Table des matières

Chapitre II :Les systèmes linéaires continus

I

1. Présentation

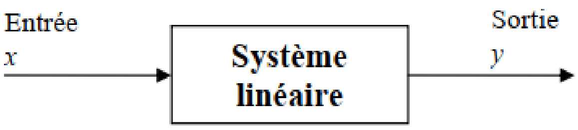
On appelle système dynamique un système dont l'étude ne peut être réalisée qu'en prenant en compte les valeurs passées du phénomène. Les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrées. Les phénomènes d'inertie (inertie

mécanique, inertie thermique...) influent sur le comportement du système.

Nous limiterons notre étude aux seuls systèmes linéaires continus et invariants.

2. Mise en équation d'un système linéaire

Un système dynamique linéaire peut être représenté par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.



L'équation générale d'un système linéaire est de la forme :

$$a_n \frac{d\,y^n}{d\,t^n} + a_{n-1} \frac{d\,y^{n-1}}{d\,t^{n-1}} + \dots\dots\dots + a_2 \frac{d\,y^2}{d\,t^2} + a_1 \frac{d\,y}{d\,t} + a_1\, y = b_m \frac{d\,y^m}{d\,t^m} + b_{m-1} \frac{d\,y^{m-1}}{d\,t^{m-1}} + \dots\dots\dots + b_2 \frac{d\,y^2}{d\,t^2} + b_1 \frac{d\,y}{d\,t} + b_1\, y$$

Nous ne savons résoudre dans le cas général que les équations différentielles du premier et du second ordre et dans quelques cas particuliers des équations d'ordre supérieur.

Le problème de l'automatisation est plus complexe que la résolution puisqu'il s'agit de déterminer la loi d'entrée x qui permet d'obtenir la sortie désirée y.

La représentation par l'équation différentielle nécessite pour connaître la réponse à une entrée de résoudre l'équation

Principe de la résolution

La solution d'une équation différentielle est la somme d'une solution générale et de la solution particulière. La solution générale représente la composante transitoire, la solution particulière représente la composante permanente. La solution générale est déterminée par la résolution de l'équation sans second membre. La solution particulière est déterminée en fonction de la forme de x(t).

3. Transformée de Laplace

L'étude des systèmes s'accompagne inévitablement de la manipulation d'équations différentielles. Or les opérations liées à cette manipulation sont souvent délicates et la résolution des équations n'est pas toujours simple. Pour faciliter les calculs, on utilise un outil mathématique puissant : la transformée de Laplace.

3.1. Formulation mathématique

Soit $f(t)$ une fonction réelle de la variable réelle , définie pour toute valeur de t , sauf éventuellement pour certaines valeurs, en nombre fini dans tout intervalle fini, et nulle pour $t<0$.

La transformée Laplace de $f(t)$ est définie par l'égalité :

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt$$

p Étant une variable complexe.

On dit que F(p) est la transformée de f(t) et que f(t) est l'original de F(p).

Pour résoudre les équations différentielles grâce à la transformée de Laplace, il est nécessaire de savoir effectuer le passage de f(t) à F(p) mais aussi de à f(t).

3.2. Propriétés

Les propriétés de la transformée de Laplace sont réunies dans le tableau ci-après :

Propriété	$f(t)$	$F(p)$
Linéarité	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(p)+bF_2(p)$
Dérivation	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
Intégration	$\int f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
Retard	$f(t-\theta)$	$e^{-\theta p}\cdot F(p)$
Changement d'échelle	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$

A ces propriétés, on doit joindre les théorèmes suivants :

1. Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{p\to 0} pF(p)=\lim_{t\to\infty} f(t)$$

2. Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{p\to\infty} pF(p)=\lim_{t\to 0} f(t)$$

Ce résultat n'est valable que si $\{pF(p)\}$ n'a aucun pôle (racine du dénominateur) dans le demi-plan droit du plan complexe et aucun pôle sur l'axe imaginaire, à l'exception du pôle simple à l'origine.

3.3. Transformée Inverse de Laplace

On peut exprimer la Transformée inverse, en utilisant les intégrales de Fourrier et de Melin - Fourrier.

Si F(p) est la Transformée de Laplace d'une fonction f(t), on a : $f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} F(p)dt \ , \ t\geqslant 0$

Où c est une constante, appelée abscisse de convergence.

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, F(p) est immédiatement reconnaissable dans la table,
- soit, lorsque la fonction F(p) n'apparaît pas dans la table, décomposer F(p) en fractions partielles et écrire F(p) en termes de fonctions simples de p pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

A noter que cette manière simple de trouver la Transformée inverse est basée sur le fait qu'il existe une correspondance unique entre la fonction temporelle et sa Transformée inverse de Laplace du fait de la continuité de la fonction temporelle.

Soit : $F(p)\xrightarrow{TL} f(t)$

Si F(p) peut être décomposée en termes distincts : $F(p)=F_1(p)+F_2(p)+F_3(p)+\dots\dots\dots+F_n(p)$

et **Si** les transformées inverses sont disponibles,

Alors : $TL^{-1}F(p)=TL^{-1}F_1(p)+TL^{-1}F_2(p)+\dots\dots\dots+TL^{-1}F_n(p)=f_1(t)+f_2(t)\dots\dots\dots+f_n(t)$

Remarque

Dans le domaine de la Théorie du contrôle, F(p) est fréquemment mise sous la forme : $F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}$

avec A(p) et B(p) des polynômes en p, et degré B(p) ≤ degré A(p)

Cette méthode ne s'applique que si les racines du polynôme du dénominateur sont connues, autrement dit, que si le dénominateur est factorisable :

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{(p+z_1)(p+z_2)\dots\dots(p+z_m)}{(p+p_1)(p+p_2)\dots\dots(p+p_n)}$$

3.3.1. Si F(p) ne contient que des pôles distincts

F(p) peut, alors, être décomposée en une somme de fractions partielles :

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{a_1}{p+p_1}+\frac{a_2}{p+p_2}+\dots\dots+\frac{a_n}{p+p_n}$$

Avec a_1 et a_2 les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(a_1 p+a_2)_{p=-p_1}=\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)(p+p_2)\right]_{p=-p_1\, ou\, p=-p_2}$

avec : $a_i = [\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_i)]_{p=-p_i}$

a_i : constante appelée " résidu au pôle p = pi "

Exemple : 01

Trouver la Transformée Inverse de : $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$

Exemple : 02

Trouver la Transformée Inverse de : $F(p) = \frac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+1)(p+2)}$

3.3.2. Si F(p) contient des pôles complexes conjugués

Soient p_1 et p_2 les 2 pôles complexes conjugués, alors :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{a_1 p + a_2}{(p+p_1)(p+p_2)} + \frac{a_3}{p+p_3} + \ldots\ldots. + \frac{a_n}{p+p_n}$$

Avec a_1 et a_2 les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(a_1 p + a_2)_{p=-p_1} = [\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)(p+p_2)]_{p=-p_1 \, ou \, p=-p_2}$

3.3.3. Si F(p) contient des pôles multiples

Soit p_1 le pôle multiple de F(p) , r étant l'indice de multiplicité de ce pôle.

$$A(p) = (p+p_1)^r (p+p_{r+1})(p+p_{r+2}) + \ldots\ldots. + (p+p_n)$$

Alors F(p) s'écrit :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_r}{(p+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(p+p_1)^{r-1}} + \ldots\ldots.. + \frac{b_1}{(p+p_1)} + \frac{a_{r+1}}{(p+p_{r+1})} + \frac{a_{r+2}}{(p+p_{r+2})} + \ldots\ldots.. + \frac{a_n}{(p+p_n)}$$

$$a_k = [\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_k)]_{p=-p_k} \quad ,(k=r+1\,;r+2\,;\ldots\ldots..n),$$

$$b_r = \frac{1}{0!}[\frac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r]_{p=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \frac{1}{1!}[\frac{d}{dt}[\frac{B(p)}{A(p)}](p+p_1)^r]_{p=-p_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!}[\frac{d^j}{dt^j}[\frac{B(p)}{A(p)}](p+p_1)^r]_{p=-p_1}$$

$$¿b_1 = \frac{1}{(r-1)!}[\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}[\frac{B(p)}{A(p)}](p+p_1)^r]_{p=-p_1}$$

Exemple

Trouver la Transformée Inverse de

$$F(p)=\frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$$