

Fiche de TD 3 (Matrices et déterminants)

Exercice 1:

1) Dans chacun des cas suivants, écrire la matrice A d'ordre 5 dont les coefficients a_{ij} sont donnés par

$$1) a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}, 2) a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i - j| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}, 3) a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } 6 \leq i + j \leq 8 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits : AB , BA , AD , CF , FE .

Exercice 2: Considérons dans $M_2(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

-Montrer, en utilisant la définition, que A est inversible, puis déterminer A^{-1} .

-Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3: Soit C la matrice donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer C^2 et C^3 .

2) Vérifier que $C^3 + 3C^2 + C + I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

3) En déduire que C est inversible et donner l'expression de C^{-1} .

Exercice 4: Considérons f l'application linéaire dans \mathbb{C} , l'espace vectoriel sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \rightarrow f(z) = \bar{z}. \end{aligned}$$

-Déterminer la matrice associée à f dans les deux cas suivants :

1) par rapport à la base $B = \{1, i\}$,

2) par rapport à la base $B' = \{1 + i, 1 + 2i\}$.

Exercice 5: Soit M la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à M dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 .

-Déterminer f .

-Soient $V_1 = (1, -1, 0)$, $V_2 = (1, 1, 1)$ et $V_3 = (1, 0, 1)$,

-Montrer que $B' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

-Déterminer P la matrice de passage de la base B à la base B' .

-Déterminer Q la matrice de passage de la base B' à la base B .

-En déduire, M' la matrice associée à f dans la base B' .

Exercice 6: Montrer que la matrice suivante est inversible et exprimer son inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7: Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

et soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à A dans la base canonique.

1) Montrer que $rg(A) \geq 2$.

2) Déterminer les valeurs de a et b de \mathbb{R} pour que $rg(A) = 2$.

3) Déterminer les valeurs de a et b de \mathbb{R} pour que f soit surjective.

Exercice (Devoir): Soit f l'application linéaire définie par:

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \rightarrow f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) \end{aligned}$$

1) Trouver A la matrice associée à f dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 .

2) Montrer que f est bijective et donner son application inverse f^{-1} .

3) Soient $V_1 = (1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 1, 0)$ et $V_3 = e_1$. Montrer que $B' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

4) Ecrire P la matrice de passage de la base B à la base B' .

5) Déterminer Q la matrice de passage de la base B' à la base B .

6) Déduire A' la matrice associée à f dans la nouvelle base B' .