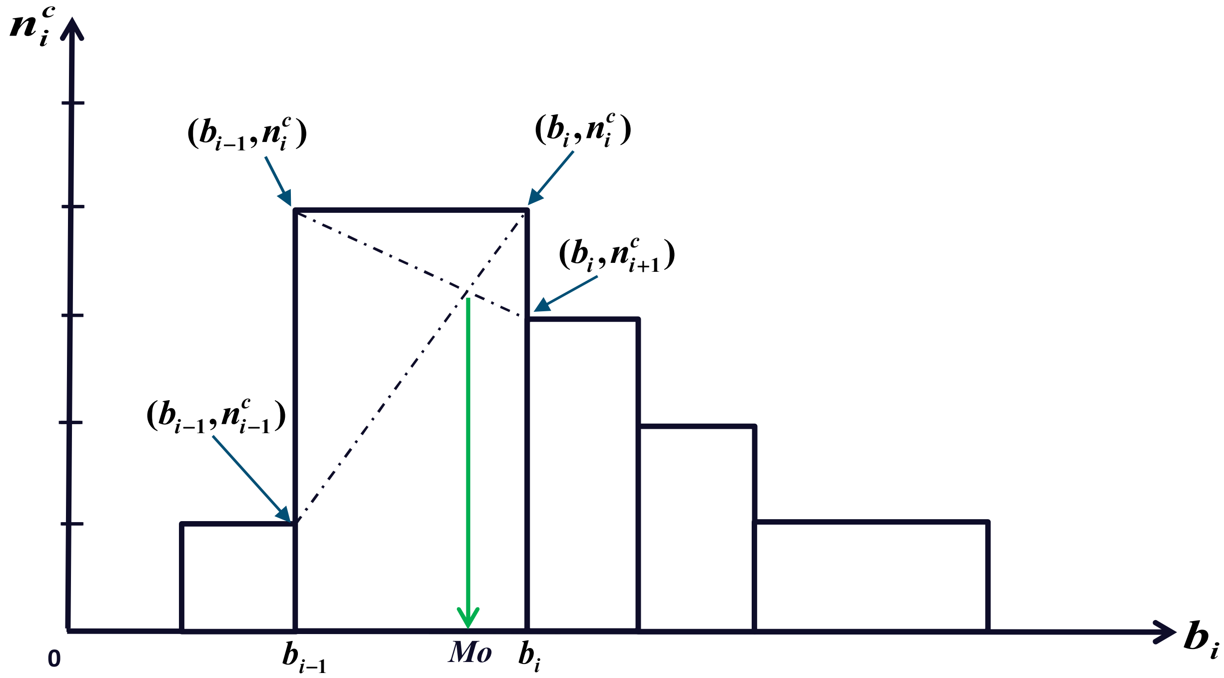
Et graphiquement le mode $M_o \in [b_{i-1}, b_i[$ sur un histogramme est le point d'intersection des deux segments $[(b_{i-1}, h_i); (b_i, h_{i+1})]$ et $[(b_{i-1}, h_{i-1}); (b_i, h_i)]$, voir figure suivante :



2.1.6 La médiane

Pour une série statistique rangée par ordre croissant la médiane $Mé$ est la valeur de la variable qui partage la population en deux groupes d'effectifs égaux.

- **Cas quantitatif discret**

Pour une série statistique rangée par ordre croissant c'est-à-dire :
$v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_N$ la médiane $Mé$ est la valeur du milieu qui dépendra de l'effectif total N.

1. Si N est impair ($N = 2k+1$), alors $Mé = v_{k+1}$.
2. Si N est pair ($N = 2k$), alors $Mé = \dfrac{v_k + v_{k+1}}{2}$.

Exemples 2.1.6

1. Soit la répartition de 9 ménages selon le nombre d'enfants

x_i	0	1	2	3	4
n_i	2	2	1	3	1

$\Rightarrow$

Nombre d'enfant par ménage v_i	0	0	1	1	2	3	3	3	4
(ordre croissant) des individus	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4 observations				v_5	4 observation			

On a $N = 9 = 2{\times}4{+}1 \Longrightarrow \quad Mé = v_{k+1} = v_5 = 2.$

2. Soit la répartition de 10 ménages selon le nombre d'enfants

x_i	0	1	2	3	4
n_i	2	2	1	3	2

On a $N = 10 = 2{\times}5$ (pair) $\Rightarrow Mé = \dfrac{v_k + v_{k+1}}{2} = \dfrac{2+3}{2} = 2{,}5.$

3. Une répartition avec effectif total grand (voir le tableau ci-dessous avec $N = 50$)

x_i	n_i	N_i	F_i
60	3	3	0,06
65	13	16	0,32
70	9	25	0,50
75	18	43	0,86
85	7	50	1,00
Total	*50*		

L'effectif total est $N = 50 = 2{\times}25$ qui est un nombre pair donc :

$$Me = \frac{v_{25} + v_{26}}{2}$$

Comme $N_2 = 16$, $N_3 = 25$ et $N_4 = 43$, alors $v_{25} = x_3$ et $v_{26} = x_4$

$$\Rightarrow Me = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{70+75}{2} = 72{,}5$$

- **Cas quantitatif continu**

On suit les étapes suivantes :

1. Détermination de la classe médiane $[b_{i-1}, b_i[$, En cherchant la classe qui contient l'individu d'ordre $k+1$ (resp k) si $N = 2k+1$ (resp $N = 2k$).

2. Par interpolation linéaire, on peut calculer la médiane à l'intérieur de la classe médiane qui est donnée par :

$$Mé = b_{i-1} + a_i \left(\frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}} \right) \quad \text{avec}$$

N_i **:** l'effectif cumulé croissant de la classe médiane,

N_{i-1} **:** l'effectif cumulé croissant de la classe avant la classe médiane,

N **:** l'effectif total.

Remarque 2.1.8 On peut déterminer la médiane de la même manière en utilisant les fréquences cumulées croissantes.
Et on aura la formule :

$$Mé = b_{i-1} + a_i\left(\frac{0{,}5 - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}\right) \text{ avec}$$

F_i : la fréquence cumulée croissante de la classe médiane,

F_{i-1} : la fréquence cumulée croissante de la classe qui précède la classe médiane et N est l'effectif total.

Exemple 2.1.7 On reprend l'exemple de la page 16.

$[b_{i-1}, b_i[$	n_i	N_i	f_i	F_i
[5 , 10[	11	11	0,11	0,11
[10 , 15[	10	21	0,10	0,21
[15, 20[	15	36	0,15	0,36
[20, 30[	20	56	0,20	0,56
[30 , 40[	18	74	0,18	0,74
[40 , 60[	16	90	0,16	0,90
[60, 80[	10	100	0,10	1,00

L'effectif total est $N = 100 = 2\times 50$ qui est un nombre pair, donc comme $N_3 = 36$ et $N_4 = 56$ alors la classe médiane est **[20, 30[** et on aura :

$$Mé = b_{i-1} + a_i\left(\frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}\right)$$

$$\Rightarrow Mé = 20 + 10\left(\frac{50-36}{56-36}\right) = 20 + 10\left(\frac{14}{20}\right) \Rightarrow Mé = 27 \quad ans$$

Remarque 2.1.9 La médiane peut être définie comme l'inverse de la fonction de répartition pour la valeur $x = 0{,}5$ c'est à dire $Mé = F^{-1}(0{,}5)$.

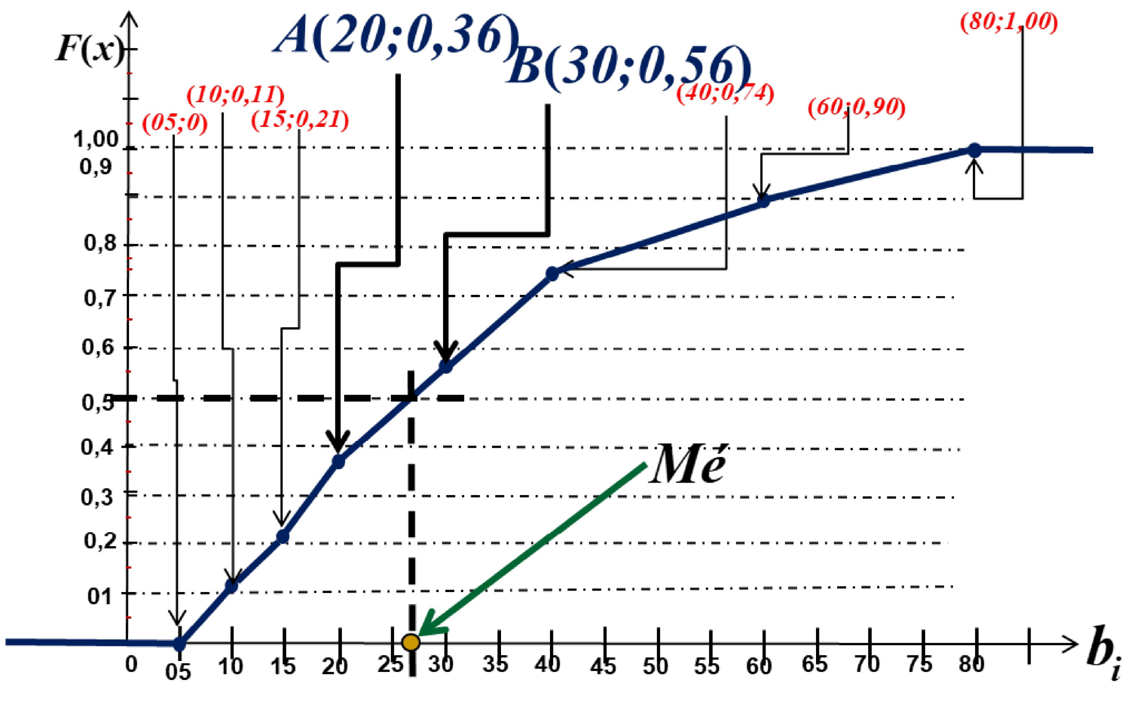
On dit que l'ordre de la médiane est $p = F(Mé) = 0{,}5$.

Et on peut calculer la médiane graphiquement à partir de la courbe cumulative.

Exemple 2.1.8 On reprend l'exemple de la page 16 sur la répartition des 100 individus selon leur âge.

$[b_{i-1}, b_i[$	n_i	N_i	f_i	F_i
[5, 10[	11	11	0,11	0,11
[10, 15[	10	21	0,10	0,21
[15, 20[	15	36	0,15	0,36
[20, 30[	20	56	0,20	0,56
[30, 40[	18	74	0,18	0,74
[40, 60[	16	90	0,16	0,90
[60, 80[	10	100	0,10	1,00

La classe médiane est [20, 30[et la médiane $Mé$ est l'abscisse d'ordre $p = F(Mé) = 0,5$ c'est à dire $Mé = F^{-1}(0,5)$, donc



Et on peut soit avoir directement une valeur approchée de la médiane, ou faire une interpolation linéaire entre les deux point A, B. Ainsi l'équation de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$ tel que :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{F_i - F_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} = \frac{F(Mé) - F_{i-1}}{Mé - b_{i-1}}$$