**ENP-MA d'ORAN** **Année Universitaire 2019/2020**

**1ère année des CPST** **Matière: Algèbre 2**

**Fiche de TD n° 2 (Applications linéaires)**

**Exercice 1:** Déterminer si les applications $f_i$ suivantes sont linéaires:

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x, y) = (2x + y, x - y)$

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y) = (xy, x, y)$

$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_3(x, y) = (x^2 + y^2, x^3 + 1)$

$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ f_4(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$

$f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3,\ f_5(x, y) = (P(-1), P(0), P(1))$

**Exercice 2:** Soit $f$ l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \to & (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3) \end{array}$$

et soit $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

**2)** Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.

**3)** Donner une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

**Exercice 3:** Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par: $f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$

**1)** Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul tel que $\ker f = Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.

**2)** Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$

a) Calculer $f(b)$ et $f(c)$.

b) En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

**Exercice 4:** Soit $f$ l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & (-x+y, x-2y+z, 2z-2y) \end{array}$$

**1)** Trouver une base $B$ de $\ker f$ et donner sa dimension.

**2)** Trouver une base $B'$ de $\operatorname{Im} f$ et donner sa dimension.

-$f$ est-elle bijective?

**3)** Montrer que $B'' = B \cup B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

-Que déduire?