Chapitre 4 : Systèmes d'équations linéaires

Une des nombreuses applications des déterminants est la résolution des systèmes d'équations linéaires.

1- Définitions :

*) On appelle système de n équations linéaires à p inconnues à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, tout système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad (1)$$

$(n > p$ ou $n = p$ ou $n < p)$.

où les x_i sont les inconnues, les a_{ij} et les b_i des éléments de $\mathbb{K}$.

*) On appelle solution du système (1) tout élément $(y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifie (1)

*) On appelle système homogène associé à (1) le système tiré de (1) avec $b_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

*) On appelle matrice associée à (1) la matrice A des coefficients de x_i

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

2- Rang d'un système linéaire :

On peut écrire le système de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Alors $(1) \Leftrightarrow AX = B$. cette écriture est appelée la forme matricielle du système (1).

Déf 1: On appelle rang du système linéaire (1) le rang de la matrice associée A. $r = \text{rang de } (1) = rg(A)$

* Soit r le rang du système linéaire (1). les cas possibles sont:

a) $p = n$ et ($r = p$ ou $r < p$)

b) $p < n$ et ($r = p$ ou $r < p$)

c) $p > n$ et ($r = n$ ou $r < n$)

3 - Système de Cramer: Cas où $p = n = r$.

Quand le système linéaire (1) est résoluble, sa solution est donnée par le : théorème suivant:

Théorème 1:

Soit le système de n équations linéaires à n inconnues.

$$(1') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

soient A sa matrice associée, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) le rang du système est égale à n.

b) le système admet une solution unique pour $b \in \mathbb{K}^n$, égale à $X = A^{-1}B$

c) le système homogène associé n'admet que la solution triviale $0_{\mathbb{K}^n}$

d) la matrice A est inversible

Déf: On appelle "système de Cramer" tout système de n équations linéaires à n inconnues, dans un corps $\mathbb{K}$, qui vérifie l'une des 4 propriétés du théorème 1

Pour calculer les solutions d'un système de Cramer, on dispose du corollaire suivant :

Corollaire : (Formules de Cramer)

Soit un système de Cramer $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

Soit A sa matrice associée, et A_i la matrice déduite de A en remplaçant la colonne i par la colonne B de b_i.

Alors la solution unique de ce système est donnée par les formules :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Exp 1 Résoudre le système suivant $\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 8x - y = 4 \end{cases}$ (I)

La matrice A associée est $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A = -52 \neq 0 \Rightarrow rg(I) = 2 = n$

donc le système (I) est un système de Cramer, donc il admet une solution unique (x_0, y_0) donnée par :

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{-52} = \frac{27}{52} \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{-52} = \frac{-8}{-52} = \frac{2}{13}$$

$S = \left\{ \left(\frac{27}{52}, \frac{2}{13} \right) \right\}$.

Ou bien $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1}B$ où $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = -\frac{1}{52}\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -8 & +4 \end{pmatrix}$

$$X = -\frac{1}{52}\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -8 & +4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{52} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Exp 2 Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x + 3z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ (II)

$rg(II) = 3 = n$ car $\det A = -10 \neq 0$

où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ le système (II) est bien un système de Cramer, donc il admet une solution unique $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ où :

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-10} = -\frac{9}{10} \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{31}{10} \qquad z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-52} = \frac{13}{10}$$

$$S = \left\{ X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} \\ 31/10 \\ 13/10 \end{pmatrix} \right\}$$

où bien $X_0 = A^{-1}B$

Systèmes d'équations linéaires (cas général) : (quelconque).

1) Cas où $n = p$ et $r < n$

Alors le système (1) n'est pas de Cramer.

Soit M une matrice carrée extraite de A et de rang égal à r.

$rg(M) = r = rg(A)$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

- le déterminant de M est appelé le déterminant principal du système (1)
- les r inconnues $x_1, \dots, x_r$ associées à cette matrice M, sont appelées les inconnues principales, et les $(n-r)$ autres deviennent des paramètres
- et le système associé à M est appelé le système principal

du système (1) on extrait le système (2) de matrice M :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{r2}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n) = b'_r \end{cases} \quad (2)$$

le système (2) est de Cramer, il admet donc une solution unique

cette solution est donnée par les formule de Cramer

$x_i = \dfrac{\det(M_i)}{\det M}$ pour $i = 1, \dots, r$ et M_i est la matrice déduite de M en remplaçant la colonne i par la colonne b'.

*) Si $(y_1, \ldots, y_r)$ vérifie les $(n-r)$ autres équations de (1) alors $(y_1, \ldots, y_r)$ est solution de (1), elle dépend donc des paramètres $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Dans ce cas (1) admet une infinité de solutions

*) Si $(y_1, \ldots, y_r)$ ne vérifie pas une seule équation de (1) ne figurant pas dans (2), alors le système (1) n'admet pas de solution.

Exp: Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 14 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

La matrice associée à (1) est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

On trouve $\det(A) = 0$.

donc $rg(A) < 4$. $n = p = 4$ et $r < 4$

le système (1) n'est pas de Cramer.

Parmi les matrices d'ordre 3 extraites de A, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et } \det(M) = 2$$

$\Rightarrow rg(M) = 3$

le système associé à M est

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 - 3x_4 = b'_1 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 14 - 4x_4 = b'_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 10 - 3x_4 = b'_3 \end{cases} \quad (2)$$

les 3 inconnues principales sont x_1, x_2, x_3. L'inconnue x_4 est considérée comme le paramètre $x_4 = t$

$$B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-3t \\ 14-4t \\ 10-3t \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(M_1)}{\det(M)} = 3-t, \quad x_2 = \frac{\det(M_2)}{\det(M)} = 1+2t, \quad x_3 = \frac{\det(M_3)}{\det(M)} = -t.$$

On porte cette solution (x_1, x_2, x_3) dans la 4^e équation de (1)

$(3-t) - 2(1+2t) - (-t) + 4t = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow$ la solution (x_1, x_2, x_3) vérifie bien le système (1)

Ainsi (x_1, x_2, x_3) est la solution paramétrique de (1) (infinité)

2) Cas où $p < n$:

Le système (1) admet donc plus d'équations que d'inconnues

Il n'est pas de Cramer, et son rang $r \leq p < n$

On procède de la même manière. On considère la matrice M extraite de A et de rang $rg(M) = r$.

Soit $(y_1, \ldots, y_r)$ la solution de (2) donnée par les formules de Cramer.

*) Si $(y_1, \ldots y_r)$ vérifie (1), alors cette solution est aussi solution de (1)

Si ______ ne vérifie pas une seule équation de (1), alors (1) n'admet pas de solution.

Exp Résoudre le système
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \\ x - 5y = -11 \end{cases} \quad (1)$$

Sol $n = 3 \quad p = 2 \qquad p = 2 < n = 3$

(1) n'est pas de Cramer son rang ≤ 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(M) = -11 \Rightarrow rg(M) = 2$

M est associée au système $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ (2)

(2) est un système de Cramer, $x = 2$ et $y = 1$

$(2, 1)$ est une solution de (2) par contre elle ne vérifie pas l'équation $x - 5y = -11 \Rightarrow$ le système (1) n'a pas de solution.

3) Cas où $p \geq n$:

le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations

Le système (1) n'est pas de Cramer, il est de rang $r \leq n < p$.

On procède de la même manière. Soit M une matrice extraite de A de rang $r = rg(M)$, le système associé est de Cramer

il admet donc une solution unique $(y_1 \ldots y_r)$ qui est paramétrique.

*) Si $(y_1, \ldots y_r)$ vérifie toutes les équations de (1), alors (1) admet une infinité de solutions $(y_1 \ldots y_r)$ (paramétrique)

*) Si $(y_1 \ldots y_r)$ ne vérifie une seule équation de (1), alors (1) n'admet pas de solution.

Exp : Résoudre le système
$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z + 3u - t = 4 \\ 5x + y - 3z + 2u + 6t = -7 \\ x - 5y + 7z + 4u - 8t = 11 \end{cases} \quad (1)$$

Sol. (1) est un système de 3 équations linéaires à 5 inconnues

$n = 3 < p = 5$. donc le rang de (1) $r \leq 3$

- Tous les déterminants extraits de A sont nuls.

en effet : le nombre des déterminants d'ordre 3 est $C_5^3 = 10$.

et la théorie des déterminants montre qu'il suffit d'en calculer 3

Soient C_i les colonnes de A $1 \leq i \leq 5$.

alors $\det(C_1, C_2, C_i) = 0$, pour $i = 3, 4, 5 \Rightarrow C_3, C_4$ et C_5 sont des combinaisons linéaires de C_1 et C_2.

Il en résulte $\det(C_i, C_j, C_k) = 0$, pour $1 \leq i, j, k \leq 5$

Ainsi le rang de (1) $r < 3$, on calcule les déterminants d'ordre 2 extraits de A on trouve $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det M = 13 \neq 0$

$\Rightarrow r = 2$. à cette matrice M on associe le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 - 2z - 3u + t \\ 5x + y = -7 + 3z - 2u - 6t \end{cases} \quad (2)$$

x et y sont les inconnues principales et z, u et t les paramètres

(2) est un système de Cramer, admet une solution unique $\begin{cases} x = \frac{-1}{13}(10 + 4z + 7u + 11t) \\ y = \frac{-1}{13}(-41 + 59z + 9u - 23t) \end{cases}$

par contre (x, y) ne vérifie pas (1) $\Rightarrow$ (1) est impossible

Remarques:

1) Si le système (1) admet au moins une solution, on dit qu'il est compatible, sinon on dit qu'il est impossible.

2) Si le $\det(A) \neq 0$ alors le système homogène associé à (1) admet une solution unique $(x_1, \ldots x_n) = (0 \ldots 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$