3.1.3 Permutations :

Définition : *On appelle permutation une disposition ordonnée de* $\boldsymbol{n}$ *objets distincts ou non.*

1er cas – Permutations sans répétitions :

Proposition : *Le nombre permutations de* $\boldsymbol{n}$ *objets distincts (ou tout arrangement* $\boldsymbol{n}$ *à* $\boldsymbol{n}$ *de ces objets) est :* $\boldsymbol{P_n = n!}$

Remarque : *La permutation de* $\boldsymbol{n}$ *objets distincts constitue un cas particulier d'arrangement sans de répétition de* $\boldsymbol{p}$ *objets pris parmi* $\boldsymbol{n}$ *lorsque de* $\boldsymbol{n = p}$.

Ainsi le nombre de permutations de $\boldsymbol{n}$ *objets distincts est :*

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)\,!} = n!$$

Exemple *: Le nombre de manières de placer 8 personnes autour d'une table est :* $P_8 = 8! = 40320$

2ème cas – Permutations avec répétitions :

Proposition :

1- *Dans le cas où il existerait plusieurs répétitions* k *d'un même objet parmi les* n *objets, le nombre de permutations possibles des* n *objets est :* $P_n = \dfrac{n!}{k!}$

2- *En général s'il existerait* k_1 *répétition d'un 1er objet,* k_2 *répétition d'un 2ème objet,… ,*k_r *répétition d'un* r *ème objet parmi les* n *objets, le nombre de permutations possibles des* n *objets est :*

$$P_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

Exemple *: Considérons le mot « CELLULE ».*

Le nombre possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est : $P_7 = \dfrac{7!}{2!3!} = 420$ *mots possibles*

Car pour le mot « CELLULE » on a des lettres qui se répètent L(3 fois) et E(2 fois).

<u>3.1.4 Combinaisons</u> :

<u>Définition</u> : *Soit* X *un ensemble de* $\mathbf{n}$ *objet* (*ie* ***card*** $(X) = \mathbf{n}$).

On appelle combinaison de $\mathbf{p}$ *objets tout ensemble de* $\mathbf{p}$ *objet pris parmi les* $\mathbf{n}$ *objets.*

<u>Exemples</u> *:*

1- Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 (*main de poker*) *est une combinaison avec* $\mathbf{p} = 5$ *et* $\mathbf{n} = 32$.

2- La formation d'une ***délégation*** *de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec* $\mathbf{p} = 5$ *et* $\mathbf{n} = 50$.

3- Le tirage successif de 5 jetons avec remises (***sans tenir compte de l'ordre***) *parmi* ***8 jetons distincts*** *contenues dans une urne est une combinaison avec* $\mathbf{p} = 5$ *et* $\mathbf{n} = 8$.

Remarque :

1- ***L'arrangement*** *diffère de* ***la combinaison*** *par l'ordre, c'est-à-dire pour* ***l'arrangement l'ordre est essentiel*** *par contre pour la* ***combinaison il n'y a pas d'ordre****.*

2- *Dans les exemples précédents l'ordre n'est pas important.*

3- *Dans l'exemple 1 et 2, les objets tirés* ***sont clairement distincts****.*

4- *Par contre dans l'exemple 3, les objets* ***ne sont pas nécessairement distincts****, car le tirage est avec remise (Avec répétition).*

Conclusion : *Donc il faut distinguer* ***le nombre de combinaison avec répétition*** *et* ***le nombre de combinaison sans répétition*** (*combinaison au sens strict*).

1er cas – Combinaisons Sans remise (sans répétition) :

Notation *: Le Nombre de combinaisons sans remise de* $\boldsymbol{p}$ *objets pris parmi* $\boldsymbol{n}$ *objets est noté :* C_n^p.

Remarque :

1 - *On a nécessairement* $1 \leq p \leq n$ *et* $n, p \in \mathbb{N}^*$

2 - *Si* $n < p$*, alors* $C_n^p = 0$.

Proposition : *Le nombre de combinaisons de* $\boldsymbol{p}$ *objets pris parmi* $\boldsymbol{n}$ *et sans remise est :* $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)\,!}$ *avec* $1 \leq p \leq n$

Preuve : **-** *Pour le tirage de* $\boldsymbol{p}$ *objets pris parmi* $\boldsymbol{n}$ *il y'a* A_n^p *manières, en les ordonnant soit :* $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)\,!}$

- Une fois les $\boldsymbol{p}$ *objets tirés, il y'a* $p!$ *manières de les ordonner.*

Donc il y'a $A_n^p / p!$ *manières de tirer* $\boldsymbol{p}$ *objets pris parmi* $\boldsymbol{n}$ *sans les ordonner. Donc;* $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)\,!}$

<u>2</u>

2^{eme} cas – combinaisons avec remise (avec répétition) :

Proposition : *Le nombre de combinaisons de* $\boldsymbol{p}$ *objets pris parmi* $\boldsymbol{n}$ *avec remise est :*

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)\,!}{p!(n-1)\,!}$$

Preuve : *Admis.*

Exemples :

1- Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 (main de poker) est une combinaison avec $\boldsymbol{p}$ *= 5 et* $\boldsymbol{n}$ *= 32.*

Dans ce cas les objets tirés sont clairement distincts.

Donc le nombre total des cas possibles est :

$$C_{32}^{5} = \frac{32!}{5!(27)\,!} = \frac{28\times 29\times 30\times 31\times 32}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 20137$$

2- La formation d'une délégation de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec p *= 5 et* n *= 32.*

Dans ce cas les objets tirés sont clairement distincts.

Donc le nombre total des cas possibles est :

$$C_{50}^{5} = \frac{50!}{5!(45)\,!} = \frac{46 \times 47 \times 48 \times 49 \times 50}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 2118760$$

3- Le tirage successif de 5 jetons avec remises (sans tenir compte de l'ordre) parmi 8 jetons distincts contenues dans une urne est une combinaison avec p *= 5 et* n *= 8.*

Dans ce cas il y'a de la remise, donc le nombre total des cas possibles est :

$$C_{n+p-1}^{p} = C_{8+5-1}^{5} = C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 792$$

<u>Propriétés des Combinaisons</u> :

P.1) $C_n^0 = C_n^n = 1.$ *car :* $C_n^0 = C_n^n = \dfrac{n!}{n!} = 1.$

P.2) $C_n^p = C_n^{n-p}$ *avec* $1 \leq p \leq n$ *car :*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\left(n-p\right)!} \quad \text{et} \quad C_n^{n-p} = \frac{n!}{\left(n-p\right)!\left(n-\left(n-p\right)\right)!}$$

$$\Rightarrow C_n^p = C_n^{n-p};\ \forall p, n \in \mathbb{N}^*: \quad 1 \leq p \leq n$$

P.3) <u>Combinaisons composées ou formule de Pascal</u> :

$\forall p, n \in \mathbb{N}^*: 1 \leq p \leq n-1$ *alors :* $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

En effet :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{\left(n-1\right)!}{\left(p-1\right)!\left(\left(n-1\right)-\left(p-1\right)\right)!} + \frac{\left(n-1\right)!}{p!\left(\left(n-1\right)-p\right)!}$$

$$= \frac{\left(n-1\right)!}{\left(p-1\right)!\left(n-p\right)!} + \frac{\left(n-1\right)!}{p!\left(n-1-p\right)!}$$

$$= \frac{p\left(n-1\right)!}{p\left(p-1\right)!\left(n-p\right)!} + \frac{\left(n-p\right)\left(n-1\right)!}{\left(n-p\right)p!\left(n-1-p\right)!}$$

$$\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=\frac{p(n-1)\,!}{p(p-1)\,!(n-p)\,!}+\frac{(n-p)(n-1)\,!}{(n-p)p!(n-1-p)\,!}$$

$$\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=\frac{p((n-1)\,!)}{p!(n-p)\,!}+\frac{(n-p)((n-1)\,!)}{p!(n-p)\,!}$$

$$\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=\frac{(n-1)\,!(p+n-p)}{p!(n-p)\,!}$$

$$\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=\frac{(n-1)\,!n}{p!(n-p)\,!}\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=\frac{n!}{p!(n-p)\,!}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_{n}^{p}}$$

Remarque :

Cette formule permet de calculer facilement de proche en proche les nombres C_n^p. *On obtient le tableau suivant appelé* ***triangle de Pascal*** *:*

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

		$p-1$	P	
$n-1$		C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}	
n			C_{n}^{p}	

3.1.5 Formule du binôme de Newton :

Pour tout entier $n \geq 1$ *et pour tous réels* a *et* b, *on a formule, dite formule du binôme de Newton :*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + C_n^n b^n$$

C'est-à-dire : $$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Remarque : *En faisant* $a = b = 2$ *dans la formule précédente, on obtient :*

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p$$

<u>3.1.6 Permutation - Arrangement - Combinaison lequel choisir ?</u>

<u>Exemple</u> : *Une urne contient les 6 jetons suivants :*

$$\left\{ \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6} \right\}$$

1- On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs peut-on former ?

2- On tire successivement les 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés des 6 chiffres peut-on ainsi former ?

3- On tire successivement 4 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents peut-on former ?

4- On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on former ?

5- On tire successivement 4 jetons, on note le chiffre obtenu puis on le remet dans l'urne. Combien de nombres différents peut-on former ?

Solution :

1- On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs peut-on former ?

Dans ce cas un tirage donne un couple (x_1, x_2) *tel que :*

x_1 *est formé de 2 chiffres pris parmi 3 qui donne* C_3^2 *cas possibles.*

x_2 *est formé de 3 chiffres pris parmis 3 qui donne* C_3^3 *cas possibles.*

Donc le nombre total de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs est :

$$N = C_3^2 . C_3^3 = \frac{3!}{2!(3-2)\,!} \times \frac{3!}{3!(3-3)\,!}$$

$$\Rightarrow N = 3$$

2- On tire successivement les 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés des 6 chiffres peut-on ainsi former ?

Dans ce cas on tire successivement les 6 jetons et on les aligne, ce qui donne un tirage avec de l'ordre et sans remise.

Donc un tirage est une permutation de 6 jetons parmi 6 jetons.
Donc le nombre total de nombres différents formés des 6 chiffres qu'on peut former est : $P_6 = 6! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720$

3- On tire successivement 4 jetons et on les aligne.
Combien de nombres différents peut-on former ?

De l'alignement des jetons résulte des nombres différents, qui exige de l'ordre sans répétition (sans remise), donc chaque tirage est un arrangement sans remise.

Donc le nombre total des nombres qu'on peut former est :

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)\,!} = \frac{6!}{2!} = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}{2} \Rightarrow A_6^4 = 360$$

4- On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on former ?

Dans ce cas il n'y a pas d'ordre et il n'y a pas de remise, donc chaque tirage est une combinaison de 4 parmi 6 sans remise. Donc le nombre de tirage qu'on peut former est :

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)\,!} = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}{(1\times 2\times 3\times 4)\times 1\times 2} \Rightarrow C_6^4 = 15$$

5- On tire successivement 4 jetons, on note le chiffre obtenu puis on le remet dans l'urne. Combien de nombres différents peut-on former ?

Dans ce cas on tire successivement les 4 jetons en remettant chaque fois le jeton dans l'urne, se qui donne un tirage avec de l'ordre et avec remise.

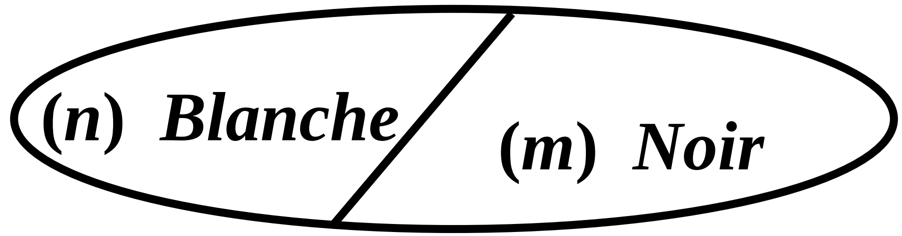
Donc chaque tirage est un arrangement de 4 parmi 6 avec remise. Le nombre des nombres différents qu'on peut former est :

$$A_6^4 = 6^4 = 1296$$

Coefficient d’ordre

*On **utilise le coefficient d’ordre** lorsque le tirage est avec **Ordre,** c’est-à-dire **le tirage successif avec remise** (arrangement avec répétition) ou **le tirage successif sans remise** (arrangement sans répétition).*

Exemple 1 *: Un sac contient **n** boules blanches et **m** boules noir.*



*Donc le sac contient **n** + **m** boules, tel que l’expérience est telle que le tirage est **successif et sans remise** de 3 boules du sac.*

(?) *Dénombrer l’ensemble*

E *: « tirer 2 boules blanches et 1 boule noir »*

Réponse :

*On ajoute **le coefficient d’ordre** qui est l’ordre inter-couleur*

$$card(E) = A_n^2 \times A_m^1 \times \boxed{C_3^2} \text{ ou } (\times \boxed{C_3^1}), \text{ ou } = \frac{(2+1)!}{2!1!}$$

C’est le coefficient d’ordre

Exemple 2 : Un sac contient **n** boules blanches, **m** boules noir, et **j** boules jaunes.

.

(n) Blanche / (m) Noir / (j) Jaunes

Donc le sac contient **n** + **m** + **j** boules, tel que l'expérience est le tirage **successif et sans remise** de 6 boules du sac.

Dénombrer l'ensemble

D : « tirer 3 boules blanches et 2 boules noir et 1 boule jaune »

Réponse :

On ajoute **le coefficient d'ordre** qui est l'ordre inter-couleur

$$card(D) = A_n^3 \times A_m^2 \times A_j^1 \times \boxed{C_6^3 \times C_3^2} \text{ ou } (\times \boxed{C_6^2 \times C_4^1}) \text{ avec } A_k^p = \frac{k!}{(k-p)!}$$

C'est le coefficient d'ordre

$$\text{ou } = \frac{(3+2+1)!}{3!2!1!}$$

Remarque : Si le tirage est avec remise dans l'exemple 2

$$card(D) = A_n^3 \times A_m^2 \times A_j^1 \times C_6^3 \times C_3^2 = n^3 \times m^2 \times j^1 \times C_6^3 \times C_3^2$$