

Courgelo la Fiche de TD 1

Exercice 1 est déjà fait.

Exercice 2: Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

1) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ l'espace vectoriel et $\mathbb{R}^2$ (sur $\mathbb{R}$)

Donc E_1 est-il un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

Il faut vérifier soit les trois conditions ou bien les deux conditions équivalentes.

* $E_1 \neq \emptyset$

* $\forall x, x' \in E_1 : x + x' \in E_1$

* $\forall x \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot x \in E_1$

ou bien :

* $E_1 \neq \emptyset$

* $\forall x, x' \in E_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha x + \beta x' \in E_1$

E_1 effet :

* $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in E_1$ car $0^2 = 0 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$.

* Soient $x = (x, y)$ et $x' = (x', y')$ de E_1 donc $y = x^2$ et $y' = x'^2$

$x + x' = (x + x', y + y') \stackrel{?}{\in} E_1$??

Est-ce qu'on a $y + y' = (x + x')^2$???

Or $y + y' = x^2 + x'^2 \neq (x + x')^2$ (en général)

$\Rightarrow$ il suffit alors de prendre un contre exemple :

$x = (3, 9) \in E_1$ car $9 = 3^2$ et $x' = (2, 4) \in E_1$ car $4 = 2^2$

$x + x' = (3, 9) + (2, 4) = (5, 13)$ mais $13 \neq 5^2$

$\Rightarrow x + x' \notin E_1$

par conséquent E_1 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

12) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq 0\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}$)

* $E_2 \neq \emptyset$??

$0_{\mathbb{R}^3} = (\underline{0}, 0, 0) \in E_2$ car $0 \leq 0 \Rightarrow E_2 \neq \emptyset$.

* Soient $x, x' \in E_2$ donc $x = (x, y, z)$ avec $x \leq 0$ et $x' = (x', y', z')$ avec $x' \leq 0$

$x + x' = (x + x', y + y', z + z')$ si $x \leq 0$ et $x' \leq 0 \Rightarrow x + x' \leq 0$
 $\Rightarrow x + x' \in E_2$

* Soient $x = (x, y, z) \in E_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$x \in E_2 \Leftrightarrow x \leq 0$

si $\alpha x = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ donc si $\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha \cdot x \geq 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot x \notin E_2$

$\Rightarrow$ il suffit de prendre un contre exemple.

$x = (-3, 1, 0) \in E_2$ car $-3 \leq 0$

si $\alpha = -1 \Rightarrow \alpha x = -1 \cdot x = (3, -1, 0) \notin E_2$ car $3 > 0$

par conséquent E_2 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

Remarque importante:

Pour montrer qu'un ensemble n'est pas un s.e.v. il suffit de trouver un contre exemple et ne pas vérifier toutes les conditions !!!

$$13) E_3 = \{ P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P(2) \}. \text{ e.v. de } \mathbb{R}[X] \text{ (sur } \mathbb{R}).$$

* $E_3 \neq \emptyset$?? $0_{\mathbb{R}[X]} \leftarrow$ le polynôme nul. (ses coefficients sont nuls)

$$0_{\mathbb{R}[X]}(0) = 0_{\mathbb{R}[X]}(2) = 0. \Rightarrow 0_{\mathbb{R}[X]} \in E_3 \Rightarrow E_3 \neq \emptyset$$

* Soient $P_1, P_2 \in E_3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha P_1 + \beta P_2 \in E_3$??

$$P_1 \in E_3 \Leftrightarrow P_1(0) = P_1(2) \quad P_2 \in E_3 \Leftrightarrow P_2(0) = P_2(2).$$

$$\Rightarrow \alpha P_1(0) = \alpha P_1(2) \quad (1) \quad \Rightarrow \beta P_2(0) = \beta P_2(2) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \alpha P_1(0) + \beta P_2(0) = \alpha P_1(2) + \beta P_2(2)$$

$$\Rightarrow (\alpha P_1 + \beta P_2)(0) = (\alpha P_1 + \beta P_2)(2)$$

par conséquent E_3 est bien un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$.

$$14) E_a = \{ (n, y, z) \in \mathbb{R}^3 : n+y+z = a \}, a \in \mathbb{R}.$$

1) $E_a \neq \emptyset$? $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E_a$??

$$0+0+0=0 \stackrel{??}{=} a$$

On a deux cas : -) si $a \neq 0$ alors $0+0+0 \neq 0$ contradiction

$\Rightarrow E_a$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

-) si $a=0$ ($E_a = E_0$), alors $0+0+0=0=a \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_a = E_0$

Soient $X, X' \in E_0$ $X = (n, y, z) \in E_0 \Leftrightarrow n+y+z=0$

$X' = (n', y', z') \in E_0 \Leftrightarrow n'+y'+z'=0$

$$X + X' = (n+n', y+y', z+z')$$

$$n+n' + y+y' + z+z' = \underbrace{n+y+z}_{=0} + \underbrace{n'+y'+z'}_{=0} \quad (+ \text{st comm.})$$

$$\Rightarrow X + X' \in E_0.$$

(3)

soient $X \in E_0$ et $d \in \mathbb{R}$ $X \in E_0 = x+y+z=0$

$$dX = (dx, dy, dz)$$

$$dx + dy + dz = d \cdot (x+y+z) = d \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow dX \in E_0 \Rightarrow E_0 \text{ est un s.e.v de } \mathbb{R}^3.$$

par conséquent:

$$\text{Si } d \neq 0 \Rightarrow E_d \text{ n'est pas un s.e.v de } \mathbb{R}^3$$

$$\text{Si } d = 0 \Rightarrow E_d = E_0 \text{ est un s.e.v de } \mathbb{R}^3$$

Exercice 3: Soient $V_1 = (1, 2, -1)$, $V_2 = (1, 3, 0)$ et $V_3 = (1, 3, -1)$
des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrons que V_1, V_2 et V_3 sont linéairement indépendants
(i.e. la famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est libre).

Def $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : (\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0)$

$$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ 2\alpha - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ -\alpha = \gamma \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = 0$

d'où $\{V_1, V_2, V_3\}$ est une famille libre.

b) Montrons que le vecteur $V = (7, 14, -1)$ est une
combinaison linéaire de V_1, V_2 et V_3 .

Il faut montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$

Donc il faut chercher λ_1, λ_2 et λ_3 de sorte que

(I) soit vérifiée.

(4)

$$V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7 & (1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 14 & (2) \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = -1 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Rightarrow \lambda_2 = 7 - 1 = 6 \quad \boxed{\lambda_2 = 6}$$

$$\text{Le système (S) devient } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 1 & (4) \times (-2) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = -4 & (5) \end{cases}$$

$$(4) \times (-2) + (5) \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -6}$$

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_3 = 1 - (-6) = 7. \quad \boxed{\lambda_1 = 7}$$

$$\text{Ainsi } \exists \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6 :$$

$$V = 7V_1 + 6V_2 - 6V_3$$

///

Exercice 4:

-) L'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ peut être considéré comme e.v sur $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$ -e.v)

Comme il peut être considéré comme e.v sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{R}$ -e.v)

$$\text{Soient } u_1 = (1+i, 2i) \quad u_2 = (1, 1+i)$$

montrons que : ~~si~~ $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$ -e.v alors u_1 et u_2 sont liés.

et ~~si~~ $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{R}$ -e.v alors u_1 et u_2 sont libres.

1^{er} Cas: Si $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$ -e.v :

$$u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont liés } (\Leftrightarrow) \exists \alpha \in \underline{\mathbb{C}} \text{ tel que } u_1 = \alpha u_2 \\ (\alpha \neq 0 \text{ car } u_1 \neq 0 \text{ et } u_2 \neq 0)$$

(5)

remarquons d'abord $(1+i)^2 = 2i$

$$\begin{aligned} u_1 &= (1+i, 2i) = (1+i, (1+i)^2) \\ &= (1+i) (1, 1+i) \\ &= (1+i) u_2 \end{aligned}$$

donc $\exists \alpha = (1+i) \in \mathbb{C}$ tel que $u_1 = \alpha u_2$
ou bien $u_1 - (1+i) u_2 = 0$
i.e., u_1 et u_2 sont bien liés.

1^{er} cas: Si $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

u_1 et u_2 sont libres $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{C}^2} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{C}^2} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1+i) + \beta = 0 \\ 2i\alpha + \beta(1+i) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + \beta) + \alpha i = 0 \\ \beta + (2\alpha + \beta) i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$\Rightarrow u_1$ et u_2 sont linéairement indépendants.

#

Exercice I) Soient E un K -e.v. et v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs linéairement indépendants.

la question: v_1 et v_2 sont-ils aussi linéairement indépendants?

$\{v_1, v_2, v_3\}$ libre $\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ est libre.

Supposons que $\{v_1, v_2\}$ est liée, il existe alors $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ (α, β ne sont pas nuls à la fois). tel que: $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_E$.

Supposons que $\alpha \neq 0$ donc $v_1 = -\frac{\beta}{\alpha} v_2$ (1)

puisque $v_1 \neq 0_E, v_2 \neq 0_E$ et $v_3 \neq 0_E \Rightarrow -\frac{\beta}{\alpha} \neq 0$

et Comme v_1, v_2 et v_3 sont libres plus:

$\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in K: \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 = 0_E \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0_E$.

mais (1) $\Rightarrow v_1 + \frac{\beta}{\alpha} v_2 = 0_E$

$$\Rightarrow v_1 + \frac{\beta}{\alpha} v_2 + 0 v_3 = 0_E$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille liée
contradiction.

Ainsi $\{v_1, v_2\}$ est libre.

II)

$E = \mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants:

$v_1 = (1, 2, 3)$ $v_2 = (3, 6, 12)$ $v_3 = (1, 3, 7)$ et $v_a = (1, 2, a)$ $a \in \mathbb{R}$.

a) Soit F_a le s.e.v engendré par $\{v_1, v_2, v_3, v_a\}$.

Déterminons $\dim F_a$.

On a: F_a est un s.e.v de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim F_a \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$

Donc $\{v_1, v_2, v_3, v_a\}$ est une famille liée.

en effet: montrons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$v_a = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

(II)

(7)

$$\textcircled{II} \quad \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha + 6\beta + 3\gamma = 2 \\ 3\alpha + 12\beta + 7\gamma = a \end{cases} \quad (\text{on utilise n'importe quelle méthode})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 1 \\ 2(\alpha + 3\beta + \gamma) + \gamma = 2 \\ 3(\alpha + 3\beta + \gamma) + 3\beta + 4\gamma = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 1 \\ 2 + \gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 0 \\ 3 + 3\beta + 4\gamma = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ \beta = \frac{a-3}{3} \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 - a \\ \beta = \frac{a-3}{3} \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi v_0 est une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2 et v_3 . (v_0 s'écrit en fct de v_1, v_2 et v_3).

Reste à vérifier si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre.
i.e., $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\textcircled{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 12\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2(\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_3 = 0 \\ 3(\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

A donc $F_a = S(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\})$ et

$\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre donc elle forme une base de F_a .

$\textcircled{8}$

$\Rightarrow \dim F_a = \text{Card}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$

b) Soit $G = \text{Vect}(\{v_1, v_2\}) = S(\{v_1, v_2\})$

- Déterminons explicitement G , ceci revient à trouver une équation (ou des équations) liant les coordonnées d'un vecteur de G .

En effet: $G = \{v \in \mathbb{R}^3 : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / v = \alpha v_1 + \beta v_2\}$
 $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 2\alpha + 3\beta = y \\ 3\alpha + 7\beta = z \end{cases} \quad (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 2(\alpha + \beta) + \beta = y \\ 3(\alpha + \beta) + 4\beta = z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - \beta \\ 2x + \beta = y \\ 3x + 4\beta = z \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$(4 \times (2)) - (3) \Rightarrow 5x = 4y - z \Leftrightarrow z = 4y - 5x$$

$$(2) \Rightarrow \beta = y - 2x \leadsto (1) \Rightarrow \alpha = x - y + 2x = 3x - y$$

on remplace α et β dans (Δ) $3(3x - y) + 7(y - 2x) = 9x - 3y + 7y - 14x = -5x + 4y = z$

Ainsi $\exists \alpha = 3x - y, \exists \beta = y - 2x / 3\alpha + 7\beta = z \Leftrightarrow \boxed{z = 4y - 5x}$

par conséquent

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4y - 5x\}$$



Exercice 10: Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble F :

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + y \}.$$

1) Montrons que F est s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

* $F \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ ($0 = 2(0) + 0$).

* Soient $x, x' \in F$, $x + x' \in F$?

$$x = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow z = 2x + y.$$

$$x' = (x', y', z') \in F \Leftrightarrow z' = 2x' + y' \Rightarrow z + z' = 2(x + x') + y + y' \\ \Rightarrow x + x' \in F.$$

* Soient $x \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot x \in F$? $\alpha x = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

$$x = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow z = 2x + y.$$

$$\Rightarrow \alpha z = 2(\alpha x) + \alpha y.$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot x \in F.$$

Ainsi F est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminons une base de F et calculons $\dim F$.

Cela revient à trouver une famille génératrice^{def} et lib.
en effet,

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + y \}$$

$$= \{ (x, y, 2x + y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

$$= \{ (x, 0, 2x) + (0, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x \underbrace{(1, 0, 2)}_{v_1} + y \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_2} \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$v_1 = (1, 0, 2) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \quad v_2 = (0, 1, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$F \text{ est engendré par } v_1 \text{ et } v_2. \quad F = S(\{v_1, v_2\}).$$

i.e., $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de F .

Reste à vérifier si $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre.

en effet: Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

par conséquent $B_1 = \{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice et est libre, donc elle forme une base de F .

$$\Rightarrow \dim F = \text{Card} \{v_1, v_2\} = 2.$$

3) soit $G = \text{Vect}(\{u_1, u_2\}) = S(\{u_1, u_2\})$

où $u_1 = (2, 1, -1)$ et $u_2 = (6, 3, -3)$.

a) dim $G = ?$

On remarque que $u_2 = 2u_1 \Rightarrow u_1$ et u_2 sont liés

$\Rightarrow G = \text{Vect}(\{u_1\})$ ou bien $G = \text{Vect}(\{u_2\})$

et comme $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ ($u_2 \neq 0$) alors $B_2 = \{u_1\}$ est une base de G car u_1 est libre.

Par conséquent $\{u_1\}$ est une base de $G \Rightarrow \dim G = \text{Card} \{u_1\} \Rightarrow \dim G = 1$

b) Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

On a deux méthodes:

1^{ère} méthode (Simple).

Puisque $B_1 = \{v_1, v_2\}$ est une base de F et $B_2 = \{u_1\}$ est une base de G , alors il suffit de montrer que $B = B_1 \cup B_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$. et comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{Card}(B = \{v_1, v_2, u_1\})$ alors on montre que B est soit libre soit génératrice

$\textcircled{11}$

montrer que B est libre.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma u_1}_{\text{①}} = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\text{①} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = -\gamma \\ -4\gamma - \gamma - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \uparrow$$

$\Rightarrow$ B est une famille libre.

2^{ème} méthode: (assez longue).

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim F + \dim G = 2 + 1.$$

il reste à vérifier $F \cap G = \{0\}$.

Il est évident que $\{0\} \subset F \cap G$.

reste à montrer que $F \cap G \subset \{0\}_{\mathbb{R}^3}$

soit $v \in F \cap G \Leftrightarrow v \in F \wedge v \in G$

$$v = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow z = 2x + y. \quad \boxed{1}$$

$$v \in G = S(\{u_1\}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad v = \alpha u_1$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \wedge z = -\alpha \end{cases}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y \text{ et } z = -y\}$$

Ainsi si $v \in F \cap G \Rightarrow (x, y, z)$ vérifie $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ à la fois

$$\text{i.e.} \quad \begin{cases} z = 2x + y \\ x = 2y \wedge z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Ainsi $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

(12)

#

Exercice 7: Soit dans $\mathbb{R}^4$ l'ensemble suivant:

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + y + 2z - t = 0 \wedge y = -2x\}$$

1) Montrer que H est l.e.v de $\mathbb{R}^4$.

* $0_{\mathbb{R}^4} \in H$ Car $3 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 - 0 = 0$ et $0 = -2 \cdot 0$.

* Soient $x, x' \in H$ $x = (x, y, z, t)$ $x' = (x', y', z', t')$ $x + x' \in H$?

donc $3x + y + 2z - t = 0 \wedge y = -2x$.

et $3x' + y' + 2z' - t' = 0 \wedge y' = -2x'$

$$x + x' = (x + x', y + y', z + z', t + t')$$

$$\begin{aligned} & 3(x + x') + (y + y') + 2(z + z') - (t + t') \\ &= 3x + y + 2z - t + 3x' + y' + 2z' - t' \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

et

$$y + y' = -2x - 2x' = -2(x + x')$$

Ainsi $x + x' \in H$.

* Soit $x = (x, y, z, t) \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot x \in H$?

$$\alpha \cdot x = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t)$$

$$3(\alpha x) + (\alpha y) + 2(\alpha z) - (\alpha t) = \alpha (3x + y + 2z - t) = \alpha \cdot 0 = 0$$

et $\alpha y = \alpha(-2x) = -2(\alpha x)$

$$\Rightarrow \alpha \cdot x \in H$$

d'où H est bien un l.e.v de $\mathbb{R}^4$.

2) Une base de H ?

$$H = \{(x, y, z, t) / 3x + y + 2z - t = 0 \wedge y = -2x\}$$

$$= \{(x, -2x, z, 3x - 2x + 2z) / x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, -2x, z, x + 2z) / x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, -2x, 0, x) + (0, 0, z, 2z) / x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{donc } H = \left\{ x \underbrace{(1, -2, 0, 1)}_{u_1} + z \underbrace{(0, 0, 1, 2)}_{u_2} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$H = \{ x u_1 + z u_2 \mid x, z \in \mathbb{R} \}$$

avec $u_1 = (1, -2, 0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ et $u_2 = (0, 0, 1, 2) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$.

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de H .

verifions si $\{u_1, u_2\}$ est une famille libre.

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Ainsi $\{u_1, u_2\}$ est une base de H .

$$\Rightarrow \dim H = \text{Card} \{u_1, u_2\} = 2$$

3) cherchons un p.e.v. supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Puisque $H \leq \mathbb{R}^4$, d'après le théorème Hasse il admet un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$, on le note K .

$$\text{i.e., } \mathbb{R}^4 = H \oplus K \text{ et comme } \dim \mathbb{R}^4 = 4 \text{ et } \dim H = 2$$

$$\Rightarrow \dim K = 4 - 2 = 2$$

d'après la question précédente, on a trouvé une base

$B = \{u_1, u_2\}$ de H , alors d'après le théorème de la base incomplète, $\exists B'$ une base de K tel que $B \cup B'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$B' = \{e_3, e_4\} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On choisit des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de sorte que $B \cup B' = \{u_1, u_2, e_3, e_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. Reste à montrer que $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$ est une famille libre (facile). Ainsi $K = \text{Vect}(\{e_3, e_4\})$

II. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le s.e.v. E :

$$E = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0 \}.$$

- Déterminons une base de E et déduire $\dim E$.

On rappelle que : $\mathbb{R}_2[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq 2 \}$

soit $P \in E$, $P(1) = 0 \Rightarrow 1$ est une racine de P .

d'autre part, $P \in \mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b.$$

donc on peut écrire $P(x) = ax^2 + bx - a - b$.

$$= a(x^2 - 1) + b(x - 1).$$

$\Rightarrow$ les deux polynômes $(x^2 - 1)$ et $(x - 1)$ engendrent E .

$$E = \text{Vect}(\{x^2 - 1, x - 1\}).$$

or, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ donc $x^2 - 1$ et $x - 1$ ne sont pas liés ($\nexists \alpha \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = \alpha(x - 1)$)

Ainsi $\{x^2 - 1, x - 1\}$ est une famille génératrice de E et elle est libre donc elle forme une base de E $\Rightarrow \dim E = \text{Card} \{x^2 - 1, x - 1\} = 2$

#

Fin!