Chapitre 3. Matrices, matrices associées et déterminants

I) Les matrices.

Dans toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A de type (m,n) (ou $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. Un tel tableau est représenté de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, sont des scalaires dans $\mathbb{K}$.

Les éléments a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice A.

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Remarquons que a_{ij} est situé à la ligne i et à la colonne j et que l'on écrit d'abord l'indice de la ligne, ensuite celui de la colonne.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(2,3)$ avec, par exemple, $a_{21} = 3$ et $a_{13} = 1$.

Notation. L'ensemble des matrices de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Définition Deux matrices sont égales lorsqu'elles sont de même type et que les coefficients correspondants sont égaux i.e, pour $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{m',n'}(\mathbb{K})$, on a

$$A = B \text{ ssi } m = m',\ n = n' \text{ et } a_{ij} = b_{ij}$$

Matrices particulières.

- La matrice de type (m, n) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $0_{M_{m,n}(\mathbb{K})}$ (ou tout simplement 0).

- Une matrice de type $(1, n)$ est appelée matrice ligne. On la note $A = (a_{11}\ a_{12} \cdots\ a_{1n})$

- Une matrice de type $(m, 1)$ est appelée matrice colonne. On la note
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Lorsque $m = n$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite matrice carrée d'ordre n. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forment la diagonale principale de la matrice A. Lorsque les coefficients a_{ij} sont nuls pour tout $i,j \in \{1,\dots,n\}$ tel que $i \neq j$, on dira que A est une matrice diagonale. Si de plus $a_{ii}=1$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, on dira que A est la matrice unité (ou la matrice d'identité et on la note I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

- On appelle matrice triangulaire supérieure (resp. matrice triangulaire inférieure) toute matrice carrée d'ordre n, dont les coefficients a_{ij} sont nuls pour tout $i>j$ (resp. $a_{ij}=0$ pour tout $i<j$).

<u>Exemples</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ c'est une matrice diagonale.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ c'est une matrice triangulaire inférieure.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$ c'est une matrice triangulaire supérieure.

Trace d'une matrice carrée.

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n, $A=(a_{ij})$. On appelle trace de A et on note $tr(A)$, la somme de la diagonale principale de A : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, exemple $tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1+3 = 4$.

Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices

Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de même type (m,n). Leur somme $A+B$ est la matrice de type (m,n) définie par :

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

i.e, on somme coefficients par coefficients.

Exemples. Si $A=\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ alors

$$A+B=\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1&-2+1\\0-1&1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

par contre si $C=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ alors $A+C$ n'est pas définie.

Produit d'une matrice par un scalaire.

Le produit d'une matrice $A=(a_{ij})$ de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha\in\mathbb{K}$ est la matrice, notée, αA de type (m,n) définie par :

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})$$

Exemple 1) Si $A=\begin{pmatrix}-1&2&5\\3&1&0\end{pmatrix}$ et $\alpha=3$ alors

$$\alpha A=\begin{pmatrix}3(-1)&3(2)&3(5)\\3(3)&3(1)&3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&6&15\\9&3&0\end{pmatrix}$$

Exemple 2) $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$

Alors $A-B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&3\\1&-1&-2\end{pmatrix}$

Propriétés de l'addition et de la multiplication par un scalaire.

Proposition. Soient $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors on a les propriétés suivantes :

1) $A + B = B + A$: la somme est commutative.

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$: la somme est associative.

3) $A + O_{M_{mn}(\mathbb{K})} = O_{M_{mn}(\mathbb{K})} + A = O_{M_{mn}(\mathbb{K})}$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition.

4) $A + (-A) = (-A) + A = O_{M_{m,n}(\mathbb{K})}$: la matrice $(-A)$ est l'élément symétrique de A, pour l'addition.

5) $\alpha.(A+B) = \alpha A + \alpha B$

6) $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$

7) $(\alpha\beta).A = \alpha(\beta.A)$

8) $1.A = A$.

Preuve. Exercice.

Remarque. $(M_{m,n}(\mathbb{K}), +, .)$ l'ensemble des matrices de type (m,n), muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication par un scalaire, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On a le théorème suivant :

Théorème.

Considérons dans $M_{mn}(\mathbb{K})$, les matrices E_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ définies par :

$$E_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} & \text{ligne } i \\ \text{colonne } j & \end{array}$$

dont les coefficients sont tous nul, sauf, le coefficient situé à la ligne i et la colonne j, vaut, 1. Alors la famille $\{E_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ forme une base de $M_{mn}(\mathbb{K})$, et on a

$$\dim M_{mn}(\mathbb{K}) = m.n.$$

$\{E_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ est appelée base canonique de $M_{mn}(\mathbb{K})$.

Exemple. La base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\left\{ E_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Produit de deux matrices.

Le produit $A.B$ de deux matrices A et B est défini, si et seulement si, le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition Soient $A=(a_{ij})$ une matrice de type (m,n) et $B=(b_{ij})$ une matrice de type (n,p). Alors le produit $C=AB$ est une matrice de type (m,p) dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

pour tous $i\in\{1,\dots,m\}$ et $j\in\{1,\dots,p\}$.

Exemple 1)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{R}) \quad , \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}\in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$A.B \in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$$

$$A.B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}$$

Exemple 2) Considérons les trois matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Calculer AB, $B.A$, $C.A$.

Remarque 1.

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

On a, si $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Alors

$$A.B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3+2 & -2+2 \\ 3+0 & 2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

et

$$B.A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3+2 & 6+0 \\ -1+1 & 2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA.$$

Remarque 2. $AB=0 \not\Rightarrow A=0 \vee B=0.$

On a $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5\end{pmatrix}\neq 0$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0$, par contre

$$A.B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Remarque 3. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$

et $AC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$

Ainsi $AB = AC$ or $B \neq C$.

Propriétés du produit de matrices.

Proposition. Soient $A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B, B' \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,r}(\mathbb{K})$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on a les propriétés suivantes :

1) $(AB)C = A(BC)$

2) $A\, O_{M(n,p)} = O_{M(m,p)}$ et $O_{M(p,m)} \cdot A = O_{(p,n)}$

3) $A \cdot I_n = A = I_m A$.

4) $(A + A') \cdot B = AB + A'B$

5) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + AB'$

6) $(\alpha A) B = \alpha (AB) = A (\alpha B)$.

Puissance d'une matrice carrée.

On peut multiplier une matrice carrée par elle même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice carrée A par : $A^0 = I_n$, $A^{k+1} = A^k \cdot A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Autrement dit, $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k\text{-fois}}$

Remarquons que : $A^{r+s} = A^r . A^s$, pour tout $r, s \in \mathbb{N}$.

Transposée d'une matrice

Définition. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de la matrice A, et on note A^t la matrice de type (n, m) définie par :

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}} \in M_{nm}(\mathbb{K}).$$

Elle est obtenue en écrivant en colonnes les lignes de A et vice-versa.

Une matrice carrée est dite symétrique si $A^t = A$, i.e, si

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, alors $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ alors $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = B$, ainsi

A est une matrice symétrique.

Propriétés de la transposition

Théorème. On a les propriétés suivantes :

1) Pour $A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t.$$

2) Pour $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ on a :

$$(AB)^t = B^t . A^t.$$

3) Pour $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, on a

$$(A^t)^t = A.$$

Inverse d'une matrice.

Définition. Matrice inverse.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que A est inversible s'il existe une matrice B d'ordre n telle que

$$A . B = I_n = B . A$$

On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Exemple 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, telle que $AB = I_2$ et $BA = I_2$. On a alors

$$A.B = I_2 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}$

On a alors $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, reste à montrer que B vérifie l'égalité $B.A = I_2$. On a

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On a alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Exemple 2) Considérons dans $M_2(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

cherchons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2 = BA$

On a $BA = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est impossible, donc A n'est pas inversible.

Remarques

- La matrice unité I_n est inversible et on a $(I_n)^{-1} = I_n$ (puisque $I_n I_n = I_n$)
- La matrice nulle $0_{M_n(K)}$ n'est pas inversible car

$$B.0_{M_n(K)} = 0_{M_n(K)} \neq I_n$$

Propriétés.

1) Si A est inversible, alors son inverse est unique

2) Soit $A \in GL_n(K)$ (A inversible). Alors A^{-1} est inversible et on a $(A^{-1})^{-1} = A$

3) Soient A, B deux matrices inversibles de même type. Alors
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

4) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible d'ordre n. Alors

$$AC = BC \Rightarrow A = B.$$

5) Soit A une matrice inversible. Alors la transposée de A est inversible et on a

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Preuve. Exercice.

Écriture matricielle d'une application linéaire.

Matrice associées aux applications linéaires.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, et soient $B_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base E et $B_F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ une base de F. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ sont des vecteurs dans F. Ainsi, il existe $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ telsque

$$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m$$

$$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m$$

$$\vdots$$

$$f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m$$

On obtient alors la matrice suivante

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & \cdots \; f(u_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{array} \end{array} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

On l'appelle, matrice associée à f par rapport aux bases B_E et B_F. On la note par $M_f(B_E, B_F)$.

<u>Exemple</u> Considérons l'application linéaire

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+y, x-y, -2x+3y).$$

Trouver la matrice associée à f par rapport aux bases:

1) $B_{\mathbb{R}^2} \{e_1, e_2\}$ et $B_{\mathbb{R}^3} = \{e_1', e_2', e_3'\}$

2) $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1(1,0), e_2(0,1)\}$ et $B_{\mathbb{R}^3} = \{u_1(1,0,0), u_2(-1,1,0), u_3(2,3,1)\}$

On a : $f(e_1) = f(1,0) = (1, 1, -2)$,

déterminons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q $f(e_1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$ i.e

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 1 = \alpha - \beta + 2\gamma \\ 1 = \beta + 3\gamma \\ -2 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 12 \\ \beta = 7 \\ \gamma = -2 \end{cases}$

Ainsi, $f(e_1) = 12u_1 + 7u_2 - 2u_3$,

de même, on cherche α, β, γ tels que :

$$f(e_2) = (1, -1, 3) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \quad \text{i.e}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha - \beta + 2\gamma \\ -1 = \beta + 3\gamma \\ 3 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -15 \\ \beta = -10 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

$f(e_2) = -15u_1 - 10u_2 + 3u_3$,

On a alors : $$M_f(B_{\mathbb{R}^2}, B_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

<u>Application linéaire canoniquement associée à une matrice</u>

A toute matrice A de type (m, n), on associe une application linéaire définie comme suit :

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$x \longrightarrow f(x) = AX \text{ où}$$

X désigne la matrice colonne dont les coefficients sont les coordonnées de x par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

Elle est canoniquement associée à une application linéaire

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t) \longrightarrow f(x,y,z,t) = AX$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z + 3t \\ 3x + 2y - z \\ 2x - y + 5z - 2t \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z,t) = (x - z + 3t,\ 3x + 2y - z,\ 2x - y + 5z - 2t).$$

Correspondance entre les opérations sur les applications linéaires et celles sur les matrices.

Matrice d'une combinaison linéaire.

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et m respectivement, et soit B_E une base de E et B_F une base de F.

On a donc, pour toutes les applications linéaires f et g de E dans F et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$M_{f+g}(B_E, B_F) = M_f(B_E, B_F) + M_g(B_E, B_F)$$
$$M_{\lambda f}(B_E, B_F) = \lambda . M_f(B_E, B_F).$$

Matrice d'une composée

Proposition. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, m et p respectivement, $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases de E, F et G respectivement. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

On a alors
$$M_{(g \circ f)}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = M_g(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \cdot M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Matrice d'un isomorphisme

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de même dimension n. Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective si et seulement si $M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est inversible. De plus,
$$M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = \left(M_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)\right)^{-1}$$

Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une base.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension $n \geq 1$, muni de deux bases $\mathcal{B} = \{u_i\}_{i=1}^n$ et $\mathcal{B}' = \{u'_i\}_{i=1}^n$. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice carrée, notée, $P_{(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\{u'_i\}_{i=1}^n$ dans la base $\{u_i\}_{i=1}^n$, i.e, si

$$\begin{cases} u'_1 = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{n1}u_n \\ u'_2 = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \cdots + \alpha_{n2}u_n \\ \vdots \\ u'_n = \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_n + \cdots + \alpha_{nn}u_n \end{cases}$$

Alors

$$P_{(\mathcal{B}\to\mathcal{B}')} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array}$$

<u>Exemple</u>. Considérons dans $\mathbb{R}^2$, les deux bases suivantes :

$\mathcal{B} = \{u_1(1,2), u_2(2,3)\}$

$\mathcal{B}' = \{u'_1(2,0), u'_2(-1,1)\}$

Trouver $P_{(\mathcal{B}\to\mathcal{B}')}$.

On a $$P_{(\mathcal{B}\to\mathcal{B}')} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u'_1 & u'_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \end{array}$$

On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q $u'_1 = \alpha u_1 + \beta u_2$, i.e t.q

$$\begin{cases} 2 = \alpha + 2\beta \\ 0 = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -6 \text{ et } \beta = 4$$

De même, on cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q $u'_2 = \alpha u_1 + \beta u_2$ i.e t.q

$$\begin{cases} -1 = \alpha + 2\beta \\ 1 = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

<u>Proposition</u>. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$:

$$\left(P_{(\mathcal{B}\to\mathcal{B}')}\right)^{-1} = P_{(\mathcal{B}'\to\mathcal{B})}$$

<u>Commentaire</u>. Soit $x \in E$, de coordonnées $x_1 \dots x_n$ dans la base $\mathcal{B} = \{u_i\}_{i=1}^{n}$, et de coordonnées $x'_1 \dots x'_n$ dans la base $\mathcal{B}' = \{u'_i\}_{i=1}^{n}$. On a alors

$$\begin{cases} x = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n , \\ x = x'_1 u'_1 + \cdots + x'_n u'_n , \end{cases}$$

posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et soit $P_{B \to B'}$ la matrice de passage de B à B'. Alors

$$X' = P^{-1} X \quad \text{, ou encore} \quad X' = P_{B' \to B} \cdot X$$

Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $B_E = \{u_1 - u_n\}$ et $B'_E = \{u'_1 - u'_n\}$ deux bases de E et $B_F = \{v_1 - v_n\}$ et $B'_F = \{v'_1 - v'_n\}$ deux bases de F. On note :

$$A = M_f (B_E , B_F)$$
$$A' = M_f (B'_E , B'_F)$$
$$P = P_{(B_E \to B'_E)}$$
$$Q = P_{(B_F \to B_F')}$$

$$E_{B'_E} \xrightarrow{Id_E} E_{B_E} \xrightarrow{f} F_{B_F} \xrightarrow{Id_F} F_{B'_F}$$

$$P \qquad A \qquad Q^{-1} \qquad A'$$

$f : E_{B'_E} \to F_{B'_F} = Id_F \circ f \circ Id_E$

$A' = Q^{-1} A P$

On a alors $\quad A' = Q^{-1} A P$

<u>Remarque</u>. Lorsque $E = F$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $B_E = \{u_1 - u_n\}$ et $B'_E = \{u'_1 - u'_n\}$, si on note $A = M_f (B_E , B_E)$ et $A' = M_f (B'_E , B'_E)$ et $P = P_{(B \to B')}$. Alors $\quad A' = P^{-1} A P$

Exemple en TD.

II) Les déterminants

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n, $A \in M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$), pour tout $i, j \in \{1,\dots,n\}$, on définit la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A. On appelle déterminant de la matrice carrée A, et on note $\det A$ (ou $|A|$), l'application définie par :

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A = (a_{ij}) \longrightarrow \det A = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), & n \geq 2 \\ a_{11}, & n = 1 \end{cases}$$

où $i \in \{1,\dots,n\}$.

Remarque. Le déterminant d'une matrice carrée, ayant une ligne (ou une colonne) nulle, vaut 0.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.

Dans le cas où $n = 2$, posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

On a alors $A_{11} = (a_{22})$, $A_{12} = (a_{21})$, $A_{21} = (a_{12})$, $A_{22} = (a_{11})$

On fixe $i = 1$. On a alors

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

par exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2.$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Dans le cas où $n=3$, posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

fixons $i=1$, on aura:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

$$= (-1)\, a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Par exemple, fixons $i=2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1-(-3) + 2(2-9) = 4 + 2(-7) = -10.$$

Remarque. Afin de simplifier le calcul, on fixe toujours la ligne qui contient plusieurs zéros.

Donnons maintenant quelques propriétés importantes du déterminant

Propriété de symétrie

Soit A une matrice carrée d'ordre n et A' la matrice obtenue en échangeant deux lignes (ou deux colonnes) distinctes de A. Alors on a $\det A = -\det A'$.

Par exemple : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \\ \leftarrow L_3 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_3 \\ \\ \leftarrow L_1 \end{matrix}$

Propriété d'alternance.

Si une matrice A, a deux lignes (ou deux colonnes) égales, alors son déterminant est nul.

Par exemple. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ puisque $C_2 = C_3$.

$$\begin{array}{ccc} & C_2 & C_3 \end{array}$$

Propriété de linéarité.

- Si on multiplie une ligne (ou une colonne) d'une matrice par un réel α, le déterminant de la nouvelle matrice est multiplié par ce réel.

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2(1) & 2(2) & 2(4) \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

Remarque. Pour toute matrice carrée d'ordre n, et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

- Si un vecteur ligne (ou colonne) se présente comme la somme de deux vecteurs lignes (ou colonnes), le déterminant est la somme des deux déterminants obtenus en prenant successivement chacun des termes de la somme :

Exemple.

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6+4 \\ 3 & 4+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16-18+32-12 = 18$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48-30 = 18$$

• Soit A une matrice carrée d'ordre n et A' la matrice obtenue en ajoutant à une ligne (ou à une colonne) de A une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) de A. Alors, on a

$$\det A = \det A'$$

Exemple.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1+C_2 & C_2 & C_3 \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} + & - & C_3+2C_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{0 \quad -1 \quad 0} \\ 3 \quad 1 \quad -1 \\ 8 \quad 5 \quad 11 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 33+8 = 41.$$

Remarque 1). Si une ligne (ou une colonne) de A est combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) alors $\det A = 0$. Par exemple

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car} \quad C_1 = C_2 + 2C_3$$

Remarque 2). Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs lignes (ou les vecteurs colonnes) sont liés.

Déterminant d'un produit

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Déterminant de la transposée.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors

$$\det A^t = \det A.$$

Remarquons que toutes les propriétés du déterminant établies pour les lignes des matrices, sont également vraies pour les colonnes (puisque le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée).

Déterminant d'une matrice triangulaire.

Si A est une matrice triangulaire supérieure, ou inférieure alors son déterminant est égal au produit des coefficients de la diagonale principale de A :

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$, alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

En particulier, $\det I_n = 1$.

Déterminants et inversion de matrices.

On a le théorème suivant :

Théorème. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et on a $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Calcul de l'inverse d'une matrice inversible.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle matrice des cofacteurs, notée $\mathrm{Com}\,A$, la matrice dont ces coefficients c_{ij} sont définies par :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \quad , \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$$

où A_{ij} désigne la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

On a le Théorème suivant :

Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, telle que $\det A \neq 0$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{com} A)^t$$

où $\operatorname{com} A$ est la matrice des cofacteurs de A.

Exemple 1). $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $\det A = -3 \neq 0$ Ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{com} A)^t$$

posons $\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, on a alors :

$c_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = -1$, $c_{21} = (-1)^{2+1} \det A_{21} = -2$

$c_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = 0$, $c_{22} = (-1)^{2+2} \det A_{22} = 3$

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\operatorname{com} A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi $$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 2). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a déjà calculé $\det A = -10 \neq 0$

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & -7 & 5 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & -7 & -3 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rang d'une matrice

Déf : On appelle rang d'une matrice A et on note $rg(A)$ le plus grand nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants (libre).

Exp :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$rg(A) = ?$

Voir si $\{V_1, V_2, V_3\}$ est une famille libre ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \; (2) \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \; (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha \\ (2)-(3) \; -3\beta - 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \gamma = -\beta = -2\alpha \\ 3\alpha + 2\alpha - 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

$$\Rightarrow \boxed{rg(A) = 3}$$

proposition :

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Si $\det A \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n$.

Exp1) l'exemple précédent

$\det A = -3 \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = 3$.

Exp2)

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ +1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\det B = 0 \Leftrightarrow rg(B) \neq 3 \Leftrightarrow rg(B) \leq 2$.

donc on étudie si deux vecteurs colonnes sont linéairement indépendants, et dans ce cas, on ne peut pas utiliser le déterminant

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Proposition:

1) Si A est une matrice de type (m, n) associée à une application linéaire f de E dans F, alors.

$$rg(A) = rg(f)$$
$$rg(A) = rg(A^t).$$

2) le rang de A est égale au plus grand nombre de vecteurs lignes linéairement indépendants ainsi $rg(A) \leq n$ et $rg(A) \leq m$