$$H(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^p a_i Z^{-i}} = \frac{1}{A(Z)}; \quad a_0 = 1 \quad (36)$$

Et une fonction d'autocorrélation du signal admettant une transformée en Z égale à :

$$R_x(Z) = X(Z)X(Z^{-1}) = \sigma_u^2 |H(Z)|^2 \quad (37)$$

Où le filtre $H(Z)$ est supposé stable.

la fonction d'autocorrélation du signal est égale au facteur σ_u^2 près, à celle du filtre.

Par changement de variable $Z \rightarrow \omega$ de la relation (37), on obtient la DSP du signal :

$$\gamma_x(\omega) = R_x[e^{j\omega}] = \frac{\sigma_u^2}{|\sum_{i=0}^p a_i e^{-j\omega i}|^2} \quad (38)$$

En fonction des coefficients AR du filtre et de la puissance du bruit d'entrée, que l'on aurait estimés par ailleurs en utilisant l'un des algorithmes comme algorithmes de Levinson, de Kalman AR.

B. Modèles à moyenne ajustée (MA)

MA signifie ‘moving average’ ou en français **moyenne mobile**.

Elle suppose que le signal dont on veut estimer la DSP est l’entrée d’un filtre MA, donnant une sortie une puissance considérée comme estimée de cette DSP.

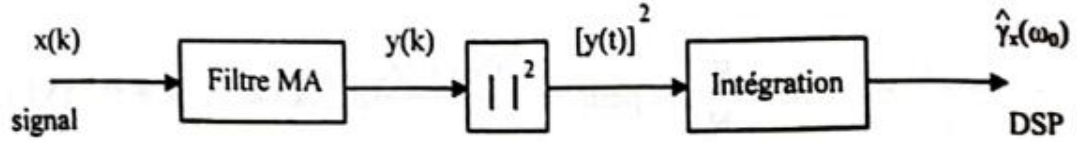


Figure 6: Estimation paramétrique MA de la DSP.

Soit $x(k)$ une série temporelle, on considère que c’est un processus MA d’ordre p si on peut exprimer sa valeur à l’instant t comme une combinaison linéaire d’erreur aléatoires (bruit blanc).

Mathématiquement on traduit cela par :

$$\forall t: x(k) = \epsilon_k + \sum_1^p a_i \epsilon_{k-i} \quad (39)$$

Le bruit ϵ_k étant blanc de puissance σ_u^2 et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ des réels.

C. Modèles autorégressifs à moyenne ajustée (ARMA)

Comme vous vous en doutez, le modèle ARMA est tout simplement une combinaison d’un processus AR et d’un processus MA. Cela permet de modéliser des séries temporelles plus complexes.

Un modèle ARMA d’ordre (p, q) s’écrit donc sous la forme :

$$\forall t: x(k) = \sum_1^p a_i x(k-i) + \epsilon_t + \sum_1^q B_i \epsilon_{k-i} \quad (40)$$

Avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q)$ des réels.

La réponse $H(Z)$ du filtre supposé stable, est alors égale à :

$$H(Z) = \frac{\sum_1^q B_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^p a_i Z^{-i}} = \frac{B(Z)}{A(Z)} ; a_0 = 1 \quad (41)$$

Ce qui donne une DSP du signal, égale à :

$$\gamma_x(\omega) = \frac{\sigma_u^2 |\sum_{i=0}^p B_i e^{-j\omega i}|^2}{|\sum_{i=0}^p a_i e^{-j\omega i}|^2} \quad (42)$$

La figure 7 illustre le schéma de principe de la DSP d’un processus ARMA.

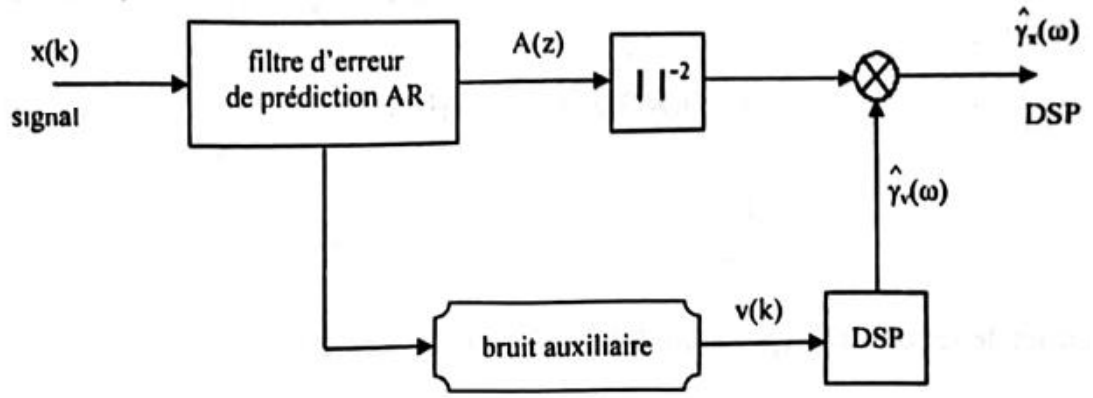


Figure 7: Estimation ARMA de la DSP.

Cependant, l'une des limitations de ce modèle est qu'**il ne peut modéliser que des séries temporelles stationnaires.**

Ainsi, il ne peut modéliser une série temporelle avec **une tendance linéaire croissante.** C'est pour pallier ce problème que le modèle ARIMA a été développé

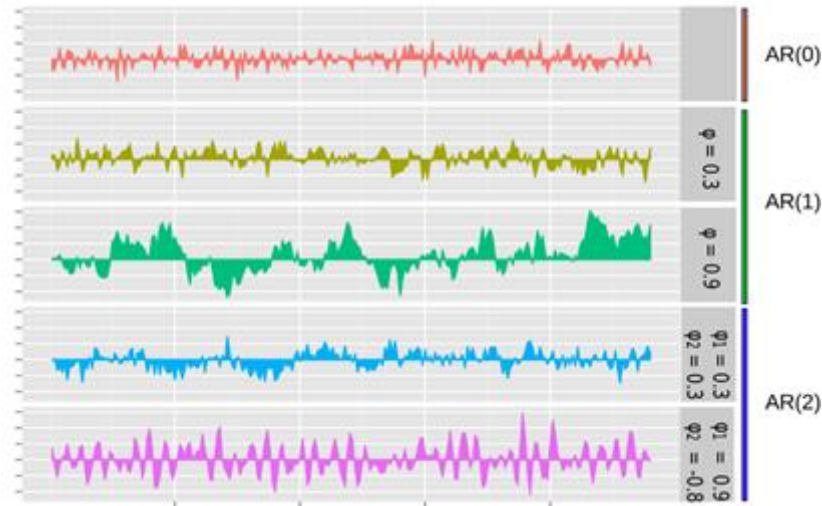


Figure 8: Exemples de processus AR.

5.8.3 Méthode de vraisemblance maximale (ML)

Développée par Capon (1961) [16], la méthode estime les coefficients d'un filtre numérique réjecteur adapté à la fréquence considérée, qui donne en sortie une puissance représentant la valeur de la DSP pour cette fréquence. Pour ce faire, on minimise la puissance du signal en sortie :

$$E\{y^2(k)\} = E\{(\sum_{i=0}^{M-1} h(i)x(k-i))^2\} = H^t R_x H \quad (43)$$

Sous la contrainte que les fonctions propres sont les fonctions sinusoidales et qui s'exprime par la propriété :

$$\sum_{i=0}^{M-1} h(k)e^{-j\omega k} = H^t E = 1 \quad (44)$$

Avec :

$$E = [1e^{-j\omega k} e^{-j\omega 2k} \dots e^{-j\omega(M-1)}]^t$$

$$H = [h(0)h(1)\dots h(M-1)]^t$$

R_x : matrice d'autocorrélation du signal $x(k)$.

La puissance de la fréquence ω étant fixée, cela équivaut à minimiser la puissance des autres fréquences dans le signal.

Soit $x(k) = ae^{j(\omega k + \varphi)}$ le signal sinusoïdal de fréquence ω à l'entrée du filtre H , la sortie correspondante est alors égale à :

$$y(k) = H(\omega)x(k) = aH(\omega)e^{j(\omega k + \varphi)} \quad (45)$$

si on adapte ce filtre à la fréquence ω , c'est-à-dire si :

$$y(k) = x(k)$$

On aura :

$$H(\omega) = 1 = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)e^{-j\omega k} \quad (46)$$

La condition (46) est vérifiée, si :

$$h(k) = \frac{1}{M} e^{j\omega k}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (47)$$

Comme la sortie à l'instant k s'écrit :

$$y(k) = 1 = \sum_{i=0}^{M-1} h(i)x(k-i) = H^t \begin{bmatrix} ae^{j(\omega k + \varphi)} \\ ae^{j(\omega(k-1) + \varphi)} \\ \vdots \\ ae^{j(\omega(k-(M-1)) + \varphi)} \end{bmatrix}$$

$$= H^t E a e^{j(\omega k + \varphi)} = H^t E \cdot y(k) \quad (48)$$

On obtient la condition finale :

$$H^t E = 1$$

La contrainte (44) étant considérée, le filtre optimal est déterminé en minimisant le critère :

$$C = H^t R_x H - \lambda(H^t E - 1) \quad (49)$$

Avec λ un facteur de Lagrange. Ce filtre est égal à :

$$H = \sigma^2 R_x^{-1} E \quad (50)$$

Avec

$$\sigma^2 = \lambda = \frac{1}{E^{*t} R_x^{-1} E} \quad (51)$$

La valeur de la DSP au sens du maximum de vraisemblance pour la fréquence ω .

Annexes

Annexe A : canevas

Filière : Génie des Matériaux
Spécialité : Analyse Physico-Chimique des Matériaux

Intitulé de la matière : Traitement du signal

Semestre : S5

Objectifs de l'enseignement

L'objectif de ce cours est de présenter des outils pour analyser les propriétés d'un signal et examiner ce qu'il en advient lors de son passage à travers un système.

Connaissances préalables recommandées

Notions de base de l'électronique numérique et du calcul différentiel et intégral.

Contenu de la matière

I. Introduction

II. Signaux déterministes

- Signaux à temps et fréquence continues (Transformée de Fourier)
- Signaux à temps discret et fréquence continue (Théorème d'échantillonnage)
- Signaux à temps et fréquence discrets (Transformée de Fourier Discrète 'TFD', FFT)

III. Signaux aléatoires

- Processus aléatoire
- Stationnarité
- Ergotisme

IV. Signaux et systèmes

- Transformée en z
- Transformée de Hilbert
- Systèmes linéaire et stationnaire
- Le filtre prédictif (la prédiction linéaire)

V. Synthèse de filtres numériques

VI. Introduction à l'analyse et l'estimation spectrale

Travaux pratiques

- 1- Initiation MATLAB
- 2- Génération de signaux
- 3- Echantillonnage
- 4- TFD, FFT
- 5- Filtrage numérique
- 6- Estimation spectrale

Mode d'évaluation : Contrôle continu et examen final

Références (*Livres et photocopiés, sites internet, etc*)

- [1] Techniques modernes de traitement numérique des signaux, Kunt M, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998
- [2] Electronique des signaux échantillonnés et numériques ; J. Auvray, Dunod Université (1979)
- [3] Electronique des signaux analogiques ; J. Hervey ; Ed. Dunold ; 1980

Annexe B : Transformée de Fourier des signaux usuels

Le signal : $s(t)$	Transformée de Fourier du signal : $S(f)$
Constante $A \forall t$	$A\delta(f)$
$\delta(t)$	1
Peigne de Dirac $\sum_n \delta(t - nT)$	$\sum_n \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$
Echelon unité $U(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau \cdot \text{sinc}(f\tau)$
$A \cdot \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \cdot \text{sinc}^2(fT)$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f + f_0)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$

Annexe C : La transformée de Fourier discrète TFD

1. Introduction

On a défini la transformée de Fourier (TF) d'un signal à temps discret $x(k)$, écriture condensée (et simplifiée) de $x(kT)$ avec $T = 1$, par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f}$$

Cette transformée de Fourier est donc une fonction de la variable continue f et c'est une fonction périodique de période $T=1$.

Si on veut mettre en œuvre le calcul de cette TF sur ordinateur on est confronté à deux difficultés :

1. Le calcul ne peut se faire qu'à partir d'un nombre fini de valeurs de $x(k)$;
2. Le calcul ne peut fournir qu'un nombre fini de valeurs évaluant $X(f)$ pour des valeurs discrètes de la fréquence.

2. Définition de la transformée de Fourier discrète

À une suite de NN valeurs $\{x(0), \dots, x(n), \dots, x(N-1)\}$, la transformée de Fourier discrète (TFD) associe une suite de N autres valeurs $\{X(0), \dots, X(n), \dots, X(N-1)\}$ définies par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

La TFD est donc une application linéaire qui associe au vecteur $\{x\}$ le vecteur $\{X\}$:

$$\{x(0), \dots, x(n), \dots, x(N-1)\} \xrightarrow{TFD} \{X(0), \dots, X(n), \dots, X(N-1)\}$$

En posant :

$$W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$$
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(k) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^k & W^{2k} & \vdots & W^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^{N-1} & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{2(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(k) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Pour la transformation TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad \forall n \in [0, N-1]$$

La démonstration est immédiate en remplaçant $X(n)$ par son expression donnée en définition.

Interprétation en Algèbre Linéaire

La transformée de Fourier Discrète peut être vue comme une transformation linéaire appliqué au vecteur $x(n)$ afin de rendre le vecteur $X(k)$.

Les lignes de cette transformation sont les complexes exponentiels.

F est une matrice avec les coefficients $f_{kn} = e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-j2\pi \frac{0.0}{N}} & e^{-j2\pi \frac{0.1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{0.(N-1)}{N}} \\ e^{-j2\pi \frac{1.0}{N}} & e^{-j2\pi \frac{1.1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{1.(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{(N-1).1}{N}} & e^{-j2\pi \frac{(N-1).2}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(N-1).(N-1)}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Note que les coefficients $X(k)$ sont périodique en k avec période N .

Donc $X\left(-\frac{N}{2}\right) = X\left(\frac{N}{2}\right)$, $X\left(-\frac{N}{2} + 1\right) = X\left(\frac{N}{2} + 1\right)$, $X(-1) = X(N-2)$ etc.

Annexe D : Série de Taylor

Soit f une fonction d'une variable réelle ou complexe, indéfiniment dérivable en un point a . La série de Taylor de f en ce point est la série de fonctions :

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

qui s'écrit sous forme synthétique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

où $n!$ est la factorielle de n et $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f .

Cette série de fonctions (convergente ou non) est une série entière de la variable $x - a$.

La notation a a encore un sens en analyse fonctionnelle dans les algèbres normées, réelles ou complexes ; mais cette généralisation ne sera pas abordée dans cet article.

Si $a = 0$, la série est aussi appelée la série de Maclaurin de f .

Bibliographie

Bibliographie

- [1] P. Gaillard, R. Lengelle, "Analyse et traitement du signal", Ellips Édition Marketing S. A., 2006.
- [2] K. Kpalma, V. Haese-Coat, "Traitement du signal, Théorie et application", Ellips Édition Marketing S. A., 2003.
- [3] R. El hadi Bekka, "Introduction au traitement du signal", Office Publications universitaire, 1993.
- [4] A. Tazi, "Traitement du signal, Cours et exercices corrigés", livre en ligne, Université Ahmed Draia – Adrar
- [5] A. Cherif, "Signaux et systèmes : cours et exercices corrigés", Edition universitaire européenne, pp 14-24, 2017.
- [6] A. Ouhabi, "Traitement du signal, Théorie du signal", Office Publications universitaire, 1991.
- [7] G. Binet, "Traitement numérique du signal : signaux et systèmes discrets, Ellipses, 2013.
- [8] E. Provenzi, "Transformée de FOURIER et applications, Polycopié du cours ; <https://helios2.mi.parisdescartes.fr/~eprovenz/include/Poly.pdf>
- [9] B. Picinbono, "Signaux aléatoires, tome 1 : Probabilités et variables aléatoires avec problèmes résolus, Édité par Dunod, Paris, 1993.
- [10] A. Quinquis, C. Pistre-Abiven, D. Boulinguez, "Signal déterministe, Signal aléatoire. Exercices et problèmes corrigés, Hermes Science Publications, 1999.
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_prediction
- [12] http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/CoursM2SC_Signal_3.pdf
- [13] J. Flamant, N. Le Bihan, P. Chainais, "Analyse spectrale des signaux aléatoires bivariés, GRETSI 2017 - XXVIème Colloque francophone de traitement du signal et des images, Sep 2017, Juan-Les-Pins, France. fahal-01691274f.
- [14] E. Leo Lehmann, *Theory of Point Estimation*, New York, John Wiley & Sons, 1983.
- [15] A. Guerchaoui, "Traitement du signal, théorie et applications, Partie. 2, 2^{ème} Ed, office des publications universitaires, 09-2014, Algérie.
- [16] J. Capon, 1969. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. IEEE. 57 1408- 1419.
- [17] A. Guerchaoui, "Traitement du signal, théorie et applications, Partie. 3, office des publications universitaires, 03-2010, Algérie.