Chapitre 1 - Algèbre 2
Espaces Vectoriels

1) Espace Vectoriel.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif. Dans la plupart des cas, ce sera le corps des réels $\mathbb{R}$ ou complexe $\mathbb{C}$.

Définition.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) est un ensemble non vide E muni :

- d'une loi de composition interne, c'est à dire d'une application :

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longrightarrow u+v \end{aligned}$$

- d'une loi de composition externe, c'est à dire d'une application :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, u) &\longrightarrow \alpha . u \end{aligned}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

a) $(E, +)$ est un groupe Abélien

b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$;

i) $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$

ii) $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$

iii) $(\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u)$

iv) $1_{\mathbb{K}}.u = u$ où $1_{\mathbb{K}}$ désigne l'élément neutre de $\mathbb{K}$ pour la deuxième loi interne.

- On note le $\mathbb{K}$-espace vectoriel par $(E, +, .)$.
- les éléments de E sont appelés vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Exemple 1. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$. Un élément $u \in \mathbb{R}^n$ est donc un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.

- Définissons la loi interne sur $\mathbb{R}^n$:

$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et la loi externe :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha . (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Alors $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'élément neutre de la loi interne est $(0, 0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Le symétrique de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$, que l'on note : $-(x_1, \dots, x_n)$.

De façon plus générale, le produit cartésien de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Considérons la loi interne définie par : $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et la loi externe définie par : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\alpha . (x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0).$$

Alors $(\mathbb{R}^2, +, .)$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors : $1 . (x_1, x_2) = (1 . x_1, 0) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$.

<u>Exemple 3.</u> L'espace vectoriel des fonctions réelles.

L'ensemble des fonctions réelles est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Nous le munirons d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de la manière suivante :

- Loi interne. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $f+g$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- Loi externe. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $\alpha.f$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad (\alpha.f)(x) = \alpha(f(x))$

$(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$ est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'élément neutre pour la loi interne est la fonction nulle, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) = 0,$$

qu'on notera $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Le symétrique de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'application g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ g(x) = -f(x),$$

qui est notée $-f$.

<u>Exemple 4.</u> L'espace vectoriel des suites réelles.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, i.e $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \mathcal{S}$. Considérons

- La loi interne définie par :

$$\forall \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} : \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- La loi externe définie par :

$$\forall \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \alpha.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Alors $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'élément neutre de la loi interne est la suite nulle. Le symétrique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5. L'espace vectoriel des polynômes.

L'ensemble des polynôme $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ muni de l'addition de deux polynômes et la multiplication par un scalaire, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Règles de calcul.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $u \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors on a :

$$\begin{cases} 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E \\ \alpha \cdot 0_E = 0_E \\ (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u = -u = 1_{\mathbb{K}} \cdot (-u) \\ (\alpha \cdot u = 0_E) \Longleftrightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{K}} \vee u = 0_E) \end{cases}$$

Preuve (Exercice) : les démonstrations des règles de calcul sont des manipulations sur les axiomes définissant les espaces vectoriels.

2). Sous-espace vectoriel.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$
- $\forall u, v \in F : \quad u + v \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F : \quad \alpha . u \in F$

ou encore : $\begin{cases} \cdot \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F : \ \alpha u + \beta v \in F \\ \cdot \ 0_E \in F \end{cases}$

Remarques.

- Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Exemple 1. L'ensemble

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

En effet, • $(0,0) \in F$ (car $0+0=0$)

• $\forall u,v \in F : u+v \overset{?}{\in} F$;

$u \in F$: $u=(x,y)$ / $x+y=0$

$v \in F$: $v=(x',y')$ / $x'+y'=0$

$u+v = (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$ et on a :

$(x+x') + (y+y) = (x+y)+(x'+y') = 0+0=0$

donc $u+v \in F$

• $\forall u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha u \overset{?}{\in} F$

$\alpha . u = \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$

$u \in F$ donc $x+y=0$. On a alors

$\alpha x + \alpha y = \alpha(x+y) = \alpha . 0 = 0$, ainsi $\alpha u \in F$.

Exemple 2. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet, la fonction nulle est continue, la somme de deux fonctions continues est continue, la multiplication d'un scalaire par une fonction continue est une fonction continue.

Quelques propriétés.

- L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel, est un sous-espace vectoriel de cet espace vectoriel.

Preuve (Exercice).

- La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel, n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.

Exemple: $E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$, $E_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$,

E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, cependant $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. En effet, on a

$$u = (0,1) \in E_1 \subset E_1 \cup E_2 \quad \text{mais} \quad u + v = (1,1) \notin E_1 \cup E_2.$$
$$v = (1,0) \in E_2 \subset E_1 \cup E_2$$

- Somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de cet espace vectoriel: Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2, notée $E_1 + E_2$, par:

$$E_1 + E_2 = \{ u_1 + u_2 \,/\, u_1 \in E_1, u_2 \in E_2 \}.$$

qui est un sous-espace vectoriel de E.

En particulier, si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Alors: $F + F = F$.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme directe de E_1 et E_2 et on note $E_1 \oplus E_2$, le sous-espace vectoriel $E_1 + E_2$ tel que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

- Si de plus, on a $E = E_1 \oplus E_2$, on dira que les deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

Exemple. $E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $E_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. Alors E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$, i.e:

$$\mathbb{R}^2 = (\{0\} \times \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

En effet, on doit montrer que :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 = \underbrace{(\{0\} \times \mathbb{R})}_{E_1} + \underbrace{(\mathbb{R} \times \{0\})}_{E_2} \\ \text{et} \\ \underbrace{(\{0\} \times \mathbb{R})}_{E_1} \cap \underbrace{(\mathbb{R} \times \{0\})}_{E_2} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 \subset E_1 + E_2$ $\wedge$ $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^2$ évident

$E_1 \cap E_2 \subset \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ $\wedge$ $\{0_{\mathbb{R}^2}\} \subset E_1 \cap E_2$ évident.

Il suffit donc de montrer que

$$\boxed{\mathbb{R}^2 \subset E_1 + E_2} \quad \text{et} \quad \boxed{E_1 \cap E_2 \subset \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$$

Soit alors $u \in \mathbb{R}^2$, il existe $x_1 \in E_1$, il existe $x_2 \in E_2$ t.q

$$u = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = \underbrace{(0, y)}_{\in \{0\} \times \mathbb{R}} + \underbrace{(x, 0)}_{\in \mathbb{R} \times \{0\}} \in E_1 + E_2$$

Reste à montrer que $E_1 \cap E_2 \subset \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, i.e

$$\forall\, u \in E_1 \cap E_2 : u \overset{?}{=} 0_{\mathbb{R}^2}.$$

soit $u \in E_1 \cap E_2$ $\begin{cases} u \in E_1 \Rightarrow u = (0, y) \,/\, y \in \mathbb{R} \\ \wedge \\ u \in E_2 \Rightarrow u = (x, 0) \,/\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$u = (0, y) = (x, 0) \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow u = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Caractérisation de la somme directe :

Théorème. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E.

$$E = E_1 \oplus E_2 \iff \forall x \in E,\ \exists! x_1 \in E_1,\ \exists! x_2 \in E_2 :\ x = x_1 + x_2.$$

Combinaisons linéaires.

Soient $u_1, \dots, u_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme :

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$. Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

- On note par $C\{u_1, \dots, u_n\}$ (ou $\mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ ou $\langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$ ou $\overline{\{u_1, \dots, u_n\}}$) l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\{u_1, \dots, u_n\}$, i.e

$$C\{u_1, \dots, u_n\} = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \ /\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\},$$

- $C\{u_1, \dots, u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E, contenant $\{u_1, \dots, u_n\}$.
- $C\{u_1, \dots, u_n\}$ est appelé le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Exemple. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(0,1,7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(2,1,5)$ et $(-1,0,1)$.

En effet : on doit trouver deux scalaires α, β tels que

$$(0,1,7) = \alpha(2,1,5) + \beta(-1,0,1) \quad \text{i.e}$$

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha - \beta \\ 1 = \alpha \\ 7 = 5\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \\ 7 = 5(1) + 2 \end{cases}$$

$$(0,1,7) = (2,1,5) + 2(-1,0,1)$$

Indépendance linéaire - Famille libre.

Définition - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E. La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est dite libre si :

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$$

- On dit également que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants.
- Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ n'est pas une famille libre, on dira que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une famille liée, ou que les vecteurs $\{u_1, \ldots, u_n\}$ sont linéairement dépendants, i.e :

$$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E \ \wedge \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ non tous nuls.}$$

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}^n$, les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \quad \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n \overset{?}{=} 0$$

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \alpha_1 (1,0,\dots,0) + \alpha_2 (0,1,\dots,0) + \dots + \alpha_n (0,\dots,0,1) = (0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$$

<u>Exemple 2.</u> Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions suivantes sont linéairement indépendantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos x.$$

En effet, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.q $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R} : \quad (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3)(x) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \alpha_1 x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0$$

En particulier,

pour $x = 0$: $\alpha_3 = 0$

pour $x = \frac{\pi}{2}$: $\alpha_1 \frac{\pi}{2} + \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

pour $x = \pi$: $\alpha_1 \pi - \alpha_3 = 0$

<u>Exemple 3.</u> Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants :

$$u_1 = (3, 3, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 1, 1)$$

sont linéairement indépendants. En effet,

soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On a alors : $\alpha_1(3,3,1)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,1,1)=(0,0,0)$,

d'où, $\begin{cases} 3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \Rightarrow \boxed{\alpha_3=-\alpha_1} \end{cases}$

$3\alpha_1-2\alpha_1+(-\alpha_1)=0=0.$

$\Uparrow$

$\boxed{\alpha_2=-2\alpha_1}$

$\Uparrow$

On a alors $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1u_1+(-2\alpha_1)u_2+(-\alpha_1)u_3=0_{\mathbb{R}^3}$

Ainsi donc, $\alpha_1[u_1-2u_2-u_3]=0_{\mathbb{R}^3}$, il suffit de prendre $\alpha_1\neq 0$ et on aura : $\boxed{u_1-2u_2-u_3=0_{\mathbb{R}^3}}$ i.e combinaison linéaire nulle, des vecteurs u_1,u_2,u_3 sans que les $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ soient tous nuls. On a alors

$$u_1=2u_2+u_3.$$

<u>Remarque</u>. Si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ est une famille liée des vecteurs de E. Alors, un de ces vecteurs va s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

<u>Famille génératrice.</u>

<u>Définition</u>. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{u_1,\ldots,u_n\}$ une famille de n vecteurs de E. La famille $\{u_1,\ldots,u_n\}$ est dite génératrice de E si :

$$\forall u\in E : \quad \exists\, \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K} \;/\; u=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n.$$

On dit également que la famille $\{u_1,\ldots,u_n\}$ engendre l'espace vectoriel de E, ou E est engendré par $\{u_1,\ldots,u_n\}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^n$, les vecteurs :

$$e_1=(1,0,\ldots,0),\ e_2=(0,1,0\ldots,0),\ \ldots,\ e_n=(0,0\ldots,0,1)$$

engendrent $\mathbb{R}^n$. En effet,

$\forall u \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R} \,/\, u=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. On a alors

$$u=(\alpha_1,0,\ldots,0)+(0,\alpha_2,0\ldots,0)+\ldots+(0,\ldots,0,\alpha_n)$$

$$u=\alpha_1(1,0\ldots,0)+\alpha_2(0,1,\ldots 0)+\alpha_n(0\ldots 0,1)$$

$$u=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_n e_n$$

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il est engendré par une famille finie de vecteurs de E, sinon on dira que E est de dimension infinie.

Définition Base d'un espace vectoriel.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle base de E, toute famille de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice de E.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^n$, les vecteurs

$$e_1=(1,0\ldots,0),\ e_2=(0,1,0\ldots,0),\ \ldots,\ e_n=(0,\ldots,0,1)$$

forment une base de $\mathbb{R}^n$. $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Coordonnées d'un vecteur suivant une base.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base de E et soit u un vecteur de E. Il existe alors des scalaires uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

Ces scalaires sont appelés coordonnées de u suivant la base $\mathcal{B}$.

Dimension d'un espace vectoriel.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (i.e engendré par une famille finie de vecteurs de E). On appelle dimension de E sur $\mathbb{K}$ et on note $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$, le nombre de vecteurs d'une base quelconque de E.

Convention. $\dim\{0_E\} = 0$.

Exemple. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = \text{card}\{e_1, \dots, e_n\} = n$.

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension n, et soit $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs de E ($\text{card}\, \mathcal{B} = n$). Alors

$\mathcal{B}$ est une base de $\iff$ $\mathcal{B}$ est une famille libre ou génératrice de E

On a la proposition suivante :

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a,

1) $F \subset G \implies \dim F \leq \dim G$

2) $F = G \underset{\not\Leftarrow}{\implies} \dim F = \dim G$

3) $(\dim F = \dim G) \wedge (F \subset G \vee G \subset F) \implies F = G$

4) $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$