Corrigé de la fiche de TD N°4

Exo 1 ← (2015-2016) et 2018-2019

1ère méthode : les formules de Cramer (les déterminants).

Soit A la matrice associée à (1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = 26 \neq 0$$

$\Rightarrow n = p = r = 3 \Rightarrow$ le système (1) est de Cramer, il admet donc une solution unique (x_0, y_0, z_0).

$$x_0 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{26} = 1 \quad \Bigg/ \quad z_0 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix}}{26} = -2$$

$$y_0 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix}}{26} = -3$$

$$S = \{(1, -3, -2)\}.$$

2ème méthode : la forme matricielle

(1) $\Leftrightarrow AX = B$ où $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$

puisque $\det A = 26 \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1} B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{26} & \frac{11}{26} & -\frac{7}{26} \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exo 2 : $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ (2)

$n = 3 > p = 2 \Rightarrow r \leq 2$.

$\Rightarrow$ le système (2) n'est pas de Cramer.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ une matrice extraite de la matrice A associée à (2)

$\det M = -7 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} M = 2$.

On considère le système associé à M.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad (2)'$$

Le système $(2)'$ est système de Cramer, il admet donc une solution unique (x_0, y_0).

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{21}{7} = 3 \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{-7} = -1.$$

$(3, -1)$ est solution de $(2)'$.

Vérifions maintenant si $(3,-1)$ vérifie la dernière équation de (2)

$3(3) + 2(-1) = 9 - 2 = 7.$ ✓

$\Rightarrow$ la solution du système (2) est $S = \{(3, -1)\}$.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z - 4u + 3t = 0 \\ x - 3y - z - 2u - t = 0 \\ 4x - 2y + 3z + 2u + t = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$n = 3 < p = 5 \Rightarrow r \leq 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = -37 \neq 0$$

$\Rightarrow$ (3) n'est pas de Cramer, et dans notre cas, il admet une infinité de solutions (paramétrique)

On considère le système

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 4u - 3t \\ x - 3y - z = 2u - t \\ 4x - 2y + 3z = -2u + t \end{cases} \quad (3)'$$

x, y et z sont les inconnues principales, et u, t sont des paramètres

$(3)'$ est un système de Cramer, il admet donc une solution unique en fct de u et t.

$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{13t - 844}{-37}$, $y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{15t - 404}{-37}$; $z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{5t + 1104}{-37}$

Ainsi l'ensemble des solutions du système (3) est

$S = \left\{ \left(\frac{13t - 844}{-37}, \frac{15t - 404}{-37}, \frac{5t + 1104}{-37}, u, t \right) / t, u \in \mathbb{R} \right\}$

Exo 3 :

$E = \left\{ v(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases} \right\}$

Soit A la matrice associée au système (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 0$ soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ une matrice extraite de A

$\det M = 3 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 2 = rg\, A$.

donc le système associé à M est

$\begin{cases} x + 2y = z \\ 2x + 7y = 2z \end{cases}$ $(4)'$

$(4)'$ est un système de Cramer, il admet donc une solution unique que dépend de z : $x = z$ et $y = 0$.

$(x_0, y_0) = (z, 0)$ vérifie bien la dernière équation de (4)

Ainsi $S = \{ (z, 0, z) / z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ z \underbrace{(1, 0, 1)}_{v} / z \in \mathbb{R} \}$

$E = S = \langle v \rangle$ $\{v\}$ est une base de S $\Rightarrow E = S$ est un e.v de dim 1

Exo 4 : $\alpha \in \mathbb{R}$

$(S) \begin{cases} -\alpha x + y - \alpha z = 0 \\ x + \alpha y - z = \alpha \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ $\leadsto A = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A = (\alpha - 1)(3\alpha + 1)$.

*) Si $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ et $\alpha \neq -\frac{1}{3}$, alors le système (S) est de Cramer

$\Rightarrow$ il admet une solution (x_0, y_0, z_0)

$x_0 = \frac{2\alpha+1}{3\alpha+1}$, $y_0 = \frac{-\alpha(3\alpha+2)}{(\alpha-1)(3\alpha+1)}$, $z_0 = \frac{-2\alpha^2-2\alpha-1}{(\alpha-1)(3\alpha+1)}$

*) Si $\alpha = 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-z=0 \\ x+y-z=-1 \\ 2x+y-z=1 \quad (*) \end{cases} \rightsquigarrow \det A = 0.$$

soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = rg\, A = 2$

$$\begin{cases} -x+y=z \\ x+y=-1+z \end{cases} \rightsquigarrow \text{Cramer.}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -1+z & 1 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & z \\ 1 & -1+z \end{vmatrix}}{-2} = z-\frac{1}{2}$$

Verifions si $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ verifie l'équation $(*)$

$$2(-\tfrac{1}{2}) + (z-\tfrac{1}{2}) - z = -\frac{3}{2} \neq 1 \quad (\text{faux}).$$

$\Rightarrow \quad S = \emptyset$

*) On procède de la même manière pour $\alpha = -\frac{1}{3}$.

$\det M = -\frac{1}{9} - 1 = \frac{-1-9}{9} = \frac{-10}{9}$