

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX 3.

CHAPITRE 1 : DÉFORMATIONS DE FLEXION (LES POUTRES FLÉCHIES)



Au profit des étudiants 4èmes année

Cycle Ingénieur Polytechnique

Spécialité Bâtiment Durable-G.C

Dr. Mohamed MERAZI

École nationale polytechnique d'Oran Maurice Audin

Département de Génie Civil

Email : merazi@hotmail.fr

Table des matières



I - CHAPITRE 1 : DÉFORMATIONS DE FLEXION (LES POUTRES FLÉCHIES)	3
1. Objectifs spécifiques du chapitre 1	3
2. Généralités	3
3. Équation différentielle de la ligne élastique (Équation de la flèche)	5
3.1. Démonstration et méthodes de résolutions	5
3.2. Méthode de l'intégration directe de l'équation de la ligne élastique	6
3.3. Méthode de la poutre fictive (auxiliaire)	8
3.4. Méthode des paramètres initiaux (P.I)	10
4. Superposition des déformations	13
Glossaire	15
Abréviations	16
Références	17
Webographie	18

CHAPITRE 1 : DÉFORMATIONS DE FLEXION (LES POUTRES FLÉCHIES)



1. Objectifs spécifiques du chapitre 1

- **Définir** la notion de l'axe neutre et dimensionnement.
- **Caractériser** la déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche).
- **Déterminer** les expressions des composantes du déplacement des lignes moyennes des poutres de section constantes par différentes méthodes.
- **Vérifier** les limites de déformabilités des poutres.

2. Généralités

Définition

-
- Une **poutre** est un objet à la forme élancée (l'une des dimension est très grande par rapport à l'autre), de section constante ou qui varie progressivement et ayant une fibre moyenne rectiligne ou à fort rayon de courbure.
 - Quand une **poutre** est soumise à la flexion, sa **ligne moyenne** qui avant déformation était droite, se déforme sous l'effet du moment fléchissant. Après déformation, l'allure de l'axe longitudinal de la poutre (déformée) est appelée ligne élastique.

Rappel

La déformation dans le cas de la flexion est caractérisée par une **déformation linéaire** et une **déformation angulaire**.

Les **caractéristiques de la déformation** sont les **composantes** : (y) , (u) et (θ) (sont des composantes du déplacement).

3. Équation différentielle de la ligne élastique (Équation de la flèche)

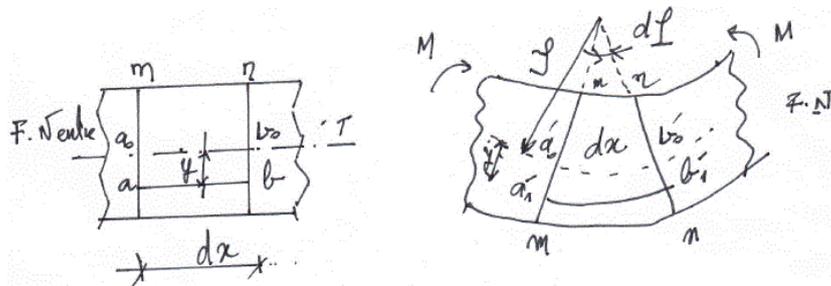
3.1. Démonstration et méthodes de résolutions

On étudie la **déformation** d'un quadrillage tracé préalablement sur **une poutre**.

On remarque que **les lignes longitudinales** du quadrillage **fléchissent** suivant un arc de cercle. **Dans la zone comprimée, les fibres se raccourcissent**, tandis que dans **la zone de traction elles s'allongent**. Ces deux zones sont espérées par un **plan neutre** ayant un **rayon de courbure** (ρ). **La longueur de la couche neutre ne varie pas lors de la flexion**. **L'allongement relatif** d'une fibre se trouvant à **une distance** (y) de l'axe neutre.

y : l'ordonnée d'un point de la fibre moyenne déformé.

L'expression de l'équation de la déformation peut être obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant. *



$$\varepsilon: \text{déformation relative} = \frac{(\text{Etat final}) - (\text{Etat initial})}{(\text{Etat initial})} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{a'_1 b'_1 - ab}{ab}$$

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) dP - dx}{dx} = \frac{(\rho + y) dP - \rho \cdot dP}{\rho \cdot dP} = \frac{y}{\rho} \text{ avec } \rho: \text{rayon de courbure}$$

$$\text{Loi de Hook: } \sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$$

$$\text{on a } M_z = \int \sigma \cdot dA \cdot y \Rightarrow M_z = \int \frac{E \cdot y^2}{\rho} \cdot dA = \frac{E \cdot I_z}{\rho}$$

$$\text{avec } I_z = \int_A y^2 \cdot dA, I_z: \text{moment d'inertie axiale}$$

$$\text{Donc } \left[\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \right] \text{ avec } \frac{1}{\rho}: \text{La courbure de l'axe de la poutre}$$

EI_z : Rigidité de la poutre, M_z : Moment fléchissant

$$\text{Mathématiquement: } \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Remarque

Le signe du deuxième terme de la précédente équation dépend de l'orientation des axes, Il est (+) si **Y est orienté vers le haut** ↑, il est par contre (-) si l'axe **Y est orienté vers le bas** ↓ (Y repère).

$$\frac{M}{EI_z} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Pour une poutre **rigide** $dy/dx \ll$ (**infinitement petit**) donc $(dy/dx)^2 = 0$ (avec une approximation suffisante **négliger** $(y')^2$ devant l'unité (1)).

Dans le **domaine élastique** les déformations sont faibles $\Rightarrow y$ et y' sont faibles.

Fondamental

Alors l'équation différentielle de la ligne élastique s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{E I_z}$$

Cette équation est valable dont l'hypothèse des petites déformations dues principalement au **moment fléchissant** dans **une poutre**.

Pour **déterminer la forme de L.E*** de la poutre , il faut **résoudre l'équation** précédente et **trouver les expressions analytiques** de $y(x)$ et de $\theta(x)$.

Donc la **résolution** de cette **équation** passe par **trois méthodes** différentes.

- La **méthode d'intégration directe** de l'équation de la ligne élastique.
- La **méthode de la poutre fictive** (auxiliaire).
- La **méthode des paramètres initiaux**. [2]*

3.2. Méthode de l'intégration directe de l'équation de la ligne élastique

Méthode

La **résolution de l'équation différentielle de la ligne élastique** se fait dans l'ordre suivants :

En **intégrant une première fois l'équation de L.E***, on obtient l'expression de l'angle de **rotation** $\theta(x)$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = - \int \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} dx + C$$

En **intégrant une deuxième fois**, on aura l'expression de $y(x)$:

$$y(x) = - \iint \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} dx^2 + Cx + D$$

$$y(x) = \int \left[- \int \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} dx + C \right] dx + D$$

tel que: C, D sont des constantes d'intégration

Elle intervient des **constantes d'intégrations** (deux constantes par **expression de moment fléchissant**) qui seront déterminées à partir des **conditions aux limites**.

Exemple

Application numérique N°01 [3]*

-Déterminer l'expression de la **flèche** $y(x)$ et de la **rotation** $\theta(x)$ de la **poutre** indiquée sur la figure 1 en utilisant la **méthode de l'intégration**:

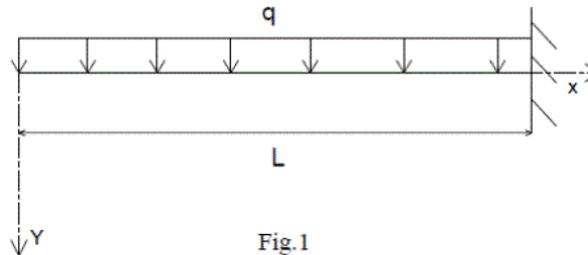


Fig.1

Solution de l'exemple (Application numérique N°01) :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI_z} \quad (- \text{ pour l'axe } (oy) \text{ vers le bas})$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} \Rightarrow \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} = \frac{qx^2}{2EI_z}$$

$$\theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \int \frac{qx^2}{2EI_z} dx = \frac{qx^3}{6EI_z} + c_1$$

$$y(x) = \int \left(\frac{qx^3}{6EI_z} + c_1 \right) dx = \frac{qx^4}{24EI_z} + c_1 x + d_1$$

Détermination de c_1 et d_1 pour les conditions aux limite $y(l) = 0$ et $\theta(l) = 0$

$$\theta(l) = 0 \Rightarrow \frac{ql^3}{6EI_z} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{ql^3}{6EI_z}$$

$$y(l) = 0 \Rightarrow \frac{ql^4}{24EI_z} - \frac{ql^4}{6EI_z} + d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = \frac{ql^4}{8EI_z}$$

Donc :

$$\theta(x) = \frac{qx^3}{6EI_z} - \frac{ql^3}{6EI_z}$$

$$y(x) = \frac{qx^4}{24EI_z} - \frac{ql^3}{6EI_z} x + \frac{ql^4}{8EI_z}$$

3.3. Méthode de la poutre fictive (auxiliaire)

Méthode

La méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique est très efficace pour les poutres simples à un seul tronçon, mais elle devient de plus en plus laborieuse avec l'augmentation de nombre de tronçons. Pour simplifier les calculs ; il est parfois utile de se servir d'autres méthodes telles que la méthode de la poutre fictive (auxiliaire)

Définition

la méthode de la poutre fictive (auxiliaire) est basé sur l'analogie qui existe entre l'équation différentielle (1) de la ligne élastique et celle qui lié le moment fléchissant à la charge répartie (2)pour déterminer $y(x)$ et $\theta(x)$.

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{M(x)}{E I_z} \dots\dots\dots(1) \text{ PR}$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \dots\dots\dots(2) \text{ PF}$$

Information

Cette méthode consiste à considérer le diagramme des moments fléchissant comme une charge fictive répartie agissant comme une poutre fictive.

Complément

Les étapes à suivre pour déterminer les expressions de $y(x)$ et $\theta(x)$ sont les suivantes :

1. Détermination du moments fléchissant $M(x)$ de la poutre réelle.
2. Définition de la poutre fictive conformément aux conditions de limites de la poutre réelle.
3. Chargement de certaine poutre «la poutre fictive» par une charge fictive d'intensité $qf(x)=M(x)/E.I_z$
4. Construction des diagrammes des efforts fictives [$Tf(x)$ et $Mf(x)$] de la poutre auxiliaire chargée par $qf(x)$.
5. L'analogie entre l'équation (1) et l'équation (2) nous permet de déterminer les expression de $\theta(x)$ et $y(x)$ tel que ;

$$T^f(x)=\theta(x), \quad M^f(x)=y(x) \dots\dots\dots(3)$$

Remarque

1. La direction de la charge fictive positive (+) doit coïncider avec la direction de l'axe de (Y).
2. La détermination de $Tf(x)$ et de $Mf(x)$ selon l'équation (2) et de $\theta(x)$ et $y(x)$ à partir de l'équation (1) est une opération d'intégration. Ces constantes d'intégration dans les deux cas ne sont pas les mêmes.
 - Pour annuler ces constantes d'intégration, on construit les appuis de la poutre auxiliaire conformément aux conditions (formule 3).

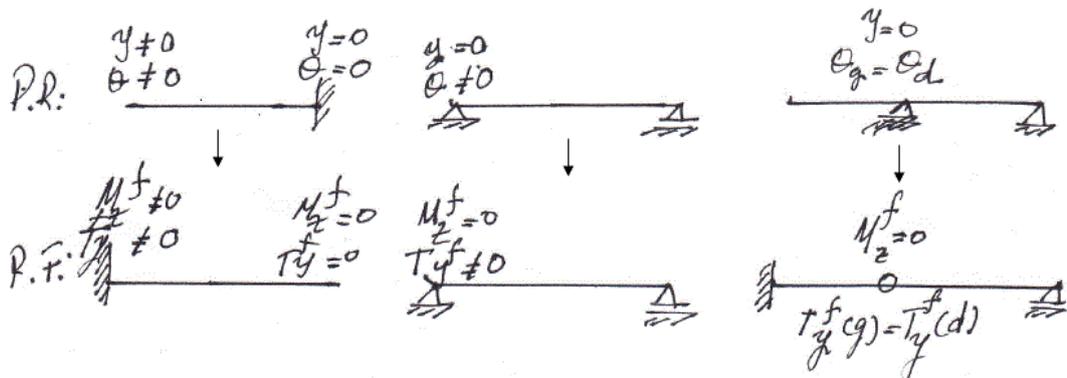
Exemple

Les déplacements possibles en fonction de type d'appui

[cf.]

	Appui simple	Appui double	Encastrement	Extimité libre	Appui intermédiaire
Déformation linéaire	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$	$y \neq 0$	$y = 0$
Déformation angulaire	$\theta \neq 0$	$\theta \neq 0$	$\theta = 0$	$\theta \neq 0$	$(\theta_g = \theta_d) \neq 0$

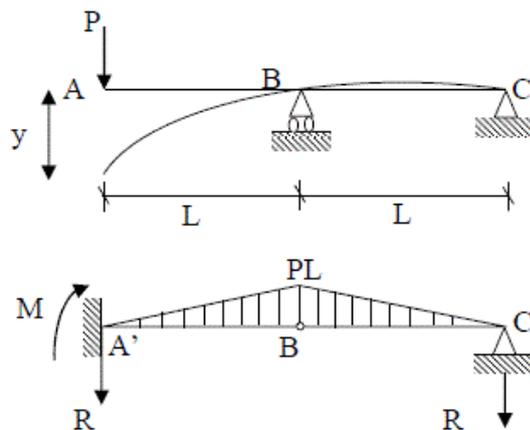
Exemple de construction des appuis :



Exemple

Application numérique N°02 [4]*

On donne P, L et E I

- Déterminer θ_c , θ_A et y_A et la charge P pour que ($y_{\max} \leq L/300$)

Solution de l'exemple (Application numérique N°02) :

-Calcul des réactions :

$$\begin{aligned} \sum M_{/A'd} &= 0 \\ R_{C'}L + PL \frac{L}{2} \frac{L}{3} &= 0 \\ \Rightarrow R_{C'} &= -\frac{PL^2}{6} \Rightarrow T_{C'} = -R_{C'} = \frac{PL^2}{6} \\ R_{A'} &= -PLL + \frac{PL^2}{6} = \frac{-5PL^2}{6} \Rightarrow T_{A'} = R_{A'} = \frac{-5PL^2}{6} \\ M_{A'} &= \frac{-PL^2}{6} 2L + PL^2 \frac{L}{3} = \frac{2}{3} PL^3 \\ \text{D'où } \theta_A &= \frac{T_{A'}}{EI} = \frac{-5PL^2}{6EI} \\ \theta_C &= \frac{T_{C'}}{EI} = \frac{PL^2}{6EI} \\ y_{\max} &= \frac{M_{A'}}{EI} = \frac{2PL^3}{3EI} \leq \frac{L}{1000} \Rightarrow P \leq \frac{EI}{2L^2} \end{aligned}$$

3.4. Méthode des paramètres initiaux (P.I)

Méthode

Introduction

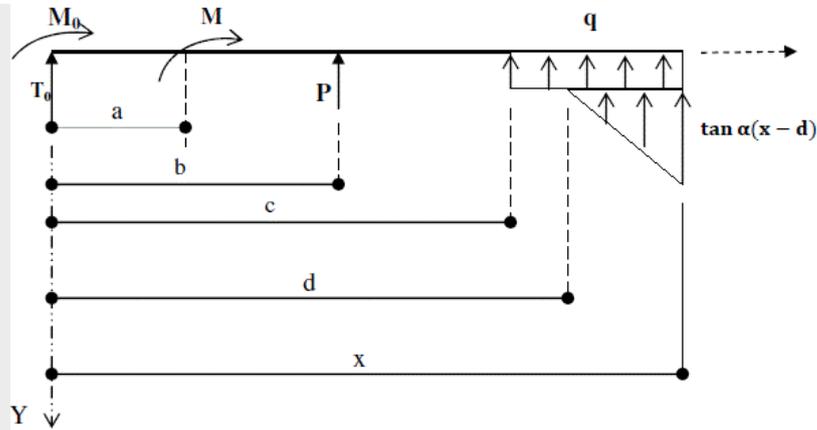
La détermination **des déplacements** par la méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique pour le cas de poutres ayant un nombre important de tronçon dont chacun possède sa propre équation du moment fléchissant présente **des difficultés considérables dues à la détermination des constantes arbitraires d'intégration.**

Pour simplifier ce problème, on fait appel à **la méthode** de (P.I*) qui est fondée sur les principes suivants :

Fondamental

1. **L'origine des coordonnées** est choisie au point situé à **l'extrémité gauche de la poutre.**
2. **L'expression de M(x)** est obtenue en calculant **les moments créés par les forces situées à gauche** de la section considérée à une distance (x) de l'origine.
3. Dans le cas où il y a **une discontinuité de la charge répartie**, On la prolonge jusqu'au bout de tronçon considéré. Cette opération consiste à compenser la charge réelle qui sollicite la poutre. **on introduit une charge compensatrice de sens inverse.**

Considérons une partie de la poutre chargée par un certain système de forces. Dans une section(x) :



$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b)^1 + q \frac{(x-c)^2}{2} + \tan \alpha \frac{(x-d)^3}{6}$$

$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + \left| \begin{array}{l} M(x-a)^0 \\ x > a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} P(x-b)^1 \\ x > b \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} q \frac{(x-c)^2}{2} \\ x > c \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \tan \alpha \frac{(x-d)^3}{6} \\ x > d \end{array} \right| \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_z}{EI_z} \dots \dots \dots (2)$$

$$E \cdot I_z \frac{d^2 y}{dx^2} = - \left[M_0 + T_0 x + \left| \begin{array}{l} M(x-a)^0 \\ x > a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} P(x-b)^1 \\ x > b \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} q \frac{(x-c)^2}{2} \\ x > c \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \tan \alpha \frac{(x-d)^3}{6} \\ x > d \end{array} \right| \right]$$

L'intégration de cette équation nous donne :

$$E \cdot I_z \frac{dy}{dx} = E \cdot I_z \cdot \theta = C - \left[M_0 x + T_0 \frac{x^2}{2} + \left| \begin{array}{l} M(x-a)^1 \\ x > a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} P(x-b)^2 \\ x > b \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} q \frac{(x-c)^3}{6} \\ x > c \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \tan \alpha \frac{(x-d)^4}{24} \\ x > d \end{array} \right| \right]$$

On intègre une fois encore :

$$E \cdot I_z y(x) = D + C(x) - \left[M_0 \frac{x^2}{2} + T_0 \frac{x^3}{6} + \left| \begin{array}{l} M(x-a)^2 \\ x > a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} P(x-b)^3 \\ x > b \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} q \frac{(x-c)^4}{24} \\ x > c \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \tan \alpha \frac{(x-d)^5}{120} \\ x > d \end{array} \right| \right]$$

Pour : $x = 0$, on aura :

$$E \cdot I_z \cdot \theta(x=0) = C, E \cdot I_z \cdot y(x=0) = D$$

On peut noter : $E \cdot I_z \cdot \theta_0 = C, E \cdot I_z \cdot y_0 = D$

θ_0, y_0 : représentent les valeurs de $\theta(x), y(x)$ au niveau de l'extrémité libre.

$$E \cdot I_z y(x) = E \cdot I_z \cdot y_0 + E \cdot I_z \cdot \theta_0(x) - \left[M_0 \frac{x^2}{2} + T_0 \frac{x^3}{6} + \left| \begin{array}{l} M(x-a)^2 \\ x > a \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} P(x-b)^3 \\ x > b \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} q \frac{(x-c)^4}{24} \\ x > c \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \tan \alpha \frac{(x-d)^5}{120} \\ x > d \end{array} \right| \right] \dots \dots \dots (3)$$

Rappel

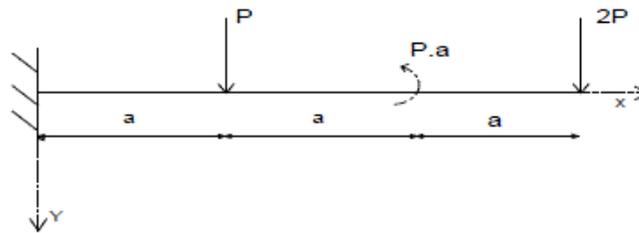
L'équation N° (3) s'appelle **équation universelle de la ligne élastique**, l'ordre de résolution des problèmes à l'aide de cette équation est :

1. On choisit l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre.
2. On détermine « Si cela est possible » les grandeurs des P.I* : θ_0, y_0, M_0, T_0
3. En utilisant l'équation (3), On compose l'équation de $y(x)$.
4. L'expression de $\theta(x)$ se détermine par **différentiation (dérivé)** de l'équation $y(x)$.
5. Si θ_0, y_0 ne sont pas connus d'avance, ils se déterminent à l'aide des conditions d'appuis.
6. Si les charges réparties n'atteignent pas l'extrémité droite en effet prolongent jusqu'à cette extrémité (et on retranche la partie ajoutée)

Exemple

Application numérique N°03

-Déterminer l'expression de la flèche $y(x)$ et de la rotation $\theta(x)$ en utilisant la méthode des P.I*.



Solution de l'exemple (Application numérique N°03) :

L'équation général de la méthode des paramètres initiaux :

$$E \cdot I_z y(x) = E \cdot I_z \cdot y_0 + E \cdot I_z \cdot \theta_0(x) - \left[M_0 \frac{x^2}{2} + T_0 \frac{x^3}{6} + \left| M \frac{(x-a)^2}{2} \right|_{x>a} + \left| P \frac{(x-b)^3}{6} \right|_{x>b} + \left| q \frac{(x-c)^4}{24} \right|_{x>c} + \left| \tan \alpha \frac{(x-d)^5}{120} \right|_{x>d} \right]$$

Détermination des paramètres initiaux T_0, M_0

$$T_0 = 3P$$

$$M_0 = 6Pa$$

Pour $x = 0$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Donc :

$$EI_z y(x) = - \left[\frac{-6Pax^2}{2} + \frac{3Px^3}{6} - \left| \frac{Pa(x-2a)^2}{2} \right|_{x \geq 2a} - \left| \frac{P(x-a)^3}{6} \right|_{x \geq a} \right]$$

$$EI_z y(x) = 3Pax^2 - \frac{Px^3}{2} + \left| \frac{Pa(x-2a)^2}{2} \right|_{x \geq 2a} + \left| \frac{P(x-a)^3}{6} \right|_{x \geq a}$$

$$EI_z \theta(x) = 6Pax - \frac{3Px^2}{2} + \left| Pa(x-2a) \right|_{x \geq 2a} + \left| \frac{P(x-a)^2}{2} \right|_{x \geq a}$$

4. Superposition des déformations

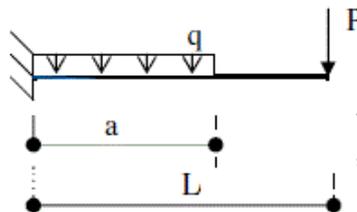
Les équations différentielles de la déformée, sont des équations linéaires : tous les termes de y' , y' et y'' sont du premier ordre. Les déformations dues à plusieurs charges, peuvent être **superposées** ou **cumulées**.

Cette **méthode** est surtout **utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charges élémentaires** ou **les déformations sont données** dans les aide-mémoire de la RDM.

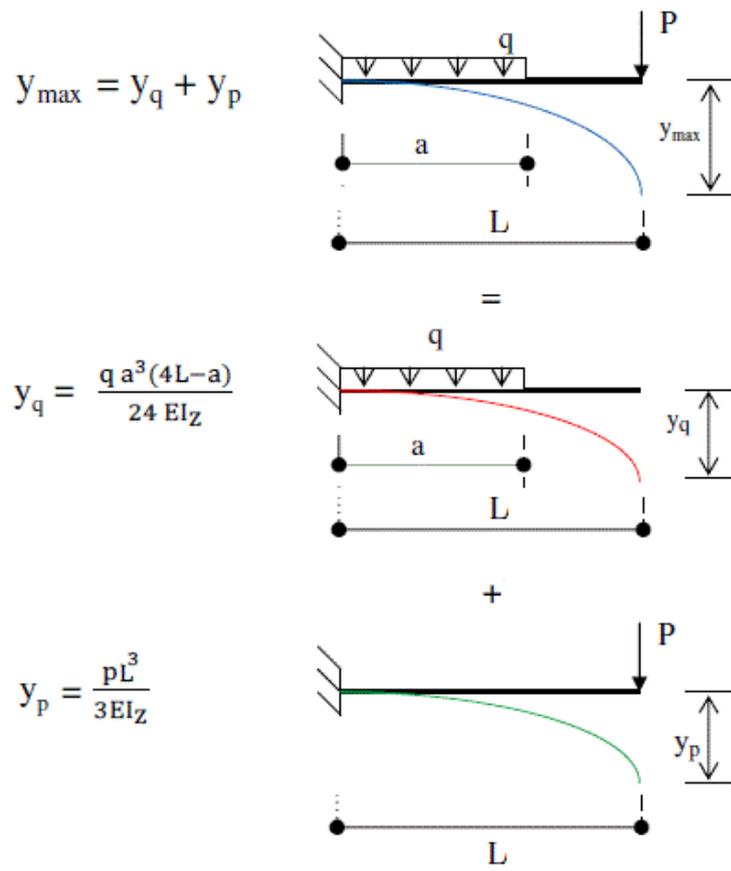
Exemple

Application numérique N°04

-Calculer la **flèche maximale** de la poutre ci-dessous.



Solution de l'exemple (Application numérique N°04) :



Glossaire

**(y, u)**

Composantes du **déplacement linéaire** du centre de gravité de la section considérée (K) qui prendra la position (K')

(θ)

C'est un angle mesuré à partir de l'intersection de l'axe (OX) et la tangente à la déformée (ou on veut calculer la déformation k et k' dans la figure).



Références



- 1 Mécanique des matériaux par Massonet et Cescotto sciences et lettres-LIEGE
- 2 Analyse des Structures-(Tome 1 et 2) Mohamed Osmane Zakaria -OPU-
- 3 Statique des Constructions (Tome 1-2-3)Dobrescu -OPU-
- 4 Polycopie_Hadjazi_Khamis



