ENPO-MA **Année Universitaire 2019/2020**

1ère année des CPST **Matière: Algèbre 2**

Fiche de TD n° 1 (Espaces Vectoriels)

Exercice1: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. On note 0_E l'élément neutre de $(E,+)$ et $0_{\mathbb{k}}$ le nombre zéro dans $\mathbb{k}$. Montrer que, pour tout $x \in E$:
1) $x + x = 2 \cdot x$
2) $0_{\mathbb{k}} \cdot x = 0_E$
3) $(-1) \cdot x = -x$

Exercice 2: Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels:
$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$.
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \leqslant 0\}$.
$E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(o) = P(2)\}$.
$E_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3: Soient $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (1,3,0)$ et $v_3 = (1,3,-1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
a) Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sont linéairement indépendants.
b) Montrer que le vecteur $v = (7,14,-1)$ est une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.

Exercice 4: Montrer que les vecteurs $(1+i, 2i)$ et $(1, 1+i)$ sont linéairement *dépendants* sur $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, mais ils sont linéairement *indépendants* sur $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5: **I.** Soient E un $\mathbb{k}-ev$ et v_1, v_2, v_3 des vecteurs linéairement indépendants dans E.
_ v_1 et v_2 sont-ils linéairement indépendants? justifiez.
II. Pour $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs suivants:

$$v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,6,12), v_3 = (1,3,7) \text{ et } v_a = (1,2,a), a \in \mathbb{R} \text{ (un paramètre)}$$

a) Soit F_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{v_1, v_2, v_3, v_a\}$.
_ Déterminer $\dim F_a$.
b) Soit G le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_3.
_ Déterminer explicitement G, c'est-à-dire écrire une équation liant les composantes d'un vecteur de G.

Exercice 6: Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble F défini par:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ z = 2x + y\right\}$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.
3) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $\{u_1 = (2,1,-1),\ u_2 = (6,3,-3)\}$.

a) Quelle est la dimension de G ($\dim G$).
b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

<u>**Exercice 7:**</u> **I.** Soit dans $\mathbb{R}^4$ l'ensemble suivant:

$$H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ 3x + y + 2z - t = 0 \text{ et } y = -2x\right\}$$

1) Montrer que H est un s-ev de $\mathbb{R}^4$.
2) Donner une base de H et en déduire sa dimension.
3) Donner un s-ev supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.
II. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le sous-espace vectoriel E défini comme suit:

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ P(1) = 0\}$$

_Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.