Chapitre 3 : *Introduction au calcul de probabilités.*

3.1- Rappels sur l'analyse combinatoire :

L'analyse combinatoire est l'étude des techniques de dénombrement.

Le but de l'analyse combinatoire est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini de grand cardinal.

Notation *: Le cardinal d'un ensemble X, notée* **card(X)***, est le nombre d'éléments contenus dans l'ensemble X.*

Exemple1 *:*

1- Si $X = \{1,2,3\}$ alors card(X) = 3.

2- Si $X = \{a_1, a_2, \cdots, a_{20}\}$ alors card(X) = 20.

3.1.1 Principe de multiplication:

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous- expériences.

<u>3.1.1 Principe de multiplication</u>:

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous- expériences.

<u>Principe</u> *: On suppose qu'une expérience est la succession de* m *sous- expériences, telle que :*

- La 1ère expérience a n_1 *résultats possibles dans un ensemble* X_1 *de* n_1 *éléments (ie* $\mathbf{card}(X_1) = n_1$*).*

- La 2ème expérience a n_2 *résultats possibles dans un ensemble* X_2 *de* n_2 *éléments (ie* $\mathbf{card}(X_2) = n_2$*).*

- Et en général la $i^{ème}$ *expérience a* n_i *résultats possibles pour* $i = 1, \ldots, m$ *dans un ensemble* X_i *de* n_i *éléments (ie* $\mathbf{card}(X_i) = n_i$*).*

Donc un élément de l'expérience est ***un m-uplet*** $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *tel que :* $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$

Alors le nombre total N *de résultats possibles de l'expérience globale est :*

$$N = card(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m) = \prod_{i=1}^{m} n_i = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$$

Exemple 2: *Vous achetez une valise à code de 4 touches (4 caractères). Le code est composé de 2 lettres pour les 2 premières touches et 2 chiffres pour les 2 dernières touches.*

1ère touche	**2ème touche**	**3ème touche**	**4ème touche**

Combien de possibilités avez-vous pour choisir un code ?

Réponse : *Un code est un 4 – uplet* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ *tel que :*

- x_1 *est choisi dans l'ensemble* X_1 *des 26 lettres* (**card** (X_1)=26).

- x_2 *est choisi dans l'ensemble* X_2 *des 26 lettres* (**card** (X_2)=26).

- x_3 *est choisi dans l'ensemble* X_3 *des 10 chiffres* (**card** (X_3)=10).

- x_4 *est choisi dans l'ensemble* X_4 *des 10 chiffres* (**card** (X_4)=10).

Donc le nombre de possibilités pour choisir un code est :

$$N = card(X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4) = card(X_1).card(X_2).card(X_3).card(X_4)$$

$$\Rightarrow N = 26 \times 26 \times 10 \times 10 \quad \Rightarrow N = 67600$$

Exemple 3:

Une fille a quatre (04) jupes et six (06) chemisiers.

Combien d'ensembles différents «jupe et chemisier» peut-elle porter ?

Réponse :

Un ensemble «jupe et chemisier» est un couple $(x_1 , x_2) \in X_1 \times X_2$ *tel que :*

- x_1 *est choisi dans l'ensemble* X_1 *de 4 jupes* (**card** (X_1)= 4).

- x_2 *est choisi dans l'ensemble* X_2 *de 6 chemisiers* (**card** (X_2)= 6).

Donc le nombre total d'ensembles «jupe et chemisier» possibilités est :

$$N = card(X_1 \times X_2) = card(X_1).card(X_2)$$

$$\Rightarrow N = 4 \times 6 \quad \Rightarrow N = 24$$

3.1.2 Arrangements :

Définition : *Soit X un ensemble de n objet (ie **card** $(X) = n$).*

*On appelle **arrangement** de p objets parmi n toute **suite ordonnée** de p objets pris parmi les n objets.*

Notation *: Le Nombre d'arrangements de p objets pris parmi n objets est noté : A_n^p .*

Remarque :

- *On a nécessairement* $1 \leq p \leq n$ *et* $n, p \in \mathbb{N}^*$

- *Si $n < p$, alors* $A_n^p = 0.$

Exemples 4 :

1- Le nombre de mots de 5 lettres (avec ou sans signification) formés avec les 26 lettres de l'alphabet correspond au nombre d'arrangements possibles avec $p = 5$ et $n = 26$.

2- Le tiercé dans l'ordre lors d'une course de 20 chevaux constitue un des arrangements possibles avec $p = 3$ et $n = 20$.

Remarque :

*1- Dans les exemples précédents l'ordre des éléments dans la suite est essentiel. Ainsi dans l'exemple 1, le mot **NICHE** est différent du mot **CHIEN.***

*2- Mais dans l'exemple1, une lettre de l'alphabet peut se retrouver plusieurs fois. Par exemple, les mots **AINSI**, **TARTE**.*

3- Par contre dans l'exemple2, les trois chevaux sont forcément différents.

Conclusion : *Donc il faut distinguer **le nombre d'arrangements avec répétition** et **le nombre d'arrangements sans répétition.***

1er cas – Arrangements avec répétitions :

Proposition : *Si un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre total **d'arrangements avec répétition** de* $\boldsymbol{p}$ *objets pris parmi les* $\boldsymbol{n}$**,** *est alors :* $\boldsymbol{A_n^p = n^p}$ *avec* $\boldsymbol{1 \leq p \leq n}$

***Preuve* : 1-** *Pour le premier objet tiré, il existe* n *manières de ranger l'objet parmi* n.

2- *Pour le deuxième objet tiré, il existe* n *manières de ranger l'objet parmi* n *car le premier objet fait de nouveau parti des* n *objets.* ***On parle de tirage avec remise.***

Ainsi pour les p *objets tirés, il y'aura* $n \times n \times \ldots \times n$ *(*p *fois) arrangements possibles, soit :* $A_n^p = n \times n \times \cdots \times n = n^p$

Exemple *: On considère les nombres* ***2, 5, 6, 7, et 9.***
Combien peut-on former de nombres de deux chiffres?

Réponse : *Un nombre de deux chiffres peut être formé d'un chiffre répété 2 fois. Donc on parle de tirage avec remise. Alors le nombre total de deux chiffres qu'on peut former est :* $A_5^2 = 5^2 = 25$

Remarque : *Pour le cas des arrangements avec répétition, on peut appliquer le principe de multiplication avec* $X_1 = X_2 = \ldots = X_p = X$, *donc le nombre total des cas possibles est :*

$$\Rightarrow N = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p = n \times n \times \cdots \times n = n^p = A_n^p$$

2ème cas – Arrangements sans répétitions :

Rappel : *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, *on appelle factorielle* n, *noté* $n!$, *le produit des* n *premiers entiers :*

$$n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times p\times(p+1)\times\cdots\times(n-1)\times n$$

et par convention on pose $0! = 1$.

Remarque : *Dés que* n *dépasse la dizaine (10),* $n!$ *se compte en millions.*

Donc il est très utile de connaître la formule d'approximation suivante (« ***formule de Stirling*** *») :*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Proposition : *Si un objet ne peut être observé qu'une seul fois dans un arrangement, le nombre total d'arrangements sans répétition de* p *objets pris parmi les* n*, est alors :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)\,!} \quad \text{avec} \quad 1 \le p \le n$$

Preuve :

1- *Pour le premier objet tiré, il existe* $\boldsymbol{n}$ *manières de ranger l'objet parmi* $\boldsymbol{n}$*.*

2- *Pour le deuxième objet tiré, il existe (*$\boldsymbol{n-1}$*) manières de ranger l'objet car le premier objet ne peut plus être pris en compte. On parle de tirage sans remise.*

Ainsi pour les $\boldsymbol{p}$ *objets tirés, parmi* $\boldsymbol{n}$*, si* $1 \leq p \leq n$ *il y'aura :*

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1)) \quad (p \text{ produits})$$

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$$

$$\Rightarrow A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \frac{(n-p) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-p) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

$$\Rightarrow A_n^p = \frac{n!}{(n-p)\,!}$$

Exemple : De combien de manières 10 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 4 places ?

Réponse :

*Dans ce cas il est clair **qu'il y'a de l'ordre** mais **il n'y aura pas de répétition de personne**, car chaque personne s'assoie au plus une seul fois parmi les 4 personne choisi parmi 10. On parle **de tirage sans remise**.*

Donc le nombre total des cas pour que 10 personnes peuvent s'asseoir sur un banc de 4 places est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)\,!} \Rightarrow A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)\,!}$$

$$\Rightarrow A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = \frac{1\times 2\times\cdots\times 10}{1\times 2\times\cdots\times 6} = 7.8.9.10$$

$$\Rightarrow A_{10}^4 = 5040$$