Fiche de TD 3, S2 Algèbre 2018/2019

Exercice 1.

Dans $M_5(\mathbb{R})$:

1) $A=(a_{ij})/a_{ij}=\begin{cases} i+j & \text{si } i\leq j \\ 0 & \text{si } i>j \end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

2) $A=(a_{ij})\ /\ a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } |i-j|\leq 1 \\ 0 & \text{si } |i-j|>1 \end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A=(a_{ij})\ /\ a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } 6\leq i+j\leq 8 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB=-1$, $\quad BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad AD=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$CF=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad FE=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad A$ est inversible $\iff \exists B\in M_2(\mathbb{R})\ /\ AB=I_2=BA$.

Soit $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ t.q $AB=I_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2a+c=1 \\ 2b+d=0 \\ 2c=0 \\ 2d=1 \end{cases}$$

$\boxed{c=0}$, $\boxed{d=\frac{1}{2}}$ $\boxed{a=\frac{1}{2}}$ $\boxed{b=-\frac{1}{4}}$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons BA : $\quad BA=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=I_2$

Ainsi $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

pour $n = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 1.2^{1-1} \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix}$

supposons que la propriété est vraie jusqu'au n et montrons que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n . A = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n.2 & 2^n + n2^{n\cancel{-1}}.\cancel{2} \\ 0 & 2^n.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (1+n)2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 6 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C^3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 15 & -2 & -18 \\ 13 & -2 & -15 \end{pmatrix}$$

On a bien $\quad C^3 + 3C^2 + C^2 + I_3 = O_{M_3(\mathbb{R})}$

$$-C^3 - 3C^2 - C = I_3$$

$$(-C^2 - 3C^2 - I_3)\, C = I_3 = C(-C^2 - 3C - I_3)$$

C est alors inversible et on a

$$C^{-1} = -C^2 - 3C - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow f(z) = \bar{z}$$

- Soit $M_f(B,B)$ la matrice associée à f par rapport à la base $B = \{1, i\}$. On a alors:

$$M_f(B,B) = \begin{array}{cc} f(1) & f(i) \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \end{array}$$

$f(1) = 1$
$f(i) = -i$

- Soit $M_f(B', B')$ la matrice associée à f par rapport à la base $B' = \{\overset{u}{1+i}, \overset{v}{1+2i}\}$. On a alors:

$$M_f(B', B') = \begin{array}{cc} f(u) & f(v) \\ \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{array}\right) & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array}$$

$$f(u) = \bar{u} = 1 - i = \alpha u + \beta v = \alpha(1+i) + \beta(1+2i)$$
$$1 - i = (\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) i$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 3} \text{ et } \boxed{\beta = -2}$$

$$f(v) = \bar{v} = 1 - 2i = \alpha' u + \beta' v \qquad \begin{cases} \alpha' + \beta' = 1 \\ \alpha' + 2\beta' = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta' = -3} \; \boxed{\alpha' = 4}$$

Exercice 5.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boxed{f(x,y,z) = (2x+y, 2x+3y-2z, x+y-z)}$$

- $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, on a card $B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre :

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \quad \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

- Soit P la matrice de passage de B à B' :

$$P_{B \to B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

- Soit Q la matrice de passage de B' à B :

$$Q_{B' \to B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

- M' la matrice associée à f dans la base B' :

$$M'_f(B', B') = Q_{(B', B)} M_{(B, B)} P_{(B, B')} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \det A = 400 \neq 0, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{40} & -\frac{3}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{21}{400} & -\frac{1}{200} & -\frac{9}{80} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) On a, par exemple, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A_1 \neq 0$ donc

$\operatorname{rg} A \geqslant 2$.

2) $\operatorname{rg} A = 2 \iff$ Tous les mineurs d'ordre 3 sont nuls.

$$\operatorname{rg} A = 2 \iff \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 2 & -1 & b \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4-4a \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & b \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12-4b \end{array}\right\}$$

On a donc :

$$\boxed{\operatorname{rg} A = 2 \iff a = 1 \text{ et } b = 3}$$

3) Soit f l'application associée à A

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

f est surjective $\iff \dim \operatorname{Im} f = 3$ (puisque on a $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$)

f est surjective $\iff \operatorname{rg} f = 3$ ($\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$) ; $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f$

$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff (a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(1,3)\}}$$

puisque $2 \leqslant \operatorname{rg} A \leqslant 3$.