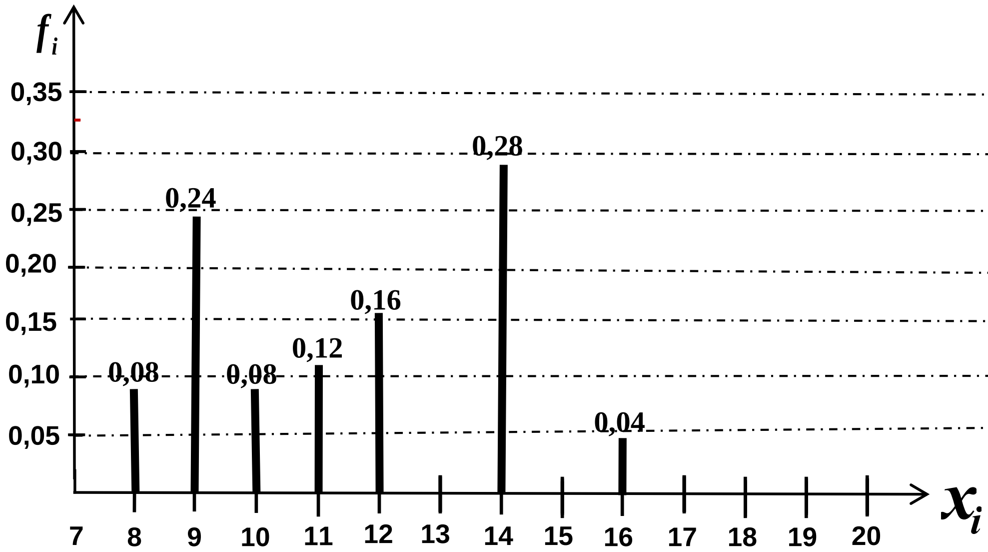
Fiche de TD n°2 probabilité-statistique (1er Semestre)

Exercice n°1 : Le diagramme en bâtons des fréquences ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par les élèves d'une classe de terminale.



1- A partir du diagramme en bâtons donnez la valeur du mode de cette série statistique. Expliquez ?
2- Construisez le tableau statistique des fréquences associé à cette série statistique.
3- Donnez la proportion en pourcentage (%) des élèves qui ont une note superieure à **11** ($X > 11$) .
4- Calculez la moyenne de cette série statstique.
5- Sachant que $\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 570$ calculez l'effectif total ainsi que l'effectif de chaque modalité.

Exercice n°2 : Le tableau ci-dessous donne la répartition des boulangeries d'une ville selon le prix auquel elles vendent la baguette :

Prix (Euro)	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**
Effectif	**4**	**14**	**26**	**11**	**7**	**12**	**7**	**5**

1- Calculez le prix moyen d'une baguette.
2- Déterminez le prix médian d'une baguette.
3- Déterminez les premier et troisième quartiles.
4- Calculez l'étendue de la série.
5- Déterminez le prix médian d'une baguette, les premier et troisième quartiles si on remplace le 1er tableau par le tableau suivant :

Prix (Euro)	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**	**0,75**	**0,80**	**0,85**	**0,90**
Effectif	**4**	**14**	**4**	**11**	**7**	**8**	**11**	**5**

Exercice n°3 :

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires mensuels, en euro des employés d'une entreprise :

Salaire	$[800\,;900[$	$[900\,;1000[$	$[1000\,;1050[$	$[1050\,;1150[$	$[1150\,;1300[$
Effectif	**42**	**49**	**74**	**19**	**16**

1- Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.
2- En dressant le polygone des effectifs cumulés croissants, donner une valeur approchée de la mediane et des quartiles Q_1 et Q_3 .
Qu'elle est la valeur approchée de la variable (notée ***D***) tel que dans un ordre croissant elle partage la population en deux (02) parties d'effectifs de **10%** avant et **90%** après.
3- Calculer de manière precise (interpolation lineaire) la mediane et les quartiles Q_1 , Q_3 et ***D.***

Exercice n°4 : On a effectué avec les mêmes athlètes un sondage sur le temps d'entrainement par semaine, exprimé en heures, Les résultats sont donnés ci-dessous :

Temps d'entrainement	F_i
[0 ,10[	0,04
[10 , 15[	0,20
[15 , *20* [	F_3
[*20* , 25[	0,82
[25 , 30[	1,00

1- Déterminer la classe du premier quartile Q_1 sachant que $0{,}30 \leq F_3$.
2- Calculer F_3 sachant que le premier quartile $Q_1 = 16$ heures.
   Dans toute la suite on prend $F3 = 0{,}45$.
3- Calculer les fréquences de cette série statistique.
4- Déduire la moyenne arithmétique.
5- Calculer l'écart type $\sigma(x)$ de cette série.
6- Sachant que $\sum_{i=1}^{5} n_i c_i^2 = 42600$ calculer l'effectif total ainsi que l'effectif de chaque classe.

Remarque2 : Pour l'exercice 4 les calculs se feront 4 chiffres après la virgule.

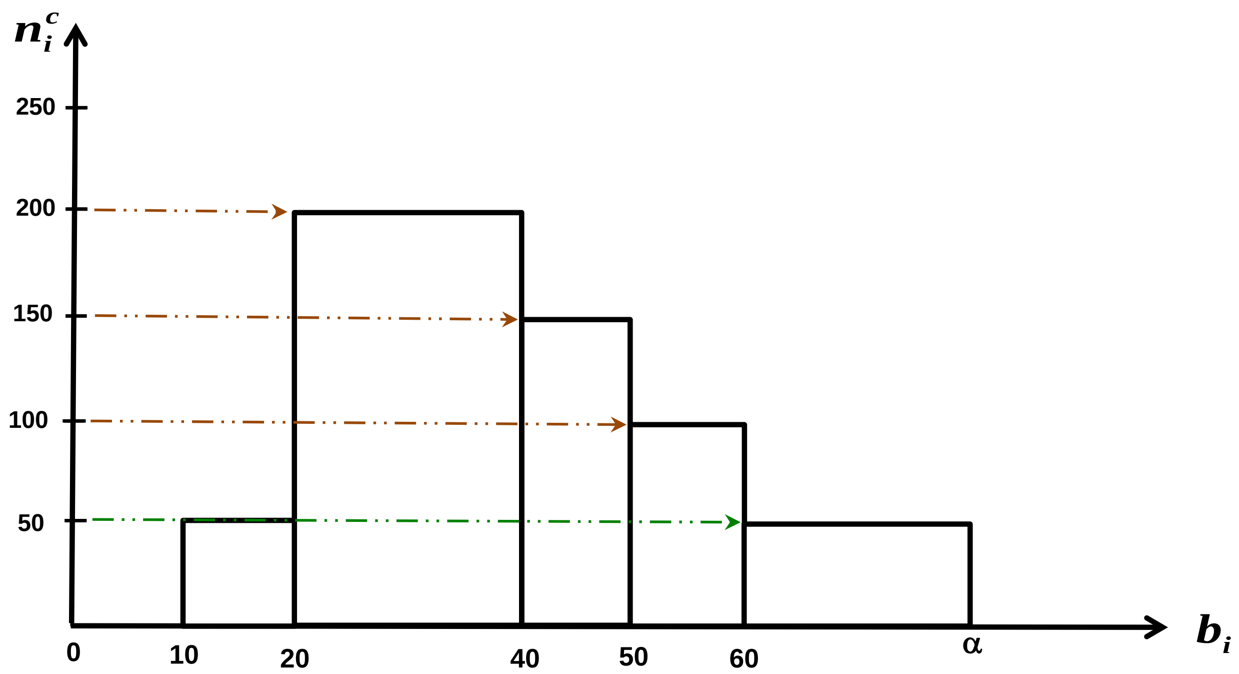
Exercice n°5 : Une enquete statistique chez ***1000*** commercants porte sur le nombre d'heures d'ouvertures hebdomadaire. On a obtenu les resultats suivants :

Nombre d'heures	Nombre de commerçants
[30-35 [	50
[35-37 [	100
[37-39 [	200
[39-40 [	150
[40-41 [	120
[41-43 [	n_6
[43-45 [	130
[45-50 [	n_8

En prenant le nombre moyen d'heures d'ouverture hebdomadaires 40,38.

1- Determiner les effectifs n_6 et n_8 .
2- Calaculer mode et la mediane de cette distribution
   (on prend $a^*=1$) ?
3- Calculer la variance puis l'ecart-type de cette distribution.
4- Calculer les premier et troisième quartiles.

Exercice 6 : Dans une gare routière, on évalue le temps d'attente de 80 voyageurs en minutes. Voici l'histogramme des effectifs de cette variable.



1- Représenter graphiquement le mode M_0 de cette série statistique.
2- Construisez le tableau statistique des effectifs associé à cette série (en fonction de α)
   Avec $a^*=100$.
3- Calculer α.
4- Déterminez le mode M_0 de cette série.

Solution de l'exercice n°1 :

1- La valeur du mode de cette série statistique est $Mo = 14$.

2- Le tableau statistique des fréquences associé à cette série statistique.

x_i	f_i	$f_i\, x_i$	$f_i\, x_i^2$
8	0,08	0,64	5,12
9	0,24	2,16	19,44
10	0,08	0,80	8,00
11	0,12	1,32	14,52
12	0,16	1,92	23,04
14	0,28	3,92	54,88
16	0,04	0,64	10,24
Total	1,00	11,4	135,24

3- La proportion en pourcentage (%) des élèves qui ont une note superieure à 11 ($X > 11$) corréspond à : La fréquence cumulées décroissante d'ordre 5 ($x_5 = 12$), c'est-à-dire :

$$F'_5 = f_{5d} = 1 - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = f_5 + f_6 + f_7 = 0,16 + 0,28 + 0,04 = 0,48 \text{ donc } 48\%.$$

4- Calculer la moyenne de cette série statstique. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{i=r} f_i x_i = 11,4$

5- Sachant que $\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 570$ calculez l'effectif total ainsi que l'effectif de chaque modalité.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{i=r} f_i x_i = 11,4 \Rightarrow N = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i}{\bar{x}} = \frac{570}{11,4} = 50$$

$$\Rightarrow n_i = N \times f_i \Rightarrow n_i = N \times f_i$$

$$\Rightarrow n_1 = N \times f_1 = 50 \times 0,08 = 4; \quad n_2 = N \times f_2 = 50 \times 0,24 = 12; \quad n_3 = N \times f_3 = 50 \times 0,08 = 4$$

$$n_4 = N \times f_4 = 50 \times 0,12 = 6; \quad n_5 = N \times f_5 = 50 \times 0,16 = 8;$$

$$n_6 = N \times f_6 = 50 \times 0,28 = 14; \quad n_7 = N \times f_7 = 50 \times 0,04 = 2$$

Solution de l'exercice 2 :

x_i	n_i	N_i	$n_i\,.x_i$
0,55	4	4	2,2
0,60	14	18	8,4
0,65	26	44	16,9
0,7	11	55	7,7
0,75	7	62	5,25
0,8	12	74	9,6
0,85	7	81	5,95
0,9	5	86	4,5
Total	86		60,5

1- Calculez le prix moyen d'une baguette.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{8} n_i x_i = \frac{60,5}{86} = 0,70$$

2- Calcul du prix médian d'une baguette :

Dans ce cas l'effectif total est $N = 86$ qui est un nombre pair avec $\frac{N}{2} = 43$,

$N_2 = 18$ et $N_3 = 44$; donc : $Me = \frac{v_{43} + v_{44}}{2} = \frac{0,65 + 0,65}{2} = 0,65$

3- Pour Q_1 $N \times p = 86 \times \frac{1}{4} = 21,5$ qui n'est pas un nombre entier, donc $Q_1 = v_{\lceil 21,5 \rceil} = v_{22} = 0,65$

Pour Q_3 $N \times p = 86 \times \frac{3}{4} = 64,5$ qui n'est un nombre entier, donc $Q_3 = v_{\lceil 64,5 \rceil} = v_{65} = 0,80$

4- l'étendue de la série est : $E = x_{\max} - x_{\min} = 0,9 - 0,55 = 0,35.$

5-

x_i	n_i	N_i
0,55	4	4
0,60	14	18
0,65	4	22
0,7	11	33
0,75	7	40
0,8	8	48
0,85	11	59
0,9	5	64
Total	64	

1- Dans ce cas l'effectif total est $\boldsymbol{N = 64}$ qui est un nombre pair, donc $\boldsymbol{Me = \frac{v_{32}+v_{33}}{2} = \frac{0,70+0,70}{2} = 0,70}$

2- Pour $\boldsymbol{Q_1}$ $\boldsymbol{N \times p = 64 \times \frac{1}{4} = 16}$ qui est un nombre entier, donc $\boldsymbol{Q_1 = \frac{v_{16}+v_{17}}{2} = \frac{0,60+0,60}{2} = 0,60}$

3- Pour $\boldsymbol{Q_3}$ $\boldsymbol{N \times p = 64 \times \frac{3}{4} = 48}$ qui est un nombre entier, donc $\boldsymbol{Q_3 = \frac{v_{48}+v_{49}}{2} = \frac{0,80+0,85}{2} = 0,825}$

Solution exercice n°3 **:**

1) Pour calculer le salaire moyen de l'entreprise, il faut considérer le milieu de chaque classe :

Salaire	850	950	1025	1100	1225
Effectif	42	49	74	19	16

Le calcul de la moyenne est donc :

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{5} n_i \times x_i}^{\text{somme des produits entre les valeurs et leurs effectifs}}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{5} n_i}_{\text{somme des effectifs}}} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + ...n_5 \times x_5}{\underbrace{n_1 + n_2 + ...n_5}_{\text{effectif total}}} = \frac{42 \times 850 + 49 \times 950 + ...16 \times 1225}{\underbrace{42 + 49 + ...16}_{\text{effectif total}}} = \frac{198600}{200} = 993$$

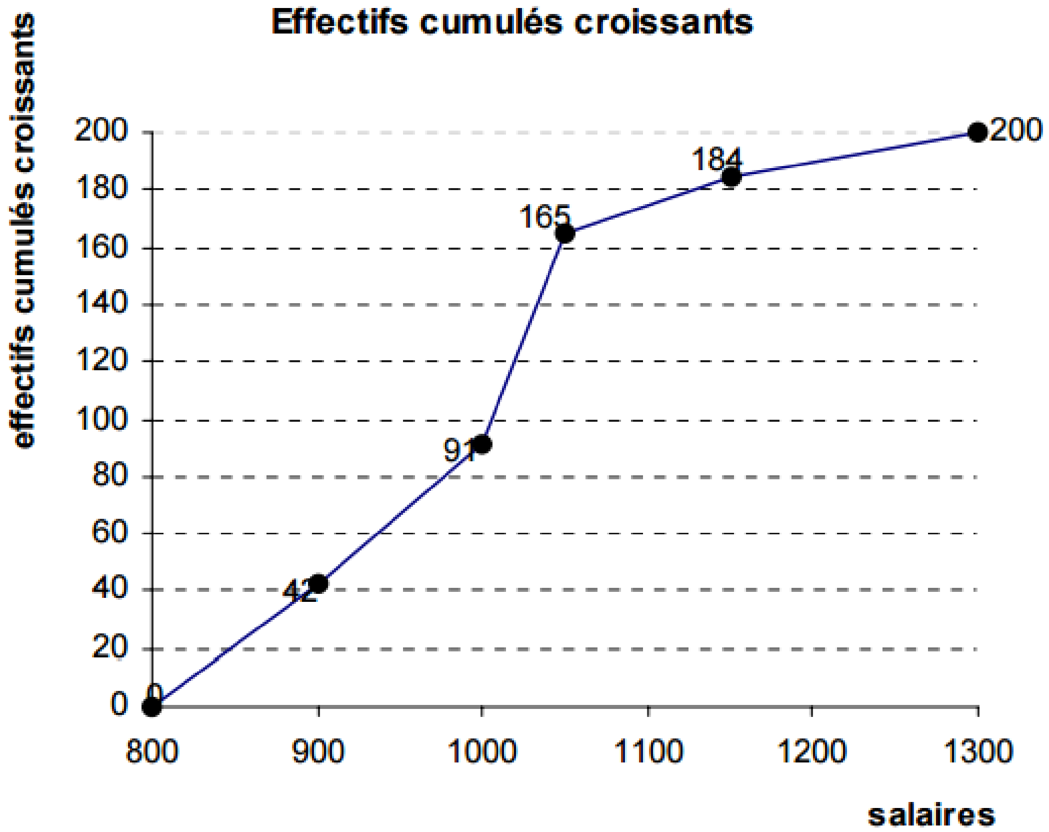
Le salaire moyen dans cette entreprise est donc de 993 €.

2) Pour répondre à cette question, il faut dresser le tableau des effectifs cumulés croissants :

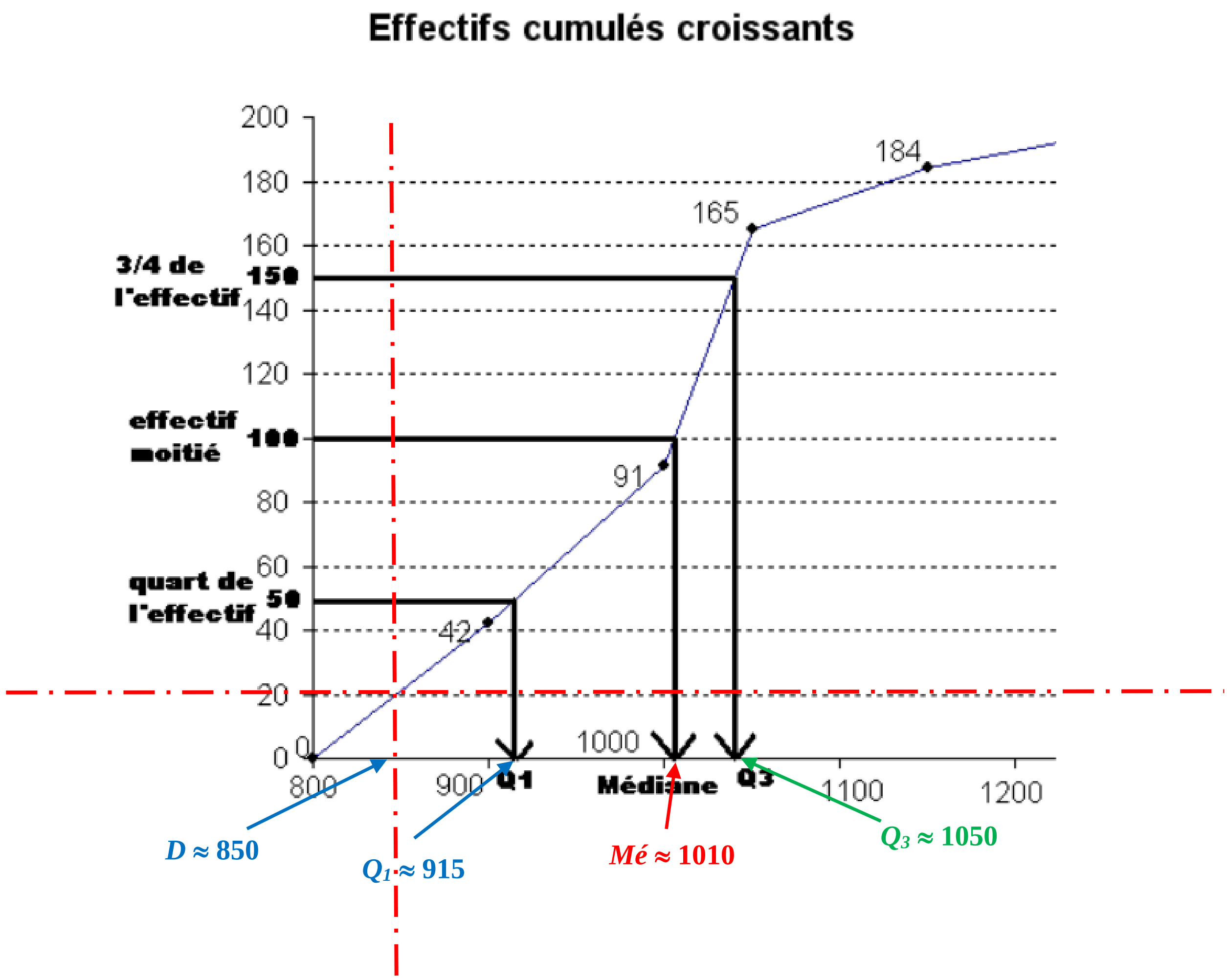
Salaire	[800 ;900[	[900 ;1000[	[1000 ;1050[	[1050 ;1150[	[1150 ;1300[
Effectifs cumulés croissants	42	42+49 =91	91+74 =165	165+19 =184	184+16 =200

Ainsi, 165 employés gagnent au plus 1050 euros, au sein de cette entreprise

A partir de ce tableau, on dresse le polygone des effectifs cumulés croissants



A partir de ce polygone, on cherche le salaire médian, c'est-à-dire celui qui va partager la série statistique en deux parties d'égale amplitude. Il s'agit donc du salaire correspondant à un effectif cumulé de 100 salariés (moitié de l'effectif). On se place ainsi que l'axe des ordonnées à l'effectif cumulé 100, et on lit l'antécédent de 100. Ce sera la médiane. On procède de même avec les quartiles Q_1 et Q_3, qui correspondent respectivement à un effectif cumulé de $\frac{1}{4}\times 200 = 50$ et de $\frac{3}{4}\times 200 = 150$ $\boxed{\text{On lit graphiquement que Médiane} \approx 1010\text{ , } Q_1 \approx 915 \text{ et } Q_3 \approx 1050}$



Méthode pour calculer la mediane et les quartiles Q_1 et Q_3 (calcul direct)

On a $N = 200 = 2\times100$, $N_2 = 91$ et $N_3 = 165$ donc la classe médiane est **[1000 ; 1050** [et on a :

$$Mé = b_{i-1} + a_i\left(\frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right) = 1000 + 50\times\left(\frac{100-91}{165-91}\right) \approx 1006$$

- Calcul Q_1 :

L'ordre de Q_1 est $p = 0{,}25$, $\lceil N\times p\rceil = 50$, $N_1 = 42$ et $N_2 = 91$ donc la classe du premier quartile Q_1 est **[900,1000[** et on a :

$$Q_1 = b_{i-1} + a_i\left(\frac{N/4 - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right) = 900 + 100\left(\frac{50-42}{91-42}\right) \approx 916.$$

- Calcul Q_3 :

L'ordre de Q_3 est $p = 0{,}75$, $\lceil N\times p\rceil = 150$, $N_2 = 91$ et $N_3 = 165$ donc la classe du 3eme quartile Q_3 est **[1000 , 1050[** et on a :

$$Q_3 = b_{i-1} + a_i\left(\frac{N(3/4) - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right) = 1000 + 50\left(\frac{150-91}{165-91}\right) \approx 1040$$

Calcul de la valeur de D :

On a $N\times0{,}1 = 200\times0{,}1 = 20$, $N_0 = 0$ et $N_1 = 42$ donc la classe de cette valeur est **[800 ; 900** [et on a :

$$D = b_{i-1} + a_i\left(\frac{N\times0{,}1 - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right) = 800 + 100\times\left(\frac{20-0}{42-0}\right) = 847{,}62$$

Solution exercice n°4 :

Temps de trajet	*Nombre d'élèves n_i*	f_i	F_i	F_i	c_i	$f_i c_i$	$f_i c_i^2$	a_i
[0 ,10[	4	0,04	0,04	0,04	5	0,20	1,00	10
[10 , 15[	16	0,16	0,20	0,20	12,5	2,00	25,00	5
[15 , 20 [	25	0,25	0,45	F_3	17,5	4,375	76,5625	5
[20 , 25[	37	0,37	0,82	0,82	22,5	8,325	187,3125	5
[25 , 30[	18	0,18	1,00	1,00	27,5	4,950	136,125	5
						19,85	426	

1) la classe du premier quartile Q_1 est [15 , 20[car **$0{,}25 < 0{,}30 \leq F_3$, l'ordre de Q_1 $p = 0{,}25$ et $F_2 = 0{,}20$.**

2) Calculer F_3 sachant que le premier quartile $Q_1 = 16$. On a :

$$Q_1 = b_{i-1} + a_i\left(\frac{0{,}25 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}\right) = 15 + 5\left(\frac{0{,}25-0{,}20}{F_3 - 0{,}20}\right) \Rightarrow 16 = 15 + 5\frac{0{,}05}{F_3 - 0{,}20}$$

$$\Rightarrow F_3 = 0{,}20 + 0{,}25 \Rightarrow F_3 = 0{,}45$$

3) Pour le calcul des fréquences si $F_3 = 0{,}45$ voir le tableau.

4) Déduire la moyenne arithmétique.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} f_i c_i = 19{,}85$$

5) Calcul de l'écart – type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{5} f_i c_i^2\right) - (\bar{x})^2}$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{426 - (19{,}85)^2} \Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{426 - 394{,}0225} = \sqrt{31{,}9775} \Rightarrow \sigma(x) = 5{,}6549$$

6) Le calcul de l'effectif total ainsi que l'effectif de chaque classe si $\sum_{i=1}^{5} n_i c_i^2 = 42600$.

$$\left(\sum_{i=1}^{5} f_i c_i^2\right) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{5} n_i c_i^2\right) \Rightarrow N = \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} n_i c_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{5} f_i c_i^2\right)} = \frac{42600}{426} = 100 \Rightarrow N = 100$$

$$\Rightarrow n_i = N \times f_i$$

$$\Rightarrow n_1 = N \times f_1 = 100 \times 0{,}04 = 4,\ n_2 = N \times f_2 = 100 \times 0{,}16 = 16,\ n_3 = N \times f_3 = 100 \times 0{,}25 = 25,$$

$$n_4 = N \times f_4 = 100 \times 0{,}37 = 37,\ \text{et } n_5 = N \times f_5 = 100 \times 0{,}18 = 18,$$

Solution exercice n°5 :

1) L'enquête porte sur 1000 commerçants : $N = 1000$

Le nombre moyen d'heures d'ouverture hebdomadaires est égal à 40,38h : $\bar{x} = 40{,}38$

$$\begin{cases} N = 1000 \\ \bar{x} = \frac{\sum c_i n_i}{N} = 40{,}38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_6 + n_8 = 250 \\ 42 n_6 + 47{,}5 n_8 = 11050 \end{cases} \Rightarrow n_6 = 150 \quad n_8 = 100$$

Nombre d'heures	n_i	a_i	$n_i^c = d_i$	c_i	$n_i . c_i$	f_i	$(c_i)^2$	$f_i(c_i)^2$	N_i
[30 , 35[	50	5	10	32,5	1625	0,05	1056,25	52,8125	50
[35 , 37[	100	2	50	36	3600	0,10	1296,00	129,6000	150
[37, 39[	200	2	100	38	7600	0,20	1444,00	288,8000	350
[39, 40[	150	1	150	39,5	5925	0,15	1560,25	234,0375	500
[40 , 41[	120	1	120	40,5	4860	0,12	1640,25	196,8300	620
[41 , 43[	n_6 = 150	2	75	42	n_6 x 42	0,15	1764,00	264,6000	770
[43, 45[	130	2	65	44	5720	0,13	1936,00	251,6800	900
[45, 50[	n_8 = 100	5	20	47,5	n_8 x 47,5	0,10	2256,25	225,6250	1000
Total	100				29330 + $n_6 \times 42$ + $n_8 \times 47{,}5$	1,00		1643,9850	

2) L'amplitude de référence est : $a^* = 1$

a) Calcul du mode :
Comme $n_4^c = 150$ est l'effectif corrigé le plus élevé, alors la calsse modale est **[39 ; 40** [et on a :

$$M_o = b_{i-1} + a_i \frac{m_1}{m_1 + m_2},\ m_1 = n_i^c - n_{i-1}^c \text{ et } m_2 = n_i^c - n_{i+1}^c \Rightarrow$$

$$M_0 = 39 + \left(\frac{50}{50 + 30}\right) = 39{,}625\text{h.}$$

b) Calcul de la médiane :
On a N =1000 =2×500, N_3 =*350* et N_4 = *500* donc la classe médiane est **[39 ; 40** [et on a :

$$Mé = b_{i-1} + a_i \left(\frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right) = 39 + 1 \times \left(\frac{500 - 350}{500 - 350}\right) = 40$$

3)- En prenant $\bar{x} = 40{,}38\,h$, on aura :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{8} f_i (c_i)^2 - \bar{x}^2 = 13{,}4406 \Rightarrow \sigma(X) = 3{,}6661$$

4) - Calcul Q_1 :

L'ordre de Q_1 est $p = 0{,}25$, $\lceil N \times p \rceil = 250$, N_2 =*150* et N_3 = *350* donc la classe du premier quartile Q_1 est **[37, 39[** et on a :

$$Q_1 = b_{i-1} + a_i\left(\frac{N/4 - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right) = 37 + 2\left(\frac{250-150}{350-150}\right) = 38\ h.$$

- Calcul Q_3 :

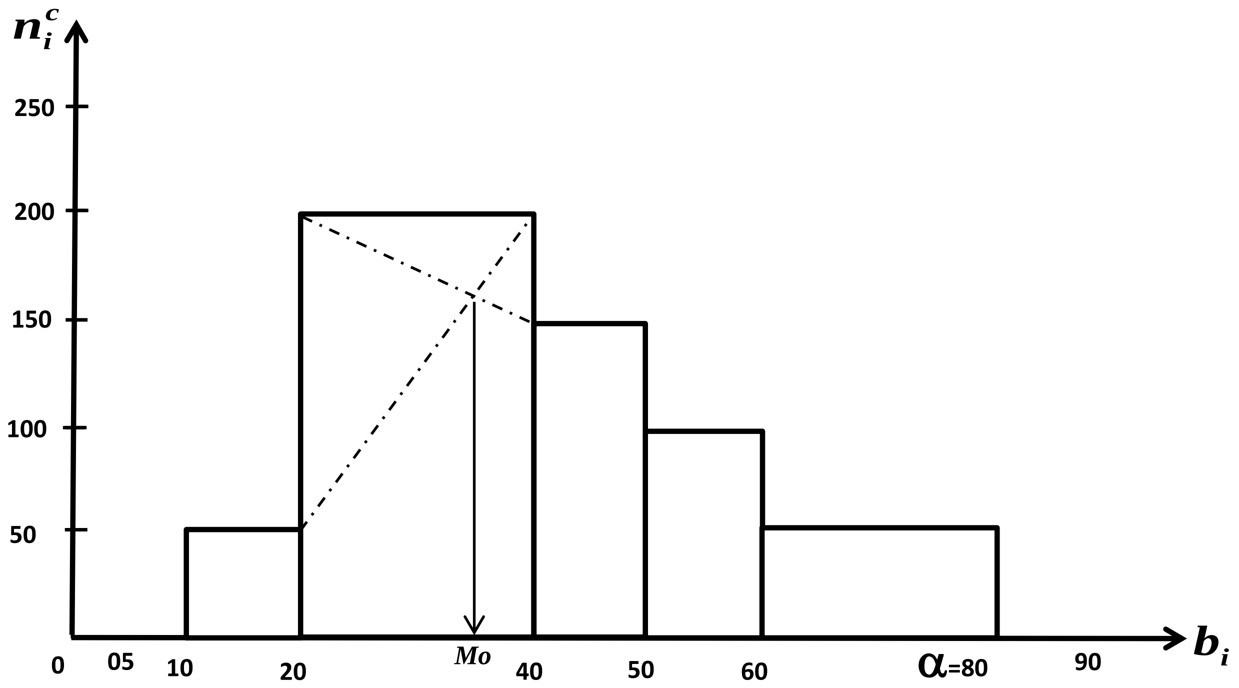
L'ordre de Q_3 est $p = 0{,}75$, $\lceil N\times p \rceil = 750$, $N_5 = 620$ et $N_6 = 770$ donc la classe du 3eme quartile Q_3 est **[41 , 43[** et on a :

$$Q_3 = b_{i-1} + a_i\left(\frac{N(3/4) - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right) = 41 + 2\left(\frac{750-620}{770-620}\right) = 42{,}75\ h$$

<u>Solution exercice n°5 (TD2)</u> :

1- Représentation graphique du mode M_0 de cette série statistique.

D'après l'histogramme $n_2^c = 200$ est l'effectif corrigé le plus grand alors la calsse modale est [20 – 40[$\Rightarrow$



2- Le tableau statistique des effectifs associé à cette série (en fonction de α) avec a^*=100 est :

Classes	$n_i^c = a^*(n_i/a_i)$	a_i	n_i
[10 , 20[	50	10	5
[20 , 40[	200	20	40
[40 , 50[	150	10	15
[50 , 60[	100	10	10
[60 ,α[	50	α−60=20	0,5(α−60)=10
Total			80

3- Calcule de α **:** On a

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 5 + 40 + 15 + 10 + 0{,}5(\alpha - 60) = 80$$

$$0{,}5(\alpha - 60) = 80 - 70 \Rightarrow (\alpha - 60) = \frac{80-70}{0{,}5} \Rightarrow \alpha = 20 + 60 = 80$$

4- Calcul mode M_0 de cette série : Comme $n_2^c = 200$ est le plus effectif corrigé alors la calsse modale est [20 – 40 [et on a :

$$M_o = b_{i-1} + a_i\frac{m_1}{m_1 + m_2},\ m_1 = n_i^c - n_{i-1}^c \text{ et } m_2 = n_i^c - n_{i+1}^c$$

$$\Rightarrow M_o = 20 + 20\frac{200-50}{200-50+200-150} = 20 + 20\frac{150}{200} \Rightarrow M_O = 35$$