Chapitre II
Applications linéaires

<u>Définition.</u> $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ une application de E dans F. On dit que f est une application linéaire (ou un homomorphisme) si :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha . x) = \alpha . f(x)$$

ou encore, $\forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$ et si $E = F$ on le note par $\mathcal{L}(E)$ et on dit que l'application linéaire f <u>de E dans E</u> est un endomorphisme.
- On appelle isomorphisme toute application linéaire bijective.
- On appelle forme linéaire toute application linéaire définie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans $\mathbb{K}$.

<u>Remarque.</u> Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors

$$f(0_E) = 0_F.$$

<u>Exemple (1)</u> L'application nulle $0 : E \to F$, $x \mapsto 0(x) = 0_F$ est linéaire

<u>Exemple (2).</u> Soit f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (2x+y,\ x-y)$$

f est linéaire $\Leftrightarrow \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

On a :

$$f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')$$

$$= \left(2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y'), (\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')\right)$$

$$= (2\alpha x+\alpha y, \alpha x-\alpha y)+(2\beta x'+\beta y', \beta x'-\beta y')$$

$$= \alpha(2x+y, x-y)+\beta(2x'+y', x'-y')$$

$$= \alpha f(x,y)+\beta f(x',y').$$

Exemple 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x^2+y^2, x^2+1)$

On a $f(0,0) = (0,1) \neq (0,0)$ f n'est pas linéaire.

Image et noyau d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- L'image de f est l'ensemble $f(E)$ noté encore $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) / x \in E \} \subset F$$

- Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = 0_F$. On le note $\operatorname{Ker} f$:

$$\operatorname{Ker} f = \{ x \in E / f(x) = 0_F \} \subset E$$

Remarquons que $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\})$.

- $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Rang d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, supposons que $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. On appelle rang de f et on note $rg(f)$, la dimension du s.e.v $\operatorname{Im} f$:

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im} f.$$

Théorème du rang.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimension finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a alors :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Proposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

f est injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

f est surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$

Remarque. On a toujours $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f \subset F$.

Théorème 1) Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et B une base de E. Alors

f est injective $\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une famille libre dans F.

f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une famille génératrice de F

f est bijective $\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une base de F.

2) En dimension finie : Si $\dim E = \dim F$. Alors,

f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

Remarque. (2) est fausse en dimension infinie. En effet,

$$f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$$
$$P \mapsto f(P) = P' \quad , P' \text{ étant la dérivée de } P$$

On a, f est surjective mais n'est pas injective.

<u>Exemple</u> : Exercice 4 de la fiche de TD, soit l'application linéaire.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (-x+y,\ x-2y+z,\ 2z-2y)$

1) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Ker} f$ et donner sa dimension.

2) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\operatorname{Im} f$ et donner sa dimension.

f est-elle bijective ?

3) Montrer que $\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on déduire ?

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -x+y=0 \\ x-2y+z=0 \\ 2z-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y-\cancel{2y}+y=0 \\ y=z \end{cases}\right\}$$

$$= \{(y,y,y) / y \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,1) / y \in \mathbb{R}\} = \langle u(1,1,1) \rangle$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f$ est engendré par $u=(1,1,1)$ qui est non nul et donc libre

$\{u\}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et on a $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

- $\operatorname{Im} f = \{f(x,y,z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$$= \{(-x+y,\ x-2y+z,\ 2z-2y) / x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x\underbrace{(-1,1,0)}_{V} + y\underbrace{(1,-2,-2)}_{W} + z\underbrace{(0,1,2)}_{T} / x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

Remarquons que $V + W = -T$, $\operatorname{Im} f$ est alors engendré par $\{V,W\}$ qui sont linéairement indépendants et donc $\{V,W\}$ forment une base de $\operatorname{Im} f$ et on a $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

f n'est pas bijective car $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

- On a $\{u,v,w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet,

$\operatorname{card}\{u,v,w\} = \dim \mathbb{R}^3$ et $\{u,v,w\}$ est libre.

On déduit que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.