Solutions des Exercices de TD 2

Ex 1. Déterminer si les applications f_i sont linéaires :

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$

f_1 est bien linéaire (voir Exemple 2 du Cours Appl lin)

2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longrightarrow f_2(x,y) = (xy, x, y)$

f_2 est linéaire $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : f_2((x,y)+(x',y')) = f_2(x,y) + f_2(x',y') \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : f_2(\alpha(x,y)) = \alpha f_2(x,y). \end{cases}$

On a : $f_2(\alpha(x,y)) = f_2(\alpha x, \alpha y)$

$= ((\alpha x)(\alpha y), \alpha x, \alpha y)$

$= \alpha(\alpha xy, x, y)$

$\neq \alpha f_2(x,y)$

En effet, contre exemple :

$\alpha = -1, \quad (x,y) = (1,1)$

$f_2((-1)(1,1)) = f_2(\underbrace{-1}_{x}, \underbrace{-1}_{y}) = (\underbrace{(-1)}_{x} \cdot \underbrace{(-1)}_{y}, \underbrace{-1}_{x}, \underbrace{-1}_{y})$

$f_2(-(1,1)) = (1, -1, -1)$

$\neq -f(1,1)$ car

$-f(1,1) = -(1,1,1) = (-1,-1,-1).$

f_2 n'est pas linéaire.

3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow f_3(x,y) = (x^2+y^2, x^3+1)$

f_3 n'est pas linéaire car $f_3(0,0) = (0,1) \neq (0,0).$

4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$(x,y) \longrightarrow f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$.

f_4 est linéaire $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f_4(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = \alpha f_4(x,y) + \beta f_4(x',y')}$$

$$f_4(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = f_4(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')$$
$$= (\alpha y+\beta y', 0, (\alpha x+\beta x')-7(\alpha y+\beta y'), (\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y'))$$
$$= (\alpha y, 0, \alpha x-7\alpha y, \alpha x+\alpha y) + (\beta y', 0, \beta x'-7\beta y', \beta x+\beta y')$$
$$= \alpha(y, 0, x-7y, x+y) + \beta(y', 0, x'-7y', x+y')$$
$$= \alpha f_4(x,y) + \beta f_4(x',y').$$

5) $f_5 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$P \longrightarrow f_5(P) = (P(-1), P(0), P(1))$

f_5 est linéaire $\Leftrightarrow$ $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f_5(\alpha P+\beta Q) = \alpha f_5(P) + \beta f_5(Q)}$$

$$f_5(\alpha P+\beta Q) = ((\alpha P+\beta Q)(-1), (\alpha P+\beta Q)(0), (\alpha P+\beta Q)(1))$$
$$= (\alpha P(-1)+\beta Q(-1), \alpha P(0)+\beta Q(0), \alpha P(1)+\beta Q(1))$$
$$= (\alpha P(-1), \alpha P(0), \alpha P(1)) + (\beta Q(-1), \beta Q(0), \beta Q(1))$$
$$= \alpha(P(-1), P(0), P(1)) + \beta(Q(-1), Q(0), Q(1))$$
$$= \alpha f_5(P) + \beta f_5(Q).$$

Ex2 - TD2 - Appl lin

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x-z, 2x+y-3z, -y+2z)$

$e_1 = (1,0,0), \ e_2 = (0,1,0), \ e_3 = (0,0,1)$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1-0, 2(1)+0-3(0), -0+2\cdot 0) = (1,2,0)$

$= (1,0,0) + (0,2,0) = \underbrace{(1,0,0)} + 2\underbrace{(0,1,0)}$

$\boxed{f(e_1) = e_1 + 2e_2}$ $\quad 1, 2, 0$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,-1) = (0,1,0) - (0,0,1)$

$\boxed{f(e_2) = e_2 - e_3}$ $\quad 0, 1, -1$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,-3,2) = -e_1 - 3e_2 + 2e_3$

$\boxed{f(e_3) = -e_1 - 3e_2 + 2e_3}$ $\quad -1, -3, 2$

$\text{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x-z, 2x+y-3z, -y+2z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z} \\ 2x + y - 3z = 0 \quad 2z + 2z - 3z = 0 \quad \boxed{z = 0} \\ -y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2z} \quad \boxed{x = y = 0} \end{cases} \}$

$\text{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ $\quad \text{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\boxed{\dim \text{Ker} f = 0}$

$\mathrm{Im} f = \{ f(x,y,z) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)$

$= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$= x\,e_1 + y\,e_2 + z \cdot e_3$

$\mathrm{Im} f = \{ f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R} \}$

$\mathrm{Im} f = \{ x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R} \}$

$\{ \underbrace{f(e_1)}_{\in \mathrm{Im} f}, \underbrace{f(e_2)}_{\in \mathrm{Im} f}, \underbrace{f(e_3)}_{\in \mathrm{Im} f} \}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$

cad $\{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \} = 3$

$\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker} f$

$= 3 - 0 = 3$

$\{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \}$ est une base de $\mathrm{Im} f$

Exo 3 Fiche de TD 2

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y).$$

1) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^3$ t.q

$$\operatorname{Ker} f = \langle \{a\} \rangle$$

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 6x-4y-4z=0 \\ 5x-3y-4z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y-4z=0 \\ 2y-4z=0 \\ \boxed{x=y} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{y=2z} \\ \\ \boxed{x=2z} \end{array} \right\}$$

$$= \{(2z, 2z, z) / z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z(2,2,1) / z \in \mathbb{R}\}$$

$\operatorname{Ker} f = \langle \{(2,2,1)\} \rangle$

$\operatorname{Ker} f$ est engendré par le vecteur $\boxed{a = (2,2,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}}$

On a alors $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$

2) Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

Calculer $f(b)$ et $f(c)$

- $f(b) = f(e_1+e_2) = f((1,0,0)+(0,1,0)) = f(1,1,0)$
$$= (2,2,0) = 2(1,1,0) = 2(\underbrace{e_1+e_2}_{b}) = 2b$$
$$\boxed{f(b) = 2b}$$

- $f(c) = f(e_2-e_3) = f((0,1,0)-(0,0,1)) = f(0,1,-1)$
$$= (-4+4, -3+4, -1) = (\underbrace{0,1,-1}) = e_2 - e_3 = c$$
$$\boxed{f(c) = c}$$

• En déduire que $\{b, c\}$ forme une base de $\mathrm{Im} f$.

• Tout d'abord remarquons que

$$\mathrm{card}\{b, c\} = 2 = \dim \mathrm{Im} f$$

$$\left(\text{car } \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 3 - 1 = 2 \right)$$

• Ensuite, on a, de la question précédente :

$$b = \frac{1}{2} f(b) \overset{f \text{ lin}}{=} f\left(\frac{1}{2} \cdot b\right) \in \mathrm{Im} f$$

$$c = f(c) \in \mathrm{Im} f.$$

Ainsi pour montrer que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$, il suffit de montrer que $\{b, c\}$ est libre <u>**ou**</u> génératrice de $\mathrm{Im} f$ (car $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{card}\{b, c\}$)

Montrons que $\{b, c\}$ est <u>libre</u> :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha . b + \beta c = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta \overset{?}{=} 0$$

$$b = (1, 1, 0), \quad c = (0, 1, -1)$$

$$\alpha b + \beta . c = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = 0}$$

<u>Ex 4</u> → Voir le Cours