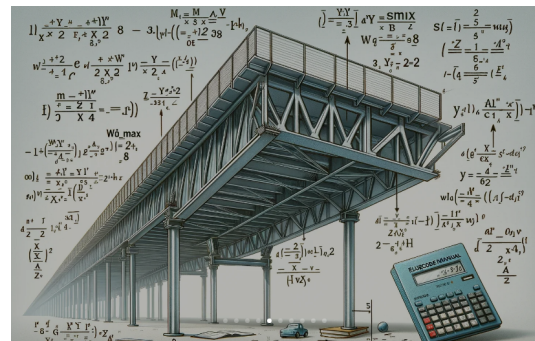


RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX 3.

CHAPITRE 2 : DÉFORMATIONS DES STRUCTURES ÉLASTIQUES (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES & THÉORÈMES GÉNÉRAUX)



Au profit des étudiants 4èmes année

Cycle Ingénieur Polytechnique

Spécialité Bâtiment Durable-G.C

Dr. Mohamed MERAZI

École nationale polytechnique d'Oran Maurice Audin

Département de Génie Civil

Email : merazi@hotmail.fr

Table des matières



I -	
CHAPITRE 2 : DÉFORMATIONS DES STRUCTURES ÉLASTIQUES (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES & THÉORÈMES GÉNÉRAUX)	
	3
1. Objectifs spécifiques du chapitre 2	3
2. Rappel sur les expressions générales de l'anergie potentielle de déformation élastique	3
3. Généralités	5
4. Forces et déplacement généralises	6
5. Réciprocité des travaux et des déplacements	6
5.1. Théorème de BETTI (réciprocité des travaux)	7
5.2. Théorème de MAXWELL (réciprocité des déplacements)	7
6. Calcul général des déplacements (poutres, cadres, treillis.....)	7
6.1. Théorème de MOHR	7
6.2. Théorème de VERECHAGUINE (Grapho-analytique)	10
6.3. Théorème de CASTIGLIANO	13
6.4. Théorème de MENABREA	17
Ressources annexes	19
Références	21

CHAPITRE 2 : DÉFORMATIONS DES STRUCTURES ÉLASTIQUES (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES & THÉORÈMES GÉNÉRAUX)

I

1. Objectifs spécifiques du chapitre 2

- **Illustrer** les méthodes énergétiques de calcul des déplacements.
- **Prescrire** les théorèmes généraux des systèmes élastiques basés sur l'énergie de déformation élastique.
- Effectuer un calcul permettant d'**évaluer** les composantes du déplacement " la flèche et la pente" des éléments structuraux (poutres, cadres, treillis par l'application des différents théorèmes).

2. Rappel sur les expressions générales de l'anergie potentielle de déformation élastique

◆ *Rappel : 1/ Expression de l'énergie en fonction de la charge cas de "la traction - compression"*

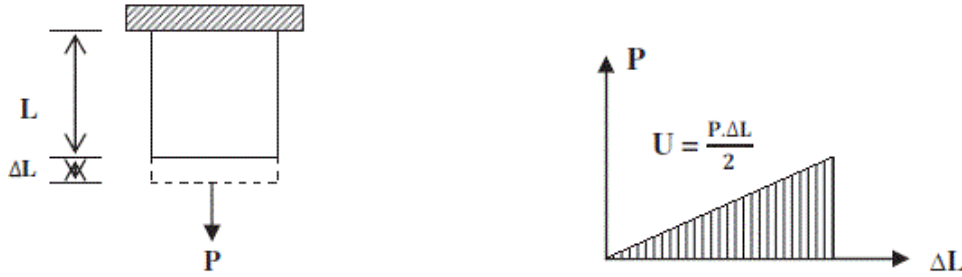
Sous l'effet de la **force (P)**, la barre **s'allonge** de (ΔL) et donc elle passe d'une longueur (L) à une longueur égale à ($L + \Delta L$).

Le point d'application de la force (P) se déplace vers le bas, cette **force** crée durant ce **déplacement un travail**. Cela est valable en traction et en compression.

Si l'éprouvette est parfaitement **élastique**, elle va retrouver **sa forme et ses dimensions initiales**, et cela dès la suppression de la charge (P).

Si cette force est variable, croissante de zéro jusqu'à (P), on aura pour chaque accroissement **un allongement** ($d \Delta L$).

Expérimentalement, on a : $P = K \cdot \Delta L$ avec $K = tg \alpha$



Cas de la traction compression

Le **travail** se transforme en **énergie potentielle de déformation élastique** d'une manière partielle ou totale. Il sera dissipé lors d'un déchargement progressif de la barre déformée.

Travail = Énergie totale emmagasinée dans la barre

$$U = \frac{P \cdot \Delta L}{2}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \text{ et } \sigma = \frac{P}{A}$$

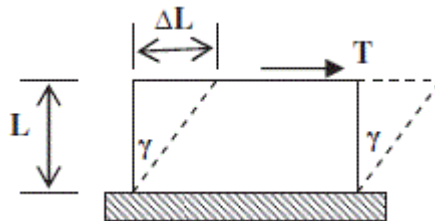
$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$U = \frac{P^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot A}$$

Cette **expression**, représente l'**énergie potentielle de déformation** dans le cas de l'**effort normal** (la charge axiale P)

◆ Rappel : 2/ expression de l'énergie en fonction de la charge cas du " cisaillement "

Dans le cas de la déformation relative du cisaillement (γ), on a :



$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta L}{L}, \tau = \frac{T}{A}$$

Par analogie avec le cas de l'effort normal: $U = \frac{T \cdot \Delta L}{2}$

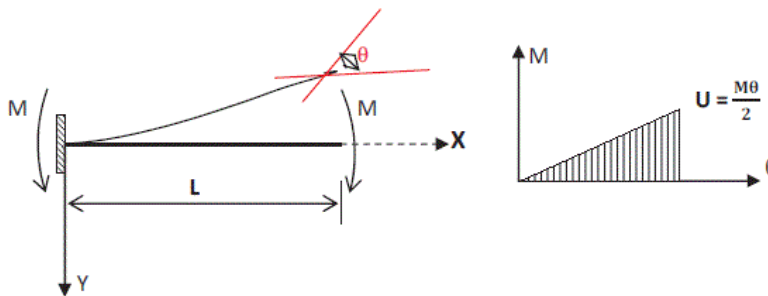
$$\tau = G \cdot \gamma \Rightarrow \frac{T}{A} = \frac{G \cdot \Delta L}{L}, \Delta L = \frac{T \cdot L}{G \cdot A}$$

$$U = \frac{T^2 \cdot L}{2 \cdot G \cdot A}$$

Cette **expression**, représente l'**énergie potentielle de déformation** dans le cas de l'**effort tranchant**.

◆ Rappel : 3/ expression de l'énergie en fonction de la charge- cas du " moment de flexion "

L'application de l'équation générale de la ligne élastique :



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{E I_z}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int_0^L \frac{M}{E I_z} dx + C = \frac{M \cdot x}{E I_z} + C$$

D'après les conditions aux limites :

$$\theta(0) = 0 = C \Rightarrow \theta(x) = \frac{M}{E I_z} x$$

$$\theta_{\max} = \theta(L) = \frac{M \cdot L}{E I_z}$$

Par analogie avec les cas précédents :

$$U = \frac{M^2 \cdot L}{2 \cdot E I_z}$$

◆ **Rappel : 4/ expression de l'énergie en fonction de la charge cas du "moment de torsion"**

Par analogie avec les cas précédents :

$$U = \frac{M_t^2 \cdot L}{2 \cdot G I_p}$$

◆ **Rappel : 5/ expression de l'énergie en fonction de la charge cas général**

Pour une structure soumise à toutes les sollicitation :

$$du = \left(\frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I_z} + \frac{M_y^2}{2 \cdot E \cdot I_y} + \frac{T_z^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{T_y^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} + \frac{M_t^2}{2 \cdot G \cdot I_p} \right) dx$$

Si la structure est complexe et comporte plusieurs éléments sous forme de barres, on prendra la somme des énergies.

$$U = \int \left(\frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I_z} + \frac{M_y^2}{2 \cdot E \cdot I_y} + \frac{T_z^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{T_y^2}{2 \cdot G \cdot A} + \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} + \frac{M_t^2}{2 \cdot G \cdot I_p} \right) dx$$

$$U = \frac{1}{2} \sum \int_0^l \left(\frac{M_z^2}{E \cdot I_z} + \frac{M_y^2}{E \cdot I_y} + \frac{T_z^2}{G \cdot A} + \frac{T_y^2}{G \cdot A} + \frac{N^2}{E \cdot A} + \frac{M_t^2}{G \cdot I_p} \right) dx$$

3. Généralités

Sous l'effort de charges, **toute structure subit des déformations**. La structure passe de la position initiale non déformée à une autre qu'on appelle **position déformée**.

Ces déformations ne dépassent pas une certaine limite imposée par les normes.

4. Forces et déplacement généralisés

Le **travail** effectué par un groupe de forces constantes peut être représenté par :

$$A = P \cdot \Delta p$$

P : Dépend uniquement des forces du groupe et porte le nom de (**Force généralisée**) « **Charge, force concentrée, moment** ».

Δp : Dépend du déplacement et porte le nom du **déplacement généralisé** «**Linéaire ou angulaire** ».

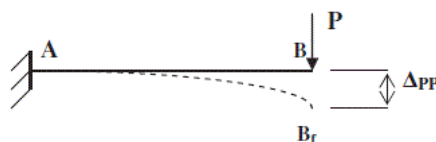
Remarque

Il est convenu de désigner les **déplacements généralisés** par les lettres (Δ) ou (δ) accompagnées d'**indice doubles**.

Le **premier indice** montre le **point et la direction du déplacement**, le **second** montre la **force qui est à l'origine de ce déplacement**.

Exemple

Δ_{pp} : signifie le déplacement du point d'application de la force (p) dans le sens d'action de cette dernière (déplacement du à cette même force P)



On note les déplacements dus à une force unitaire ($P = 1$) ou un moment unitaire ($M = 1$) par la lettre (δ) appelé déplacement unitaire . Si une force $P = 1$ est à l'origine du déplacement (δ_p), le déplacement total (ΔP) du à la force (P) sera :

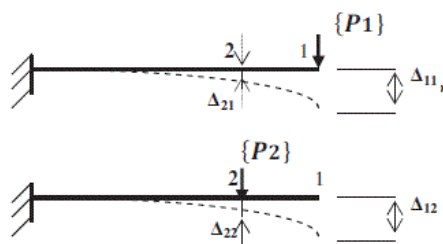
$$\Delta P = P \cdot \delta_p$$

5. Réciprocité des travaux et des déplacements

Soit une poutre sur laquelle on prend deux sections quelconques (1) et (2) ;

L'**action de (P_1) produit dans la section (1) la déformation Δ_{11}** , et dans **la section (2) la déformation Δ_{21}** .

Examinons un système élastique en ses deux états : état (1) et état (2) :

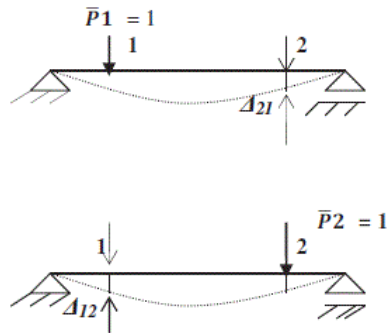


5.1. Théorème de BETTI (réciprocité des travaux)

Si une barre est sollicitée par deux systèmes de forces, Le travail mécanique effectué par le premier système de force en parcourant les déplacements engendrés par le deuxième système est égale au travail mécanique effectué par le deuxième système de forces en parcourant les déplacements engendrés par le premier système de force.

$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}$ Cette relation traduit le **théorème de réciprocité des travaux** de **BETTI** (cf. p.19) (cf. p.19)

5.2. Théorème de MAXWELL (réciprocité des déplacements)



Dans le cas particulier quand $P_1 = P_2 = 1$ on obtient la relation suivante :

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

Cette relation traduit le **théorème de réciprocité des déplacements** de **Maxwell** ; (cf. p.19) (cf. p.19)

Le déplacement du point d'application de la première force unitaire dans le sens d'action de cette dernière sous l'action de la seconde force unitaire, est égal au déplacement du point d'application de la seconde force unitaire dans le sens d'action de cette dernière sous l'action de la première force unitaire.

6. Calcul général des déplacements (poutres, cadres, treillis.....)

Il existe **plusieurs théorèmes** pour le **calcul des déplacements des structures**, parmi ces on peut **citer** :

6.1. Théorème de MOHR

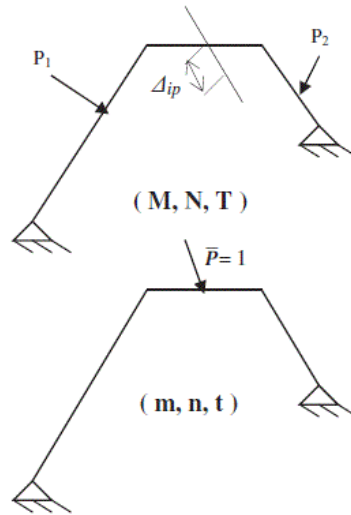
Les formules générales pour la détermination du déplacement s'obtiennent aisément à l'aide du **principe des déplacements virtuels**. On fait appel à un système sollicité -au niveau du point **dont le déplacement nous intéresse-** par **une seule force généralisée unitaire fictive** correspondante ($P^* = 1$).

Désignons par :

(N. M. T) les efforts suscités par un système de **forces extérieures réel** (ΣP).

(n. m. t) les efforts suscités par **la force unitaire fictive** ($P^* = 1$).

Δ_{ip} : signifie le **déplacement du point (i)** sous l'action d'une **force P**.



Fondamental

- Pour le calcul de la déformation, on considère **deux systèmes**, le premier est celui **des forces réelles** le deuxième est celui **d'une seule force de valeur unitaire**.
- Le principe des déplacements virtuels pour l'état intermédiaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta_{ip} = \Sigma \left[\int \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx + \Sigma \int \frac{N \cdot n}{E \cdot A} dx + \Sigma \int \frac{T \cdot t}{G \cdot A} dx + \Sigma \int \frac{M_t \cdot m_t}{E \cdot I_p} dx \right]$$

Remarque : Primo

Cette formule est **une formule générale**. Quand on détermine **les déplacements dans les poutres, cadres et arcs** d'après la méthode de **MOHR** (cf. p.19) (cf. p.19) on peut dans la **majorité des cas négliger** dans cette formule l'**effet de l'effort normal**, l'**effet de l'effort tranchant** et l'**effet du moment de torsion** pour les déformations. On prend en considération **uniquement l'effet du moment fléchissant** et cette formule s'écrit :

$$\Delta_{ip} = \Sigma \left[\int \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \right]$$

Cette formule porte le **nom de formule de MAXWELL**.

Remarque : Secundo

Quand on a à calculer **les déformations des systèmes en treillis**, la formule de **MOHR** ne garde que le **terme contenant la déformation due à l'effort normal**.

$$\Delta_{ip} = \Sigma \left[\frac{N \cdot n}{E \cdot A} L \right]$$

✂ Méthode

Les étapes à suivre pour le calcul des déplacements par la méthode de Mohr :

1. On établit un système intermédiaire que l'on charge à l'aide d'une sollicitation unitaire appliquée au point dont il faut déterminer le déplacement.
Quand on détermine les déplacements linéaires on applique la force unitaire et quand on détermine les déplacements angulaires, c'est le moment unitaire qu'on applique.
2. On écrit les expressions des forces réelles (N, T, M) ainsi que les expressions de (n, t, m) du système du à la charge unitaire.
3. On calcule l'intégrale de MOHR pour toutes les parties du système.
4. Si le déplacement obtenu par calcul est de signe positif, cela signifie que sa direction coïncide avec celle de la force unitaire. Un signe négatif montre que le déplacement est de direction opposée à celle de la force unitaire.

☞ Exemple : Application numérique N°01

-Pour la poutre représentée sur la figure suivante calculer la flèche au milieu de la poutre.

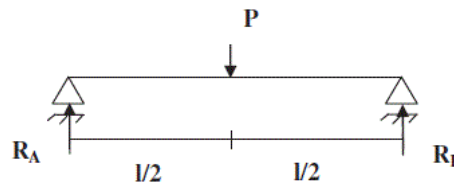


Fig. Une poutre simplement appuyée avec une charge concentré au milieu

Solution de l'exemple (Application numérique N°01) :

Poutre réelle :

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$M(x) = R_A \cdot x = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l$$

$$M = \frac{P}{2} \cdot x - P \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

Poutre fictive : $\bar{P} = 1$

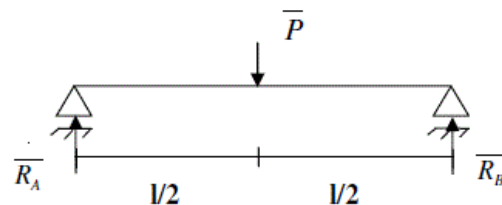
$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} \cdot x$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l$$

$$m = \frac{x}{2} - 1 \left(x - \frac{l}{2} \right)$$



$$\Delta = \Sigma \int \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx$$

On ne prend en considération que **la déformation due au moment fléchissant** (la plus importante).

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{P \cdot x}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \left[\frac{P \cdot x}{2} - P \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \left[\frac{x}{2} - x + \frac{l}{2} \right] dx$$

Après intégration :

$$\Delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Remarque

Le plus souvent **on néglige la déformation longitudinale** due à (N) et **la déformation transversale** due à (T) et on **garde que la déformation due à la flexion**:

$$\Delta = \Sigma \int \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx$$

6.2. Théorème de VERECHAGUINE (Grapho-analytique)

Le théorème de Véréchaguine permet le calcul de l'intégrale de Mohr par une multiplication particulière des efforts internes.

Pour le **cas** ou le **diagramme** du aux charges réelles a une configuration **arbitraire**, tandis que celui du à la **charge unitaire** à une configuration **linéaire**, il est préférable de **calculer l'intégrale de Mohr** [$\int M \cdot m \cdot dx$] à l'aide **d'un procédé grapho-analytique** développé par **Véréchaguine**. [5]*

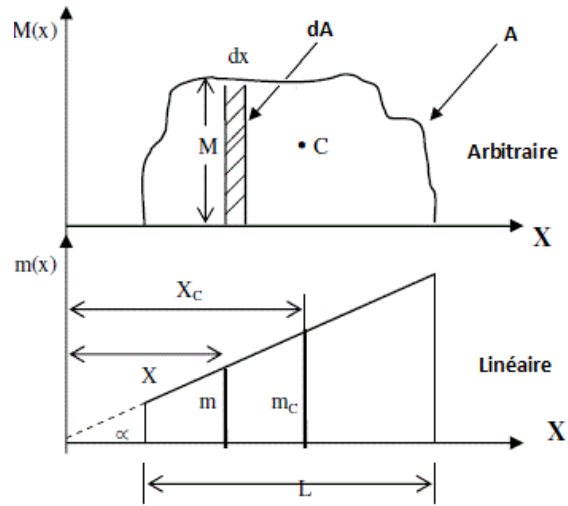
Adoptons les désignations suivantes :

A : l'aire du **diagramme de (M)** sous l'action des **charges extérieures**.

C : **Centre de gravité** du **diagramme (M)**

mc: **Ordonnée** du **diagramme des moments** dus à la **charge unitaire (m)** **située en dessous** du **centre de gravité** du **diagramme (M)**.

Xc: **L'abscisse** du **centre de gravité (C)**



Fondamental

Considérons que $(E.I)$ est constant.

$$\Delta = \frac{1}{E.I} \int M.m.dx = \frac{1}{E.I} . K, \text{ tel que } K = \int M.m.dx$$

Δ : la déformation donnée par MOHR.

$$\tan \alpha = \frac{m}{x} = \frac{\bar{m}_c}{x_c}, \quad dA = M . dx$$

$$K = \int M . m . dx = \tan \alpha \int x . dA$$

$$\int x . dA = X_c . A \quad \text{D'ou } \int M . m . dx = \tan \alpha . X_c . A$$

$$\tan \alpha = \frac{\bar{m}_c}{x_c}, \quad \bar{m}_c = \tan \alpha . X_c$$

$$K = A . \bar{m}_c$$

$$\text{Donc } \Delta = \frac{A . \bar{m}_c}{E . I}$$


Finalement le **théorème de VERECHAGUINE** est formulée comme suit :

$$\left[\Delta = \Sigma \frac{A . \bar{m}_c}{E . I} \right]$$

Méthode

Les étapes à suivre pour le calcul des déplacements par la méthode de VERECHAGUINE :


- On trace les diagrammes des moments fléchissant $M(x)$ et $m(x)$
- On calcule l'aire (A) du diagramme $M(x)$
- On détermine le centre de gravité du diagramme $M(x)$ qui est (C)
- On détermine l'abscisse (X_c) du centre de gravité (C)
- On calcule la valeur de $m(X_c)$ qui représente \bar{m}_c
- On applique finalement la formule de Véréchaguine pour calculer des déplacements

 **Remarque**

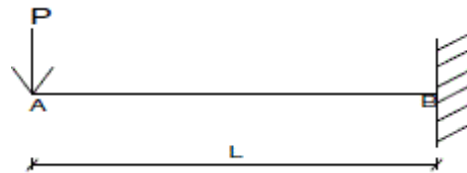
1. **la formule précédente** n'est valable que si **un des deux diagrammes est linéaire**.
2. Si le **diagramme linéaire** est **une ligne brisée** (c'est-à-dire un diagramme composé de diagrammes simples) ou s'il traverse l'axe, **le calcul se fait par intervalles**.
3. **Quand les deux diagrammes sont linéaires** n'importe lequel peut jouer le rôle du **diagramme non linéaire**.
4. Le **résultat porte le signe (+)** si les deux diagrammes le trouvent du côté de la ligne de référence (c'est-à-dire ont le même signe).

 **Complément**

La **multiplication de Véréchaïne (Grapho-analytique)** suit les termes de l'**intégrale de Mohr** (voir **Tableau**)

 **Exemple : Application numérique N°02**

-En utilisant **la méthode de Véréchaïne**, déterminer **la rotation** au point (A), dans le cas **d'une poutre** encasturé-libre avec une charge concentré appliqué à l'extrémité libre.



Solution de l'exemple (Application numérique N°02) :

On utilisant le tableau de multiplication des diagrammes (cf. Tableau de multiplication -Véréchaïne)

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l M \cdot m \, dx$$

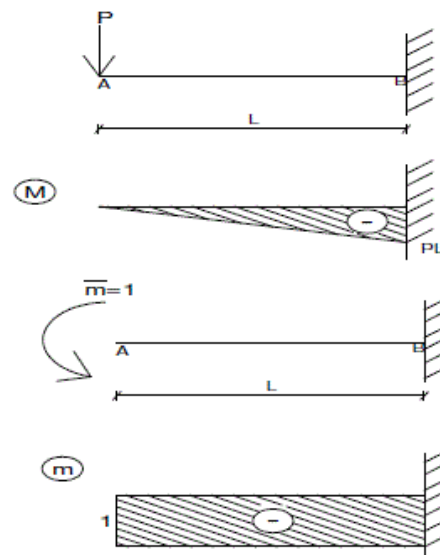
$$M = -P x$$

$$m = -1$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot \bar{h} \cdot l$$

$$= \frac{1}{2EI} \cdot (-Pl) \cdot (-1) \cdot l$$

$$\boxed{\theta_A = \frac{Pl^2}{2EI}}$$



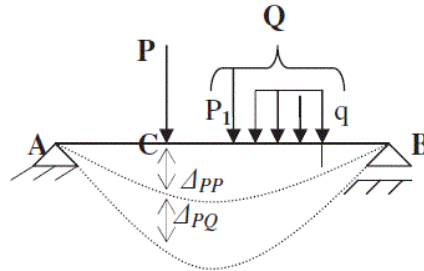
6.3. Théorème de CASTIGLIANO

6.3.1. Application du théorème pour les poutres et cadres

Il existe **une autre méthode** qui utilise **l'énergie potentielle de déformation** pour le calcul **des déplacements** d'une structure chargée par un système de forces.

Considérons un système élastique (poutre représentée) sollicité par **un système de charge (Q)** et une **charge concentrée (P)**.

Le déplacement du point d'application de la force (P) est le point (C), ce déplacement est noté (Δ_{pp}). Le déplacement du point (C) sous l'action du système de charge (Q) est noté (Δ_{pQ}).



Le **déplacement total** du point (C) est égal à :

$$\Delta p = \Delta_{pp} + \Delta_{pQ}$$

L'**énergie potentielle** du système élastique est donnée par [voir le cours précédent] :

$$U = (1/2) \cdot P \cdot \Delta_{pp} + \Delta_{pQ} + U_{QQ}$$

U_{QQ} : l'énergie accumulée au cours de la déformation du système par la force (Q) uniquement.

On **remarque** que le premier terme de l'équation est divisé par deux contrairement au deuxième et au troisième terme car **le travail se transforme totalement en énergie**, pour les deux autres termes **la transformation est partielle**.

$$\Delta_{pp} = P \cdot \delta_{pp}$$

$$\text{Avec : } U = (1/2) \cdot P^2 \cdot \delta_{pp} + P \cdot \Delta_{pQ} + U_{QQ}$$

Si on dérive par rapport à (P), on aura :

$$\partial U / \partial P = P \cdot \delta_{pp} + \Delta_{pQ} + 0 = \Delta_{pp} + \Delta_{pQ} = \Delta P$$

$$\text{Donc : } \Delta P = \partial U / \partial P$$

U : **Énergie potentielle de déformation**

Fondamental

Théorème de CASTIGLIANO (cf. p.19) (cf. p.19) : Le déplacement du point d'application d'une force généralisée dans le sens d'application de cette dernière est égal à **la dérivée partielle de l'énergie potentielle** par rapport à cette force.

Dans **la formule de Castigliano**, on remplace le cas général de l'énergie potentielle de déformation par sa formule, on aura :

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial P} \left[\int \frac{M^2}{2E \cdot I} dx + \int \frac{N^2}{2E \cdot A} dx + \int \frac{T^2}{2G \cdot A} dx + \int \frac{M_t^2}{2E \cdot I_p} dx \right]$$

$$\Delta_p = \left[\int \frac{M(x)}{E \cdot I} dx \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} + \int \frac{N(x)}{E \cdot A} dx \cdot \frac{\partial N(x)}{\partial P} + \int \frac{T(x)}{G \cdot A} dx \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial P} \right]$$

$$+ \left[\int \frac{M_t(x)}{E \cdot I_p} dx \cdot \frac{\partial M_t(x)}{\partial P} \right]$$

En négligeant l'influence qu'exercent les efforts normaux et tranchants sur le déplacement, on aura :

$$\Delta_p = \left[\int \left(\frac{M(x)}{E \cdot I} \right) \cdot \left(\frac{\partial M(x)}{\partial P} \right) \cdot dx \right]$$

Remarque

Si (P_n) est **une force concentrée le déplacement (ΔP) sera un déplacement linéaire**, par contre si **la force généralisée est un moment concentré, le déplacement correspondant sera un déplacement angulaire**.

Conseil

Le **théorème de Castigliano** ne permet que la **détermination des déplacements des points d'application des forces extérieures et seulement dans la direction de ces forces**.

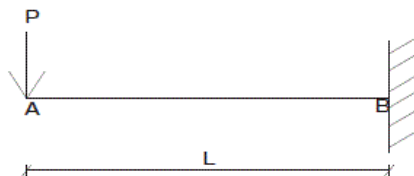
Méthode

En pratique, on a besoin de **déterminer le déplacement des points quelconques et suivant des directions quelconques**. Pour cette raison, on suit **les étapes** suivantes afin de résoudre ce problème :

1. **On applique** au point et suivant la direction choisie **une force (P^*)**.
2. **On établit** l'expression de l'énergie potentielle compte tenu de la force (P^*).
3. **On dérive** cette expression par rapport à (P^*).
4. **On donne** finalement la valeur zéro (0) à la force (P^*) et on aura le déplacement recherché.

Exemple : Application numérique N°03

-Calculer le déplacement ΔA par la méthode de Castigliano dans le cas d'une poutre encastré-libre (idem exemple N°2)



Solution de l'exemple (Application numérique N°03) :

Solution :

$$u = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI_0} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$M(x) = -Px \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI_0} \int_0^l -Px(-x) dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^l Px^2 dx$$

$$\Delta_A = \frac{P}{3EI} l^3$$

6.3.2. Application du théorème pour les poutres en treillis

Le théorème de Castigliano peut être utilisé pour **le calcul des déformations dans le cas des poutres en treillis. L'énergie potentielle de déformation dans le cas de l'effort normal** est donnée par **la formule** suivante :


$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E \cdot A_i}$$

N_i : Effort normal à l'intérieure de la barre (i) du système en treillis engendré par les charges extérieures appliquées.

l_i : La longueur de la barre (i) du système en treillis.

A_i : La section de la barre (i) du système en treillis.

n : Nombre de barres qui composent le système en treillis.

 **Fondamental**

En appliquant **le théorème de Castigliano**, on aura :

$$\Delta_p = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E \cdot A_i} \left(\frac{\partial N_i}{\partial P} \right)$$

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i \bar{N}_i}{E \cdot A_i}$$

N_i : Effort normal à l'intérieure de la barre (i) du système en treillis engendré par la présence d'une force unitaire exercée sur le nœud choisi et suivant la direction ou on veut calculer le déplacement.

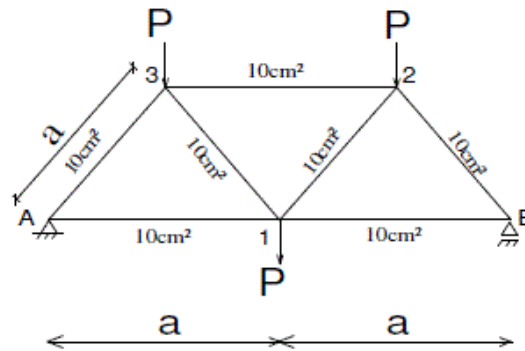
Donc cette formule s'appelle **la formule de Maxwell**

Exemple : Application numérique N°04

-Calculer le déplacement horizontal du nœud B (Δ_B).

Sachant que : $P=100$ KN, $A=10$ cm²,

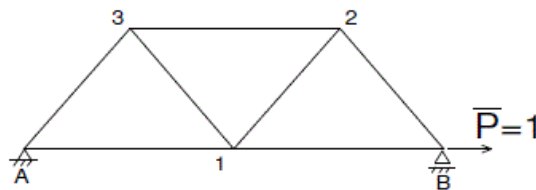
$a=500$ cm, $E=2,1 \cdot 10^7$ N/cm²



Solution de l'exemple (Application numérique N°04) : [6]*

N : Efforts dans les barres dus aux charges réelles.

\bar{N} : Efforts dans les barres dus à une charge unitaire appliquée au niveau du nœud (B) horizontalement.



-Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Barre	l_i	EA_i	N_i	\bar{N}_i	$\frac{N_i \bar{N}_i l_i}{EA_i}$
A1	a	EA	$\frac{\sqrt{3}P}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}P \cdot a}{2EA}$
A3	a	EA	$-\sqrt{3}P$	0	0
B1	a	EA	$\frac{\sqrt{3}P}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}P \cdot a}{2EA}$
B2	a	EA	$-\sqrt{3}P$	0	0
1-2	a	EA	$\frac{P}{\sqrt{3}}$	0	0
1-3	a	EA	$\frac{P}{\sqrt{3}}$	0	0
2-3	a	EA	$-\frac{P}{\sqrt{3}}$	0	0

Tableau récapitulatif des résultats

$$\Delta_B = \frac{2\sqrt{3} \cdot P \cdot a}{2E \cdot A} = \frac{\sqrt{3} \cdot P \cdot a}{E \cdot A}$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 500}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 10}$$

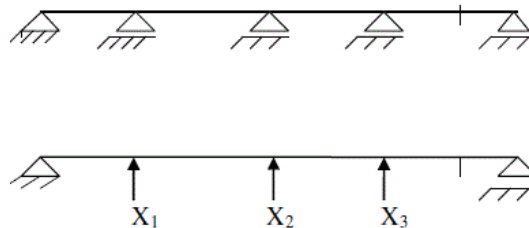
$$\Delta_B = 0,412 \text{ cm}$$

6.4. Théorème de MENABREA

Le théorème de *MENABREA* (cf. p.20) (cf. p.19) est l'application du théorème de Castigliano pour les systèmes hyperstatiques.

Méthode

La résolution de ce système se fait dans l'ordre suivants :



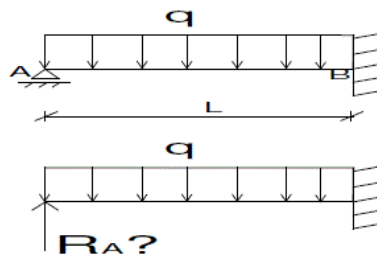
- Remplaçons dans un système hyperstatique les liaisons surabondantes par des réactions correspondantes : X_1 , X_2 , X_3 ,etc.
- D'après le théorème de Castigliano, calculons les déplacements correspondant Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 ,.....etc, sachant bien que les déplacements au niveau des appuis sont nuls :

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0$$

La résolution de ces équations nous permet de déterminer les réactions au niveau des liaisons surabondantes et le système deviendra isostatique.

Exemple : Application numérique N°05

-Résoudre le système hyperstatique en utilisant le principe de Menabrea



Solution de l'exemple (Application numérique N°05) :

$$M = R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial R_A} \cdot dx$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l (R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2})(x) \cdot dx$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^3}{3} - q \frac{x^4}{4 \cdot 2} \right]_0^l$$

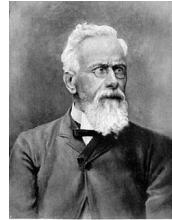
$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_A l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right] = 0$$

$$\boxed{R_A = \frac{3ql}{8}}$$

Ressources annexes



>

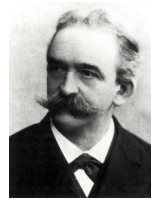


James Mill

>

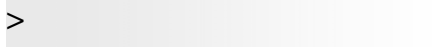


>



>





Références



- 5 Résistance des matériaux. (Tomo 1 et 2) Giet et Geminard -Dunod-
- 6 Problèmes de RDM. Mirolioubov -mir-

