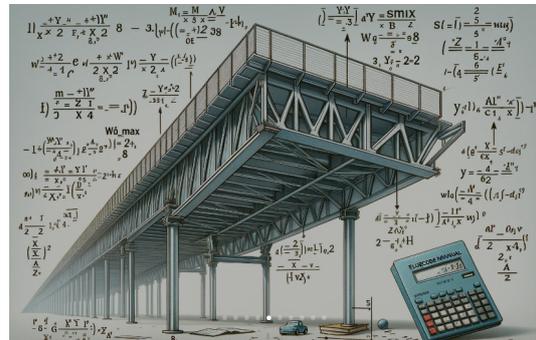


# RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX 3

## CHAPITRE 2 : DÉFORMATIONS DES STRUCTURES ÉLASTIQUES (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES & THÉORÈMES GÉNÉRAUX)



Au profit des étudiants 4èmes année

Cycle Ingénieur Polytechnique

Spécialité Bâtiment Durable-G.C

-----  
**Dr. Mohamed MERAZI**

École nationale polytechnique d'Oran Maurice Audin

Département de Génie Civil

Email : merazi@hotmail.fr

# Table des matières



<b>Objectifs</b>	3
I -	
<b>CHAPITRE 2 : DÉFORMATIONS DES STRUCTURES ÉLASTIQUES (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES &amp; THÉORÈMES GÉNÉRAUX)</b>	4
1. Rappel sur les expressions générales de l'anergie potentielle de déformation élastique .....	4
2. Généralités .....	6
3. Forces et déplacement généralises .....	6
4. Réciprocité des travaux et des déplacements .....	7
4.1. <i>Théorème de BETTI (réciprocité des travaux)</i> .....	7
4.2. <i>Théorème de MAXWELL (réciprocité des déplacements)</i> .....	8
5. Calcul général des déplacements (poutres, cadres, treillis.....) .....	8
5.1. <i>Théorème de MOHR</i> .....	8
5.2. <i>Théorème de VERECHAGUINE (Grapho-analytique)</i> .....	11
5.3. <i>Théorème de CASTIGLIANO</i> .....	14
5.4. <i>Théorème de MENABREA</i> .....	18
<b>Ressources annexes</b>	20
<b>Références</b>	22

# Objectifs

- **Illustrer** les méthodes énergétiques de calcul des déplacements.
- **Prescrire** les théorèmes généraux des systèmes élastiques basés sur l'énergie de déformation élastique.
- Effectuer un calcul permettant d'**évaluer** les composantes du déplacement " la flèche et la pente" des éléments structuraux (poutres, cadres, treillis par l'application des différents théorèmes).

# CHAPITRE 2 : DÉFORMATIONS DES STRUCTURES ÉLASTIQUES (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES & THÉORÈMES GÉNÉRAUX)



## 1. Rappel sur les expressions générales de l'énergie potentielle de déformation élastique

### ◆ Rappel : 1/ Expression de l'énergie en fonction de la charge cas de "la traction - compression"

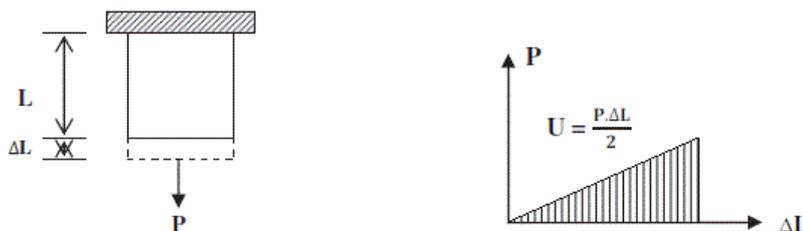
Sous l'effet de la force ( $P$ ), la barre s'allonge de ( $\Delta L$ ) et donc elle passe d'une longueur ( $L$ ) à une longueur égale à ( $L + \Delta L$ ).

Le point d'application de la force ( $P$ ) se déplace vers le bas, cette force crée durant ce déplacement **un travail**. Cela est valable en traction et en compression.

Si l'éprouvette est parfaitement **élastique**, elle va retrouver **sa forme et ses dimensions initiales**, et cela dès la suppression de la charge ( $P$ ).

Si cette force est variable, croissante de zéro jusqu'à ( $P$ ), on aura pour chaque accroissement **un allongement** ( $d \Delta L$ ).

Expérimentalement, on a :  $P = K \cdot \Delta L$  avec  $K = \text{tg } \alpha$



Cas de la traction compression

**Le travail** se transforme en **énergie potentielle de déformation élastique** d'une manière partielle ou totale. Il sera dissipé lors d'un déchargement progressif de la barre déformée.

*Travail = Énergie totale emmagasinée dans la barre*

$$U = \frac{P \cdot \Delta L}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \text{ et } \sigma = \frac{P}{A}$$

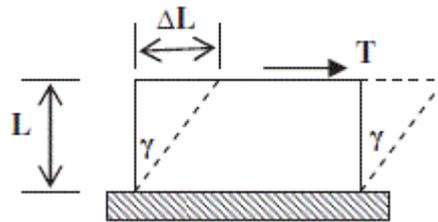
$$\varepsilon = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{A \cdot E} \Rightarrow \Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$U = \frac{P^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot A}$$

Cette **expression**, représente **l'énergie potentielle de déformation** dans le cas de **l'effort normal (la charge axiale P)**

◆ *Rappel : 2/ expression de l'énergie en fonction de la charge cas du " cisaillement "*

**Dans le cas de la déformation relative du cisaillement (y), on a :**



$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta L}{L}, \tau = \frac{T}{A}$$

Par analogie avec le cas de l'effort normal:  $U = \frac{T \cdot \Delta L}{2}$

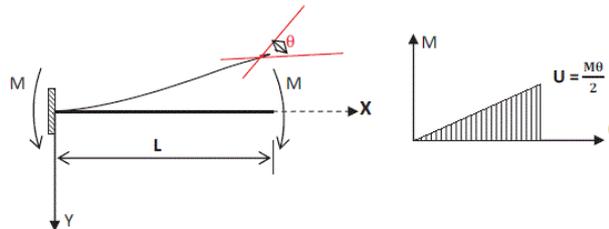
$$\tau = G \cdot \gamma \Rightarrow \frac{T}{A} = \frac{G \cdot \Delta L}{L}, \Delta L = \frac{T \cdot L}{G \cdot A}$$

$$U = \frac{T^2 \cdot L}{2 \cdot G \cdot A}$$

Cette **expression**, représente **l'énergie potentielle de déformation** dans le cas de **l'effort tranchant**.

◆ *Rappel : 3/ expression de l'énergie en fonction de la charge- cas du " moment de flexion "*

**L'application de l'équation générale de la ligne élastique :**



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{E I_z}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int_0^L \frac{M}{E I_z} dx + C = \frac{M \cdot x}{E I_z} + C$$

D'après les conditions aux limites :

$$\theta(0) = 0 = C \Rightarrow \theta(x) = \frac{M}{E I_z} x$$

$$\theta_{\max} = \theta(L) = \frac{M \cdot L}{E I_z}$$

Par analogie avec les cas précédents :

$$U = \frac{M^2 \cdot L}{2 \cdot E I_z}$$

◆ *Rappel : 4/ expression de l'énergie en fonction de la charge cas du "moment de torsion"*

---

**Par analogie** avec les cas précédents:

$$U = \frac{M_t^2 \cdot L}{2 \cdot G I_p}$$

◆ *Rappel : 5/ expression de l'énergie en fonction de la charge cas général*

---

**Pour une structure soumise à toutes les sollicitation :**

$$du = \left( \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I_z} + \frac{M_y^2}{2 \cdot E \cdot I_y} + \frac{T_z^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{T_y^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} + \frac{M_t^2}{2 \cdot G \cdot I_p} \right) dx$$

Si la structure est complexe et comporte plusieurs éléments sous forme de barres, on prendra la somme des énergies.

$$U = \int \left( \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I_z} + \frac{M_y^2}{2 \cdot E \cdot I_y} + \frac{T_z^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{T_y^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} + \frac{M_t^2}{2 \cdot G \cdot I_p} \right) dx$$

## 2. Généralités

Sous l'effort de charges, **toute structure subit des déformations**. La structure passe de la position initiale non déformée à une autre qu'on appelle **position déformée**.

Ces déformations ne dépassent pas une certaine limite imposée par les normes.

## 3. Forces et déplacement généralisés

Le **travail** effectué par un groupe de forces constantes peut être représenté par :

$$A = P \cdot \Delta p$$

**P** : Dépend uniquement des forces du groupe et porte le nom de (Force généralisée) « **Charge, force concentrée, moment** ».

**$\Delta p$**  : Dépend du déplacement et porte le nom du **déplacement généralisé** « **Linéaire ou angulaire** ».

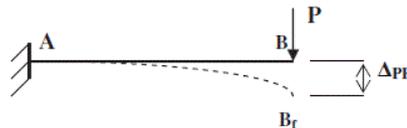
### Remarque

Il est convenu de désigner les **déplacements généralisés** par les lettres ( $\Delta$ ) ou ( $\delta$ ) accompagnées d'**indice doubles**.

**Le premier indice montre le point et la direction du déplacement, le second montre la force qui est à l'origine de ce déplacement.**

### Exemple

$\Delta_{pp}$  : signifie le déplacement du point d'application de la force ( $p$ ) dans le sens d'action de cette dernière (déplacement du à cette même force  $P$ )



On note les déplacements dus à une force unitaire ( $P = 1$ ) ou un moment unitaire ( $M = 1$ ) par la lettre ( $\delta$ ) appelé déplacement unitaire. Si une force  $P = 1$  est à l'origine du déplacement ( $\delta_p$ ), le déplacement total ( $\Delta P$ ) du à la force ( $P$ ) sera :

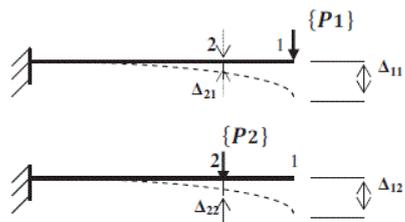
$$\Delta P = P \cdot \delta_p$$

## 4. Réciprocité des travaux et des déplacements

Soit une poutre sur laquelle on prend deux sections quelconques (1) et (2) ;

**L'action de ( $P_1$ ) produit dans la section (1) la déformation  $\Delta_{11}$ , et dans la section (2) la déformation  $\Delta_{21}$ .**

Examinons un système élastique en ses deux états : état (1) et état (2) :

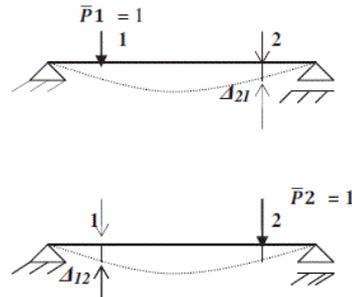


### 4.1. Théorème de BETTI (réciprocité des travaux)

Si une barre est sollicitée par deux systèmes de forces, Le travail mécanique effectué par le premier système de force en parcourant les déplacements engendrés par le deuxième système est égale au travail mécanique effectué par le deuxième système de forces en parcourant les déplacements engendrés par le premier système de force.

$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}$  Cette relation traduit le **théorème de réciprocité des travaux de BETTI** (cf. p.20) (cf. p.20)

## 4.2. Théorème de MAXWELL (réciprocité des déplacements)



Dans le cas particulier quand  $P_1 = P_2 = 1$  on obtient la relation suivante :

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

Cette relation traduit **le théorème de réciprocité des déplacements de** (cf. p.20) (cf. p.20) **Maxwell** :

Le déplacement du point d'application de la première force unitaire dans le sens d'action de cette dernière sous l'action de la seconde force unitaire, est égal au déplacement du point d'application de la seconde force unitaire dans le sens d'action de cette dernière sous l'action de la première force unitaire.

## 5. Calcul général des déplacements (poutres, cadres, treillis.....)

Il existe **plusieurs théorèmes** pour **le calcul des déplacements des structures**, parmi ces on peut **citer** :

### 5.1. Théorème de MOHR

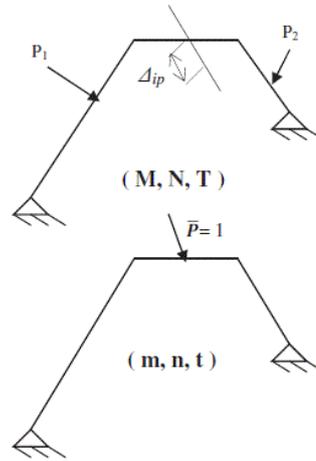
Les formules générales pour la détermination du déplacement s'obtiennent aisément à l'aide du **principe des déplacements virtuels**. On fait appel à un système sollicité -au niveau du point **dont le déplacement nous intéresse-** par **une seule force généralisée unitaire fictive** correspondante ( $P^* = 1$ ).

Désignons par :

(**N. M. T**) les efforts suscités par un système de **forces extérieures réel** ( $\Sigma P$ ).

(**n. m. t**) les efforts suscités par **la force unitaire fictive** ( $P^* = 1$ ).

$\Delta_{ip}$  : signifie **le déplacement du point (i)** sous l'action d'une **force P**.



### Fondamental

- Pour le calcul de la déformation, on considère deux systèmes, le premier est celui des forces réelles le deuxième est celui d'une seule force de valeur unitaire.
- Le principe des déplacements virtuels pour l'état intermédiaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta_{ip} = \Sigma \left[ \int \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx + \Sigma \int \frac{N \cdot n}{E \cdot A} dx + \Sigma \int \frac{T \cdot t}{G \cdot A} dx + \Sigma \int \frac{M_t \cdot m_t}{E \cdot I_p} dx \right]$$

### Remarque : Primo

Cette formule est **une formule générale**. Quand on détermine les déplacements dans les poutres, cadres et arcs d'après la méthode de **MOHR** (cf. p.20) (cf. p.20) on peut dans la majorité des cas négliger dans cette formule l'effet de l'effort normal, l'effet de l'effort tranchant et l'effet du moment de torsion pour les déformations. On prend en considération uniquement l'effet du moment fléchissant et cette formule s'écrit :

$$\Delta_{ip} = \Sigma \left[ \int \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \right]$$

Cette formule porte le nom de **formule de MAXWELL**.

### Remarque : Secundo

Quand on a à calculer les déformations des systèmes en treillis, la formule de MOHR ne garde que le terme contenant la déformation due à l'effort tranchant.

$$\Delta_{ip} = \Sigma \left[ \frac{N \cdot n}{E \cdot A} L \right]$$

## ✂ Méthode

Les étapes à suivre pour le calcul des déplacements par la méthode de Mohr :

1. On établit un système intermédiaire que l'on charge à l'aide d'une sollicitation unitaire appliquée au point dont il faut déterminer le déplacement.  
Quand on détermine les déplacements linéaires on applique la force unitaire et quand on détermine les déplacements angulaires, c'est le moment unitaire qu'on applique.
2. On écrit les expressions des forces réelles (N, T, M) ainsi que les expressions de (n, t, m) du système du à la charge unitaire.
3. On calcule l'intégrale de MOHR pour toutes les parties du système.
4. Si le déplacement obtenu par calcul est de signe positif, cela signifie que sa direction coïncide avec celle de la force unitaire. Un signe négatif montre que le déplacement est de direction opposée à celle de la force unitaire.

### ☞ Exemple : Application numérique N°01

-Pour la poutre représentée sur la figure suivante calculer la flèche au milieu de la poutre.

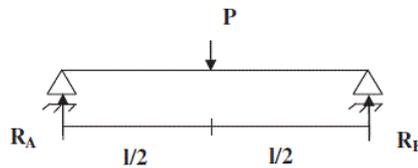


Fig. Une poutre simplement appuyée avec une charge concentré au milieu

Solution de l'exemple (Application numérique N°01) :

#### Poutre réelle :

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$M(x) = R_A \cdot x = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l$$

$$M = \frac{P}{2} \cdot x - P \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

#### Poutre fictive : $\bar{P} = 1$

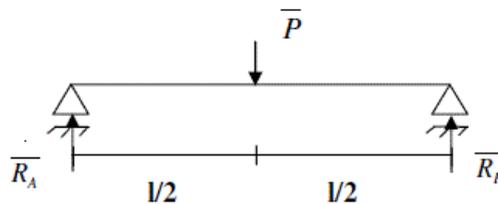
$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} \cdot x$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l$$

$$m = \frac{x}{2} - 1 \left( x - \frac{l}{2} \right)$$



$$\Delta = \Sigma \int \frac{M.m}{E.I} dx$$

On ne prend en considération que **la déformation due au moment fléchissant** (la plus importante).

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left( \frac{P.x}{2} \right) \left( \frac{x}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \left[ \frac{P.x}{2} - P(x - \frac{l}{2}) \right] \left[ \frac{x}{2} - x + \frac{l}{2} \right] dx$$

Après intégration :

$$\Delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

### Remarque

Dans **la majorité des cas on néglige la déformation longitudinale** due à (N) et **la déformation transversale** due à (T) et on **garde que la déformation due à la flexion**:

$$\Delta = \Sigma \int \frac{M.m}{E.I} dx$$

## 5.2. Théorème de VERECHAGUINE (Grapho-analytique)

**Le théorème de Véréchaguine permet le calcul de l'intégrale de Mohr par une multiplication particulière des efforts internes.**

Pour le cas où **le diagramme des charges réelles a une configuration arbitraire**, tandis que celui dû à **la charge unitaire a une configuration linéaire**, il est préférable de **calculer l'intégrale de Mohr**  $[\int M.m.dx]$  à l'aide **d'un procédé grapho-analytique** développé par **Véréchaguine**. [5]\*

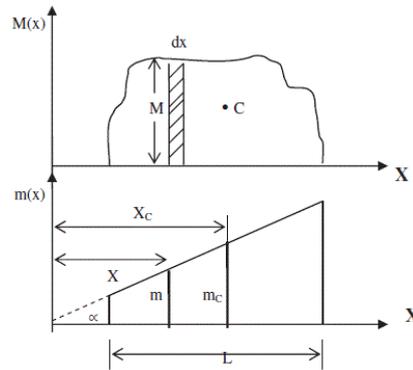
Adoptons les désignations suivantes :

**A** : l'aire du **diagramme de (M)** sous l'action des **charges extérieures**.

**C** : **Centre de gravité du diagramme (M)**

**mc**: **Ordonnée du diagramme des moments dus à la charge unitaire (m) située en dessous du centre de gravité du diagramme (M)**.

**Xc**: **L'abscisse du centre de gravité (C)**



## Fondamental

Considérons que  $(E.I)$  est constant.

$$\Delta = \frac{1}{E.I} \int M \cdot m \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot K$$

$\Delta$ : la deformation donnée par MOHR.

$$\tan \alpha = \frac{m}{x} = \frac{\bar{m}_c}{x_c}, \quad dA = M \cdot dx$$

$$K = \int M \cdot m \cdot dx = \tan \alpha \int x \cdot dA$$

$$\int x \cdot dA = X_c \cdot A \quad \text{D'ou} \quad \int M \cdot m \cdot dx = \tan \alpha \cdot X_c \cdot A$$

$$\tan \alpha = \frac{\bar{m}_c}{x_c}, \quad m_c = \tan \alpha \cdot X_c$$

$$K = A \cdot \bar{m}_c$$

$$\text{Donc } \Delta = \frac{A \cdot \bar{m}_c}{E \cdot I}$$

Finalement le **théorème de VERECHAGUINE** est formulée comme suit :

$$\left[ \Delta = \sum \frac{A \cdot \bar{m}_c}{E \cdot I} \right]$$

## Méthode

Les étapes à suivre pour le calcul des déplacements par la méthode de VERECHAGUINE :

- On trace les diagrammes des moments fléchissant  $M(x)$  et  $m(x)$
- On calcule l'aire (A) du diagramme  $M(x)$
- On détermine le centre de gravité du diagramme  $M(x)$  qui est (C)
- On détermine l'abscisse ( $X_c$ ) du centre de gravité (C)
- On calcule la valeur de  $m(X_c)$  qui représente  $\bar{m}_c$
- On applique finalement la formule de Véréchaguine pour calculer des déplacements

## Remarque

1. la formule précédente n'est valable que si un des deux diagrammes est linéaire.

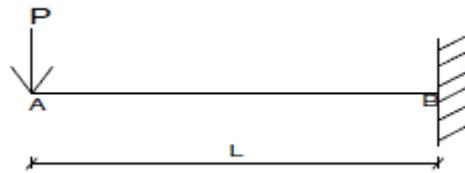
2. Si le diagramme linéaire est une ligne brisée ou s'il traverse l'axe, le calcul se fait par intervalles.
3. Quand les deux diagrammes sont linéaires n'importe lequel peut jouer le rôle du diagramme non linéaire.
4. Le résultat a le signe (+) si les deux diagrammes le trouvent du coté de la ligne de référence le signe (-).

### Complément

La multiplication de Véréchaguine (Grapho-analytique) suit les termes de l'intégrale de Mohr (voir Tableau)

### Exemple : Application numérique N°02

-En utilisant la méthode de Véréchaguine, déterminer la rotation au point (A), dans le cas d'une poutre encastré-libre avec une charge concentrée appliquée à l'extrémité libre.



#### Solution de l'exemple (Application numérique N°02) :

On utilisant le tableau de multiplication des diagrammes (cf. Tableau de multiplication -Véréchaguine)

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l M \cdot m \, dx$$

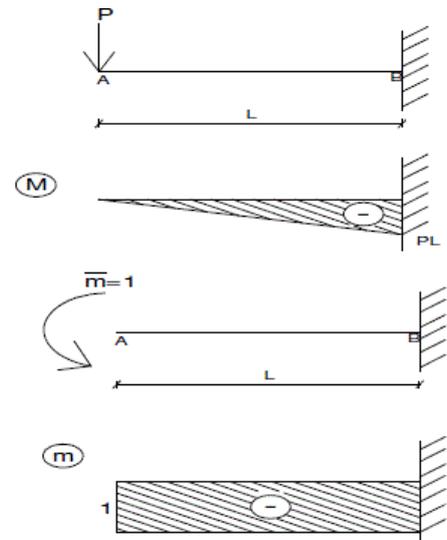
$$M = -P \cdot x$$

$$m = -1$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot \bar{h} \cdot l$$

$$= \frac{1}{2EI} \cdot Pl \cdot l$$

$$\theta_A = \frac{Pl^2}{2EI}$$



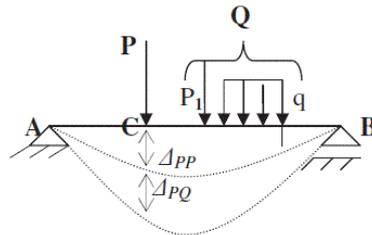
### 5.3. Théorème de CASTIGLIANO

#### 5.3.1. Application du théorème pour les poutres et cadres

Il existe **une autre méthode** qui utilise **l'énergie potentielle de déformation** pour le calcul **des déplacements** d'une structure chargée par un système de forces.

Considérons un système élastique (poutre représentée) sollicité par **un système de charge (Q)** et une **charge concentrée (P)**.

Le déplacement du point d'application de la force (P) est le point (C), ce déplacement est noté ( $\Delta_{pp}$ ). Le déplacement du point (C) sous l'action du système de charge (Q) est noté ( $\Delta_{pQ}$ ).



**Le déplacement total** du point (C) est égal à :

$$\Delta p = \Delta_{pp} + \Delta_{pQ}$$

**L'énergie potentielle** du système élastique est donnée par [voir le cours précédent] :

$$U = (1/2) \cdot P \cdot \Delta_{pp} + \Delta_{pQ} + U_{QQ}$$

$U_{QQ}$  : l'énergie accumulée au cours de la déformation du système par la force (Q) uniquement.

On **remarque** que le premier terme de l'équation est divisé par deux contrairement au deuxième et au troisième terme car **le travail se transforme totalement en énergie**, pour les deux autres termes **la transformation est partielle**.

$$\Delta_{pp} = P \cdot \delta_{pp}$$

$$\text{Avec : } U = (1/2) \cdot P^2 \cdot \delta_{pp} + P \cdot \Delta_{pQ} + U_{QQ}$$

Si on dérive par rapport à (P), on aura :

$$\partial U / \partial P = P \cdot \delta_{pp} + \Delta_{pQ} + 0 = \Delta_{pp} + \Delta_{pQ} = \Delta P$$

$$\text{Donc : } \Delta P = \partial U / \partial P$$

**U : Énergie potentielle de déformation**

#### *Fondamental*

**Théorème de CASTIGLIANO** (cf. p.20) (cf. p.20) : Le déplacement du point d'application d'une force généralisée dans le sens d'application de cette dernière est égal à **la dérivée partielle de l'énergie potentielle** par rapport à cette force.

Dans **la formule de Castigliano**, on remplace le cas général de l'énergie potentielle de déformation par sa formule, on aura :

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \int \frac{M^2}{2E \cdot I} dx + \int \frac{N^2}{2E \cdot A} dx + \int \frac{T^2}{2G \cdot A} dx + \int \frac{M_t^2}{2E \cdot I_p} dx \right]$$

$$\Delta_p = \left[ \int \frac{M(x)}{E \cdot I} dx \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} + \int \frac{N(x)}{E \cdot A} dx \cdot \frac{\partial N(x)}{\partial P} + \int \frac{T(x)}{G \cdot A} dx \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial P} \right]$$

$$+ \left[ \int \frac{M_t(x)}{E \cdot I_p} dx \cdot \frac{\partial M_t(x)}{\partial P} \right]$$

En négligeant l'influence qu'exercent les efforts normaux et tranchants sur le déplacement, on aura :

$$\Delta_p = \left[ \int \left( \frac{M(x)}{E \cdot I} \right) \cdot \left( \frac{\partial M(x)}{\partial P} \right) \cdot dx \right]$$

### Remarque

Si ( $P_n$ ) est une force concentrée le déplacement ( $\Delta P$ ) sera un déplacement linéaire, par contre si la force généralisée est un moment concentré, le déplacement correspondant sera un déplacement angulaire.

### Conseil

Le théorème de Castigliano ne permet que la détermination des déplacements des points d'application des forces extérieures et seulement dans la direction de ces forces.

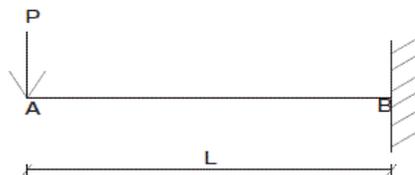
### Méthode

En pratique, on a besoin de déterminer le déplacement des points quelconques et suivant des directions quelconques. Pour cette raison, on suit les étapes suivantes afin de résoudre ce problème :

1. On applique au point et suivant la direction choisie une force ( $P$ ).
2. On établit l'expression de l'énergie potentielle compte tenu de la force ( $P$ ).
3. On dérive cette expression par rapport à ( $P$ ).
4. On donne finalement la valeur zéro (0) à la force ( $P$ ) et on aura le déplacement recherché.

### Exemple : Application numérique N°03

-Calculer le déplacement  $\Delta A$  par la méthode de Castigliano dans le cas d'une poutre encastré-libre (idem exemple N°2)



Solution de l'exemple (Application numérique N°03) :

**Solution :**

$$u = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI_0} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$M(x) = -Px \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI_0} \int_0^l -Px(-x) dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^l Px^2 dx$$

$$\Delta_A = \frac{P}{3EI} l^3$$

5.3.2. Application du théorème pour les poutres en treillis

**Le théorème de Castigliano** peut être utilisé pour le calcul des déformations dans le cas des poutres en treillis. L'énergie potentielle de déformation dans le cas de l'effort normal est donnée par la formule suivante :

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E \cdot A_i}$$

**N<sub>i</sub>** : Effort normal à l'intérieure de la barre (i) du système en treillis engendré par les charges extérieures appliquées.

**l<sub>i</sub>** : La longueur de la barre (i) du système en treillis.

**A<sub>i</sub>** : La section de la barre (i) du système en treillis.

**n** : Nombre de barres qui composent le système en treillis.

 *Fondamental*

En appliquant le **théorème de Castigliano**, on aura :

$$\Delta_p = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E \cdot A_i} \left( \frac{\partial N_i}{\partial P} \right)$$

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i \bar{N}_i}{E \cdot A_i}$$

**N<sub>i</sub>** : Effort normal à l'intérieure de la barre (i) du système en treillis engendré par la présence d'une force unitaire exercée sur le nœud choisi et suivant la direction ou on veut calculer le déplacement.

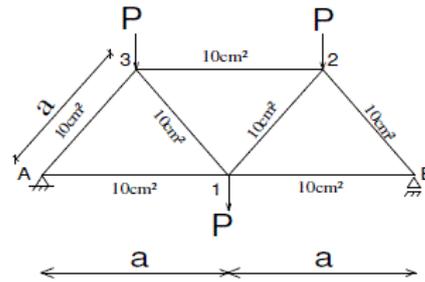
Donc cette formule s'appelle la **formule de Maxwell**

 *Exemple : Application numérique N°04*

-Calculer le déplacement horizontal du nœud B (ΔB).

Sachant que :  $P=100 \text{ KN}$ ,  $A=10 \text{ cm}^2$ ,

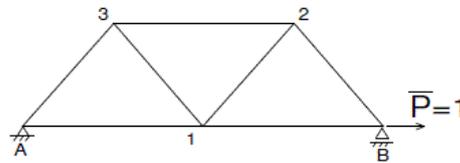
$a=500 \text{ cm}$ ,  $E=2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$



**Solution de l'exemple (Application numérique N°04) : [6]\***

$N$  : **Efforts** dans les barres dus aux **charges réelles**.

$\bar{N}$  : **Efforts** dans les barres dus à une **charge unitaire** appliquée au niveau du **nœud (B) horizontalement**.



-**Les résultats** sont **regroupés** dans le **tableau** suivant :

Barre	$l_i$	$EA_i$	$N_i$	$\bar{N}_i$	$\frac{N_i \bar{N}_i l_i}{EA_i}$
A1	$a$	$EA$	$\frac{\sqrt{3}P}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}P \cdot a}{2EA}$
A3	$a$	$EA$	$-\sqrt{3}P$	0	0
B1	$a$	$EA$	$\frac{\sqrt{3}P}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}P \cdot a}{2EA}$
B2	$a$	$EA$	$-\sqrt{3}P$	0	0
1-2	$a$	$EA$	$\frac{P}{\sqrt{3}}$	0	0
1-3	$a$	$EA$	$\frac{P}{\sqrt{3}}$	0	0
2-3	$a$	$EA$	$-\frac{P}{\sqrt{3}}$	0	0

Tableau récapitulatif des résultats

$$\Delta_B = \frac{2\sqrt{3} \cdot P \cdot a}{2E \cdot A} = \frac{\sqrt{3} \cdot P \cdot a}{E \cdot A}$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 500}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 10}$$

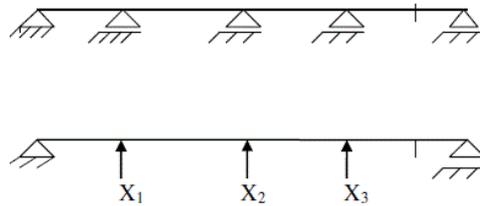
$$\Delta_B = 0,412 \text{ cm}$$

## 5.4. Théorème de MENABREA

Le théorème de *MENABREA* (cf. p.21) (cf. p.20) est l'application du théorème de Castigliano pour les systèmes hyperstatiques.

### Méthode

La résolution de ce système se fait dans l'ordre suivants :



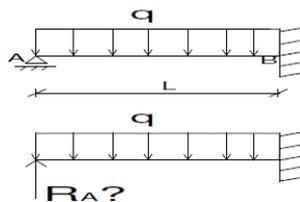
- Remplaçons dans un système hyperstatique les liaisons surabondantes par des réactions correspondantes :  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , .....etc.
- D'après le théorème de Castigliano, calculons les déplacements correspondant  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,.....etc, sachant bien que les déplacements au niveau des appuis sont nuls :

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0$$

La résolution de ces équations nous permet de déterminer les réactions au niveau des liaisons surabondantes et le système deviendra isostatique.

### Exemple : Application numérique N°05

-Résoudre le système hyperstatique en utilisant le principe de Menabrea



Solution de l'exemple (Application numérique N°05) :

$$M = R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R_A} \cdot dx$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l (R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}) \cdot x \cdot dx$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{x^3}{3} - q \frac{x^4}{4 \cdot 2} \right]_0^l$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \left[ \frac{R_A l^3}{3} - \frac{q l^4}{8} \right] = 0$$

$$\boxed{R_A = \frac{3ql}{8}}$$



>



