

## CHAPITRE 2 La conduction

### 2.1 Conductivité thermique

La conductivité thermique,  $k$ , est une propriété spécifique d'un matériau conducteur. Elle indique la quantité de chaleur qui va s'écouler à travers une unité de surface quand le gradient de température est égal à l'unité. D'après l'équation de Fourier (équation 1.1), il est clair que pour un écoulement stationnaire le gradient de température est constant lorsque  $k$  est constant. Le profil de température à travers la paroi est donc linéaire. (figure 2.1). Cependant si la différence de température à travers la section est importante alors il sera nécessaire de considérer que  $k$  varie avec la température.

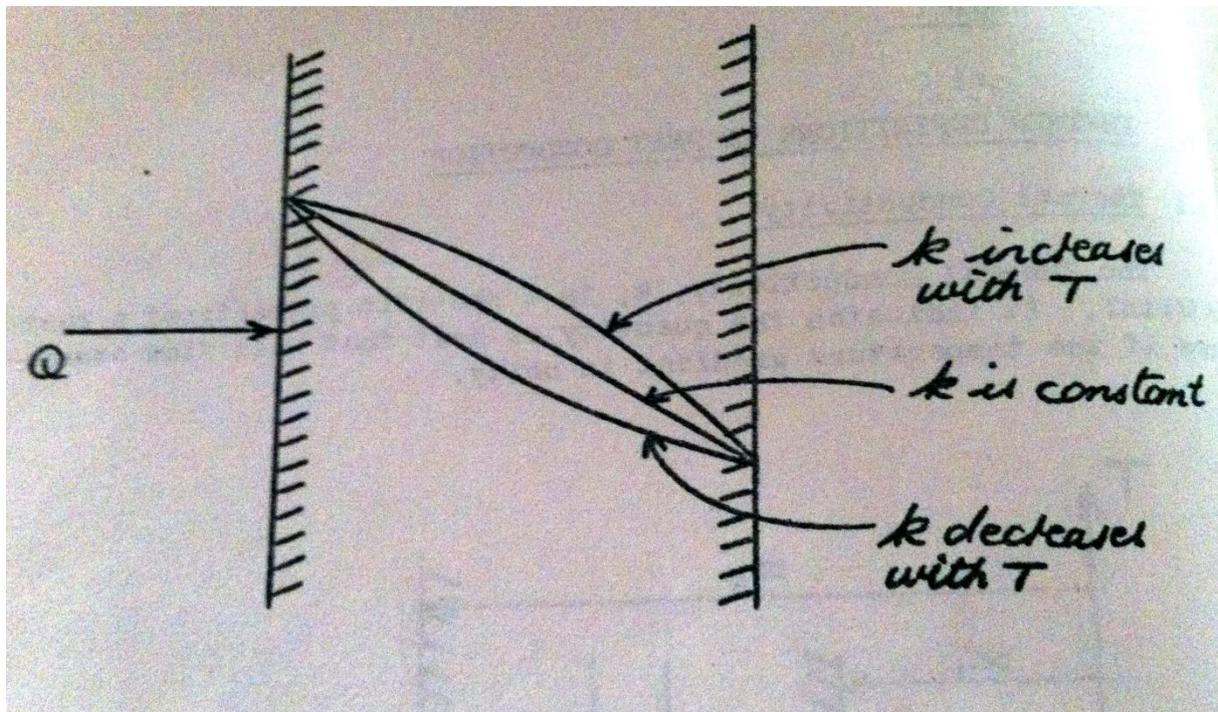


Figure 2.1- Profiles de températures typiques

#### 2.1.1 Variation de la conductivité thermique avec la température

La plupart des conductivités thermiques des matériaux varient avec la température. Cependant ces variations sont ignorées à cause de la complexité analytique. Pour de grandes différences de température  $k$  peut être exprimée selon une fonction polynomiale de la température.

$$k_T = k_0(1 \pm aT \pm aT^2 \dots) \quad (2.0a)$$

Où :  $k_0$  est la conductivité thermique à la température  $T_0$

Une valeur moyenne de  $k$  peut être calculée mais sur un gamme de températures  $T_1$  à  $T_2$  et à

l'aide de l'équation 2.0, on obtient :

$$\bar{k} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k_T \cdot dT \quad (2.0b)$$

<u>Material</u>	<u>Thermal Conductivity, k (kW/mK)</u>
<u>Metals</u>	
Silver	.407
Copper	.386
Aluminium	.204
Magnesium	.171
Zinc	.112
Iron	.0727
Chrome Steel, 10%	.0312
Nickel Steel, 50%	.0138
<u>Non-Metals</u>	
Marble	.00277
Concrete	.000814
Glass	.000762
Bricks	.000692
Oak Wood	.000166
Pine Wood	.000147
Asbestos	.000151
Polystyrene	.000037
Glass Fibre	.000033
<u>Liquids</u>	
Mercury	.00869
Water	.000597
Engine Oil	.000145
Freon	.0000727
<u>Gases</u>	
Hydrogen	.00018
Air	.000026
Oxygen	.000026
Nitrogen	.000026
Carbon Dioxide	.0000162

Tableau 2.1-Valeurs de k pour différentes substances

### 2.1.2 Autres facteurs influençant la variation de la conductivité thermique

La valeur numérique de  $k$  varie en fonction de la composition chimique, de la structure physique et l'état de la substance en question.

### 2.1.3 Mesures de la conductivité thermique

Une variété de méthodes existe pour la mesure de la conductivité thermique. La plupart de ces méthodes sont basées sur l'observation du gradient de température à travers une surface donnée et un débit de chaleur connue.

## 2.2 Ecoulement de chaleur unidimensionnel en régime stationnaire.

### 2.2.1 Paroi plane

Pour le cas simple de l'écoulement de chaleur à travers une paroi plane en régime stationnaire, le gradient de température et le flux de chaleur restent invariables dans le temps, et la section transversale le long du flux de chaleur reste constante. Les variables de l'éq 1.1 se séparent et il en résulte l'équation

$$\frac{q_k}{A} \int_0^L dx = - \int_{T_{chaud}}^{T_{froid}} K. dT \quad (2.1)$$

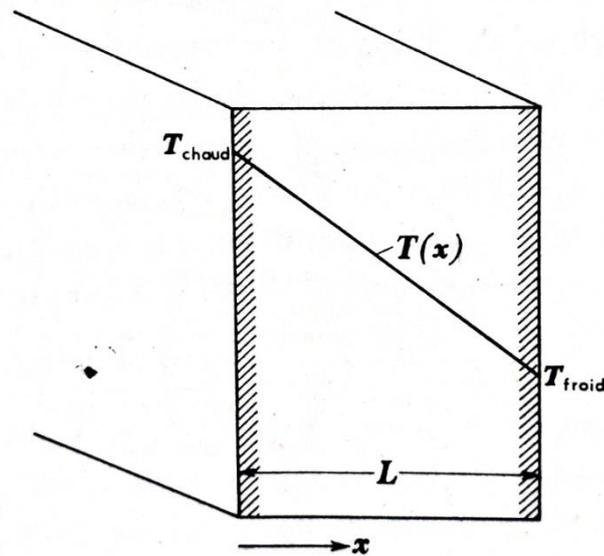


Figure 2.2- Temperature distribution for steady state conduction through a plane wall

Les limites d'intégration peuvent être déterminées d'après la fig. 2.2 où la face gauche ( $x=0$ ) est maintenue à température uniforme  $T_{chaud}$  et la face droite ( $x=L$ ) à la température uniforme  $T_{froid}$ . Donc

$$q_k = \frac{AK}{L}(T_{chaud} - T_{froid}) = \frac{\Delta T}{L/AK} \quad (2.2)$$

$L/Ak$  est la résistance thermique  $R_k$  que le mouvement oppose à l'écoulement de la chaleur

$$R_k = \frac{L}{AK} \quad (2.3)$$

L'inverse de la résistance thermique est la conductance thermique

$$K_k = \frac{AK}{L} \quad (2.4)$$

### EXEMPLE 2.1

Les surfaces intérieures des murs d'un grand immeuble doivent être maintenues à  $22^\circ\text{C}$ , alors que la température de la surface extérieure est  $-23^\circ\text{C}$ . L'épaisseur des murs est de 254 mm et sont faits d'un matériau en briques ayant une conductivité thermique égale à  $0.5 \text{ kcal/h.m } ^\circ\text{C}$ . Calculer les pertes de chaleur par mètre carré de surface du mur et par heure.

SOLUTION. – l'équation 2.2 s'applique si on néglige l'effet des angles et celui des joints de la maçonnerie. En remplaçant la conductivité thermique et les grandeurs appropriées par leurs unités correspondantes, on obtient

$$\frac{q}{A} = \frac{(0.5)[22 - (-23)]}{0.254} = 88.5 \text{ kcal/h.m}^2$$

Ainsi 88.5 kcal serait perdu de l'immeuble par heure à travers chaque mètre carré de surface.

### 2.2.2 Cylindres creux

Le flux de chaleur radial transmis par conduction à travers un cylindre circulaire est un autre problème unidimensionnel d'une importance pratique considérable. La conduction à travers les tubes est à travers les calorifuges des tubes en sont des exemples types.

Si le cylindre est homogène et suffisamment long de sorte que les effets des extrémités peuvent être négligés, et si la température de la surface intérieure est une constante égale à  $T_i$ , tandis que la surface extérieure est maintenue à la température uniforme  $T_o$ , le flux de chaleur transmis par conduction est, d'après l'équation 1.1

$$q_K = -KA \frac{dT}{dr}$$

Où  $\frac{dT}{dr}$  est le gradient de température dans la direction radiale

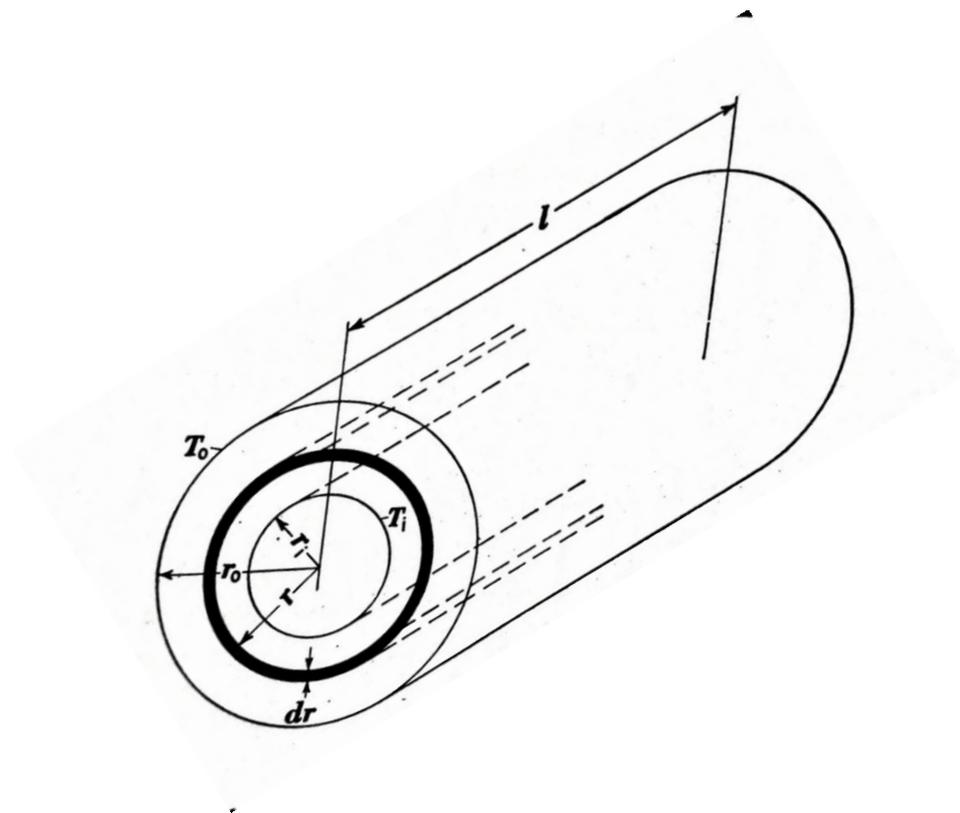


Figure 2.3- Schéma indiquant les notations pour la conduction à travers un cylindre creux.

Pour le cylindre creux (fig. 2.3) l'aire et une fonction du rayon et  $A = 2\pi r\ell$

$$q_k = -K2\pi r\ell \frac{dT}{dr} \quad (2.5)$$

$$\text{Donc } T_i - T_0 = \frac{q_k}{K2\pi\ell} \ln \frac{r_0}{r_i} \quad (2.6)$$

La résolution de l'éq (2.5) par rapport à  $q_k$  conduit à

$$q_k = \frac{T_i - T_0}{\frac{\ln(r_0/r_i)}{2\pi K\ell}} \quad (2.7)$$

La résistance thermique du cylindre creux est

$$R_K = \frac{\ln(r_0/r_i)}{2\pi k\ell} \quad (2.8)$$

La répartition des températures est obtenue en intégrant l'éq 2.5 d'une part entre le rayon  $r_i$  (intérieure) et un rayon arbitraire  $r$  et d'autre part entre les températures correspondantes  $T_i$  et  $T(r)$  ou

$$\int_{r_i}^r \frac{q_k}{k(2\pi\ell)} \cdot \frac{dr}{r} = - \int_{T_i}^{T(r)} dT$$

Ce qui donne

$$T(r) = T_i - \frac{T_i - T_0}{\ln(r_0/r_i)} \ln \frac{r}{r_i}$$

Donc la température dans un cylindre est une fonction logarithmique du rayon  $r$ , alors que pour un mur plan la répartition de températures est linéaire

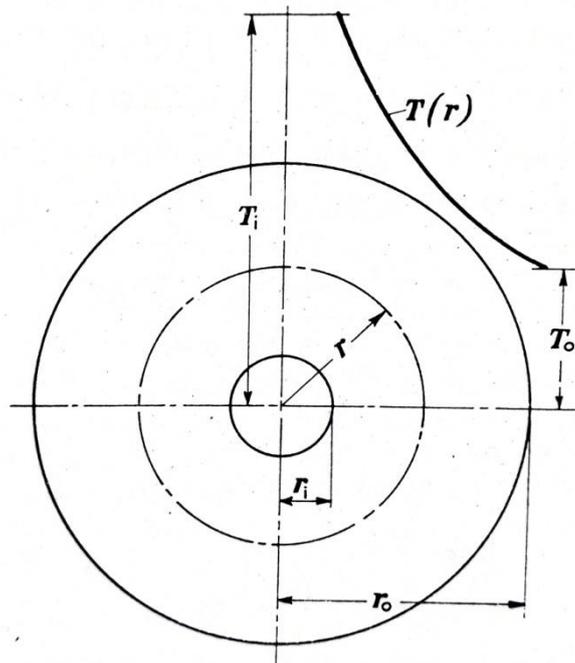


Figure 2.4- Répartitions des températures dans un cylindre creux.

Pour quelques applications, il est utile d'avoir l'équation de la conduction thermique à travers un mur cylindrique sous la même forme que celle de l'éq 2.2.

Pour obtenir une telle équation, nous égalisons les seconds membres des équations 2.7 et 2.2 ou remplaçant  $L$  par  $r_o - r_i$  et  $A$  par  $\bar{A}$

$$\frac{K\bar{A}\Delta T}{r_o - r_i} = \frac{2\pi kL}{\ln(r_o/r_i)} \Delta T$$

$$\bar{A} = \frac{2\pi(r_o - r_i)L}{\ln(r_o/r_i)}$$

Mais  $2\pi r_o L = A_o$  et  $\frac{r_o}{r_i} = \frac{A_o}{A_i}$

$$2\pi r_i L = A_i$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \frac{A_o - A_i}{\ln(A_o/A_i)} \quad (2.9)$$

$\bar{A}$  est appelée la moyenne logarithmique de la surface

$$\Rightarrow q_k = \frac{T_i - T_o}{(r_o - r_i)/K\bar{A}} \quad (2.10)$$

Si  $\frac{A_o}{A_i}$  ou  $\frac{r_o}{r_i} < 2$  alors  $\bar{A} = \frac{A_i + A_o}{2}$

### EXEMPLE 2.3

Un tuyau de longueur 305cm et de diamètre intérieur 76mm et diamètre extérieur 89mm est recouvert d'une couche isolante d'épaisseur 38mm. En supposant que la conductivité thermique de l'isolant est  $k=0.06$  kcal/h.m°C, et que les températures intérieures et extérieures du revêtement sont respectivement 200 et 26°C, calculer les pertes de chaleur en kcal par heure.

SOLUTION : le diamètre nominal du tuyau étant égal à 76mm, le diamètre réel extérieur est alors 89mm. La couche isolante a, par suite, un diamètre intérieur de 89mm et un diamètre extérieur de 165mm. La moyenne logarithmique de la surface est :

$$\bar{A} = \frac{A_o - A_i}{\ln(A_o/A_i)} = \frac{\pi(0.165 - 0.089)3.05}{\ln(165/89)} = \frac{0.726}{0.62}$$

$$\bar{A} = 1.17m^2$$

Comme  $r_o/r_i < 2$ , la moyenne arithmétique de la surface serait approximativement acceptable et l'on a

$$\frac{A_o + A_i}{2} = \frac{\pi(0.165 + 0.089)3.05}{2} = 1.21m^2$$

La chaleur perdue se calcule à partir de l'équation (2.10)

$$q_k = \frac{200 - 26}{0.038/(0.06)(1.17)} = 322kcal/h$$

### 2.2.3 Corps sphériques et parallélépipédiques creux

La conduction, en régime établi, à travers un corps sphérique est aussi un problème unidimensionnel si les températures des surfaces intérieures et extérieures sont uniformes et constante. En outre si le corps est homogène, la quantité de chaleur transmise par conduction serait :

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{4\pi r_i r_o k (T_o - T_i)}{r_o - r_i} \\ &= k\sqrt{A_o A_i} \frac{T_o - T_i}{r_o - r_i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

En première approximation, l'équation 2.12 peut être utilisée pour les corps creux de forme parallélépipédique ayant une petite cavité intérieure entourée d'une paroi épaisse. Pour une telle forme géométrique, l'écoulement de la chaleur, particulièrement dans les angles, n'est pas perpendiculaire à la surface limite et de ce fait il ne peut être considéré comme strictement unidimensionnel. Cependant lorsque la cavité est approximativement un cube et les parois qui l'entourent sont épaisses ( $A_o/A_i > 2$ ),  $q_k$  peut être estimé en multipliant  $\sqrt{A_o A_i}$  par 0.725 dans l'équation (2.12) [1].

### Exemple 2.4

Le laboratoire d'un four chauffé électriquement a pour dimensions 150x200x300 mm. Les parois d'épaisseur 150mm sont en briques réfractaires ( $k=0.3$  kcal/h.m°C). Calculer la puissance consommée en kW sachant que la surface intérieure est maintenue à une température 1093°C, et, la surface extérieure à une température de 149°C.

#### SOLUTION

En régime établi, la puissance consommée serait égale à la chaleur perdue.

$$A_i = 2[(0.15 \times 0.2) + (0.15 \times 0.3) + (0.2 \times 0.3)] = 0.27 \text{m}^2$$

L'air  $A_i$  de la surface externe est :

$$A_o = 2[(0.45 \times 0.5) + (0.45 \times 0.6) + (0.5 \times 0.6)] = 1.59 \text{m}^2$$

Comme  $A_o/A_i > 2$  nous pouvons utiliser l'éq 2.12 avec le facteur de correction empirique 0.725, et, la chaleur perdue est égale à :

$$q_k = (0.3) (0.225) \sqrt{0.27 \times 1.59} \left( \frac{944}{0.15} \right) = 898 \text{kcal/h}$$

Or 1 kcal/h = 1/898 kW donc la puissance consommée est 1.04 kW environ.

### 2.2.4 Les structures composées

Dans ce paragraphe nous allons étudier quelques exemples de structures composées où l'écoulement est unidimensionnel ou tout au moins considéré comme tel.

#### 2.2.4.1 Murs composés

Un cas type du mur composé employé dans un grand four est représenté sur la fig 2.5. La courbe intérieure qui est exposé à la température élevée d'un gaz en briques réfractaires. Coudre intermédiaire est en briques isolantes et elle est suivie d'une coudre extérieure en briques rouges.

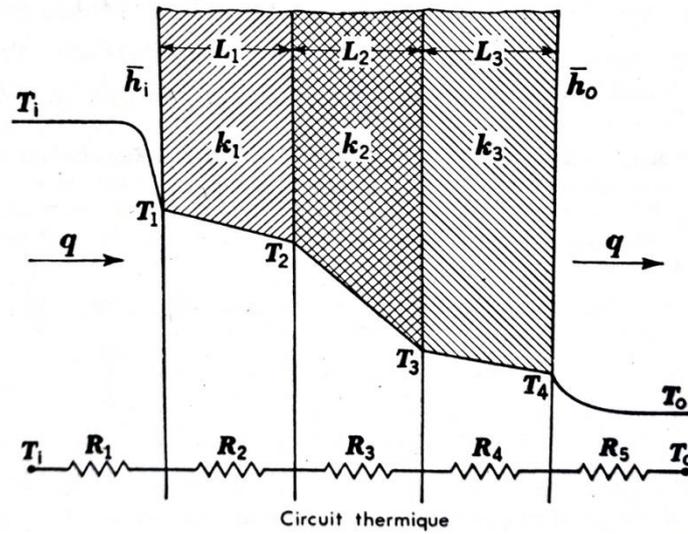


Figure 2.5-Répartition des températures et circuit thermique pour un écoulement de chaleur à travers un mur plan composé d'éléments en série.

$T_i$  : Température du gaz chauds,

$h_i$  : la conductance par unité de surface sur la face interne,

$T_o$  : Température Ext.

$h_o$  : conductance par unité de surface sur la face ext.

Puisque le flux thermique à travers une section donnée A est le même pour n'importe quelle section on obtient

$$q = h_i A (T_i - T_1) = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2) = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3) = \frac{k_3 A}{L_3} (T_3 - T_4) = h_o A (T_4 - T_o) \quad (2.13)$$

L'équation 2.13 peut être réécrite en fonction des résistances thermiques des différentes sections sous la forme.

$$q = \frac{T_i - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_3}{R_3} = \frac{T_3 - T_4}{R_4} = \frac{T_4 - T_o}{R_5} \quad (2.14)$$

Donc

$$T_i - T_1 = qR_1$$

$$T_1 - T_2 = qR_2$$

$$T_2 - T_3 = qR_3$$

$$T_3 - T_4 = qR_4 \quad (2.15)$$

$$T_4 - T_o = qR_5$$

En additionnant membre à membre les relations (2.15) :

$$T_i - T_0 = q(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \quad (2.16)$$

Ou

$$q = \frac{T_i - T_0}{\sum_{i=1}^5 R_i} \quad (2.17)$$

**EXEMPLE 2.5 :**

Le mur d'un four est composé de deux couches, la première d'épaisseur 22.86cm est en briques réfractaires ( $k=1.19 \text{ kcal/h.m}^\circ\text{C}$ ), la deuxième d'épaisseur 12.7 cm est en briques isolantes ( $k=0.1488 \text{ kcal/h.m}^\circ\text{C}$ ).

La température intérieure du mur est  $1649^\circ\text{C}$  et le coefficient de convection  $58.58 \text{ kcal/h.m}^2\text{C}$ . La température de l'air ambiant est  $27^\circ\text{C}$  et la conductance par unité de surface à la paroi extérieure du mur est  $9.764 \text{ kcal/h.m}^2\text{C}$ . En négligeant la résistance thermique de joints de maçonnerie, calculer (a) les pertes de chaleur par mètres carrée de surface du mur et les températures de (b) la surface intérieure et (c) de la surface extérieure.

SOLUTION :

a) Le flux de chaleur est obtenu à partir de l'équation 2.17

$$\begin{aligned} \frac{q}{A} &= \frac{1649 - 27}{1/58.58 + 0.2286/1.19 + 0.127/0.1488 + 1/9.764} \\ &= \frac{1622}{0.017 + 0.19 + 0.85 + 0.102} \\ &= 1400 \text{ kcal/h.m}^2 \end{aligned}$$

Il est intéressant à noter que l'épaisseur de la brique isolante, malgré qu'elle représente le tiers de l'épaisseur du mur, correspond au trois quart de la résistance thermique totale.

b) En utilisant l'équation 2.14, la chute de température entre les gaz du four et la surface intérieure est  $T_i - T_1 = qR_1 = (1400)(0.017) = 23^\circ\text{C}$ . cette différence de température relativement faible est en accord avec les considérations antérieures indiquant que la résistance thermique de la première section du circuit est négligeable. Ainsi, la chaleur peut s'écouler sans qu'il ait un grand écart de température, et, la température de la paroi intérieure du mur est presque égale à celle des gaz

$$T_i = T_1 - 23 = 1649 - 23 = 1626^\circ\text{C}$$

c) La température de la surface extérieure, obtenue de la même manière, est  $169^\circ\text{C}$

Dans de nombreuses applications pratiques, on rencontre une combinaison de trajets de flux de chaleur connectés en série et en parallèle. Dans l'exemple de la figure 2.6 une solution approchée peut être obtenue en supposant que l'écoulement de la chaleur est

essentiellement unidimensionnel. Le mur composé peut alors être divisé en trois sections. Pour une section  $b_1+b_2$  la conductance par **unité de longueur** du mur est :

$$K_2 = \frac{k_2 b_1}{L_2} + \frac{k_2 b_2}{L_2}$$

L'unité de conductance globale  $U$  d'une surface à une autre est

$$U = \frac{1}{(b_1+b_2)(R_1+R_2+R_3)}$$

Où  $R_1 = \frac{L_1}{(b_1+b_2)k_1}$  ;  $R_3 = \frac{L_3}{(b_1+b_2)k_3}$  ;  $R_2 = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}$

D'où 
$$U = \frac{1}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{b_1+b_2}{(k_1 b_2/L_2) + (k_2 b_1/L_2)} + \frac{L_3}{k_3}}$$

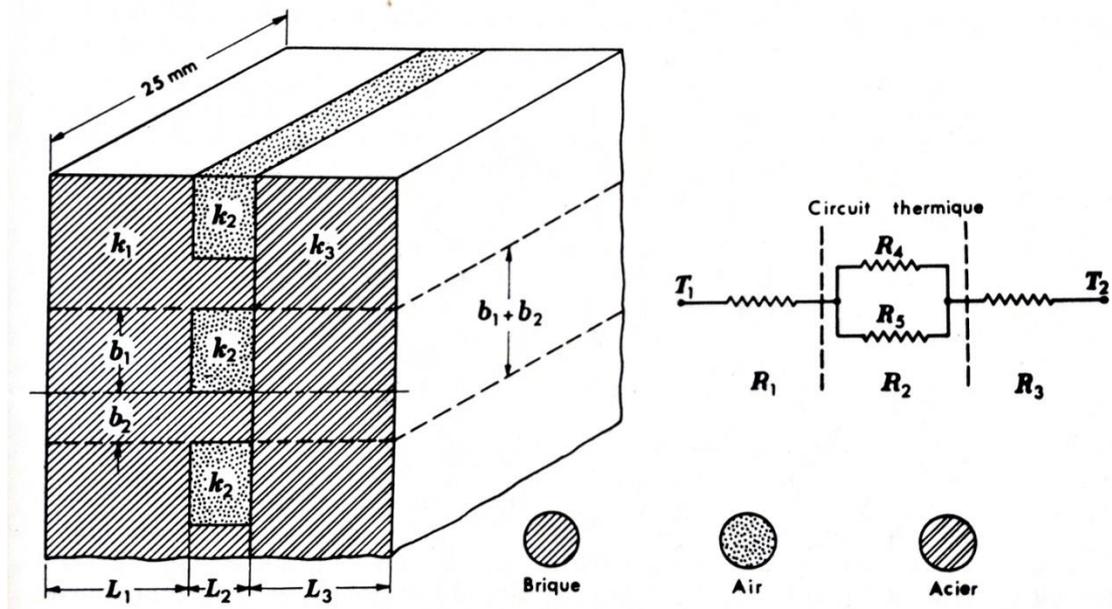


Figure 2.6- Circuit thermique pour un mur composite parallèle-série ( $L_1=25\text{mm}$  ;  $L_2=0,8\text{mm}$  ;  $L_3=6,3\text{mm}$  pour l'exemple 2.6)

**EXEMPLE 2.6** – une couche de briques réfractaires ( $k_b = 1.488 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \cdot \text{m}^\circ\text{C}$ ) de 50 mm d'épaisseur est placée entre deux plaques d'acier ( $k_3 = 44.6 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \cdot \text{m}^\circ\text{C}$ ) de 6.3mm d'épaisseur. Les faces de briques adjacentes aux plaques étant rugueuses, ont un contact solide-solide seulement sur 30 pour cent de la surface totale, avec une hauteur

moyenne des aspérités égale à 0.8mm. Déterminer le flux de chaleur par unité de surface sachant que les températures des surfaces extérieures des plaques d'acier sont respectivement 93°C et 427°C.

SOLUTION.- le système donné est d'abord stylisé en admettant que les aspérités de la surface sont distribuées comme l'indique de la figure 2.6. Nous notons que le mur composé étant symétrique par rapport au plan médian seule la moitié du système est à considérer. De l'examen du circuit thermique, le coefficient global d'échange de chaleur pour le mur composé est alors

$$U = \frac{1/2}{R_1 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} + R_3}$$

La résistance thermique par unité de surface de la plaque d'acier  $R_3$  est égale à

$$R_3 = \frac{L_3}{K_5} = \frac{6.3 \times 10^{-3}}{44.6} = 0.41 \times 10^{-3} \text{ h.m}^2\text{C/kcal}$$

La résistance thermique relative des briques  $R_4$  par unité de surface est égale

$$R_4 = \frac{L_2}{0.3 k_b} = \frac{0.8 \times 10^{-3}}{(0.3)(1.488)} = 1.79 \times 10^{-3} \text{ h.m}^2\text{C/kcal}$$

Comme l'air est enfermé dans un espace très étroit, les effets de la convection sont faibles et il sera donc admis que l'écoulement de la chaleur à travers l'air se fait par conduction. A la température de 138°C la conductivité de l'air est 0.03kcal/h.m°C. par conséquent la résistance thermique,  $R_5$ , par unité de surface de l'air enfermé entre les aspérités est

$$R_5 = \frac{L_2}{0.7 k_a} = \frac{0.8 \times 10^{-3}}{(0.7)(0.03)} = 38 \times 10^{-3} \text{ h.m}^2\text{C/kcal}$$

Les facteurs 0.3 et 0.7 qui se trouvent respectivement dans  $R_4$  et  $R_5$  représentent le pourcentage de la surface pour les deux trajets de flux de chaleur.

La résistance thermique totale pour les trajets  $R_4$  et  $R_5$  placés en parallèle est

$$R_2 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{(1.79)(38)(10^{-3})}{(1.79 + 38)(10^{-3})} = 1.71 \times 10^{-3} \text{ h.m}^2\text{C/kcal}$$

La résistance thermique de la moitié de la couche en briques est :

$$R_1 = \frac{1 L_1}{2 k_b} = \frac{1 (50)(10^{-3})}{2 \cdot 1.488} = 16.8 \times 10^{-2} \text{ h.m}^2\text{C/kcal}$$

Et le coefficient global d'échange de chaleur U est

$$U = \frac{1/2 \times 10^3}{16.8 + 1.71 + 0.141} = \frac{26.8}{h} \text{ kcal/h.m}^2\text{C}$$

L'examen des valeurs des différentes résistances thermiques montre que l'acier offre une résistance négligeable, tandis que la section de contact, bien qu'elle ait une épaisseur de 0.8mm, représente 10 pour cent de la résistance totale. D'après l'équation (1.21), le flux de chaleur par unité de surface est

$$\frac{q}{A} = U\Delta T = 26.8(427 - 93) = 8950 \text{ kcal/h.m}^2$$

### 2.2.4.2 Cylindres concentriques

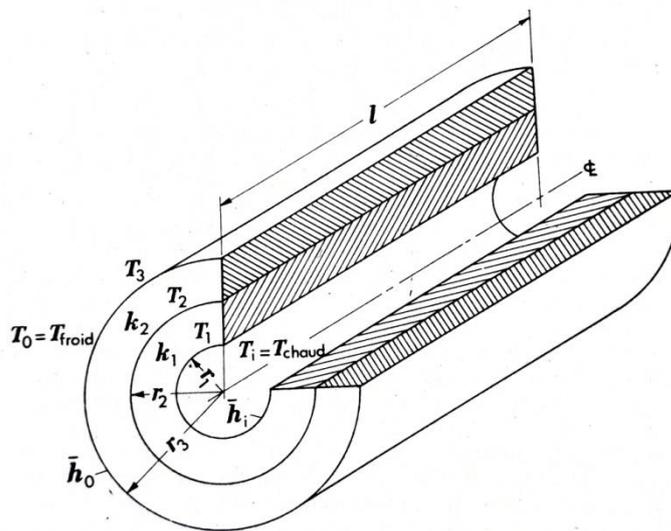


Figure 2.7- Schéma indiquant les notations pour une paroi cylindrique composite.

En régime permanent, le flux de chaleur à travers chaque section est le même il est présenté par

$$q = 2\pi r_1 L \bar{h}_i (T_i - T_1) = \frac{T_{chaud} - T_1}{R_1} \text{ Pour la surface intérieure}$$

$$q = \frac{2\pi k_1 L}{L_n(r_2/r_1)} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_2} \text{ Pour le cylindre intérieur}$$

$$q = \frac{2\pi k_2 L}{L_n(r_3/r_2)} (T_2 - T_3) = \frac{T_2 - T_3}{R_2} \text{ Pour le cylindre extérieur}$$

$$q = 2\pi r_3 L \bar{h}_0 (T_3 - T_0) = \frac{T_3 - T_{froid}}{R_4} \text{ Pour la surface extérieure}$$

En faisant la somme membre à membre, il vient

$$q = \frac{T_i - T_0}{\frac{1}{2\pi r_1 \ell h_0} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 \ell} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 \ell} + \frac{1}{2\pi r_3 \ell h_0}} = \frac{T_{chaud} - T_{froid}}{\sum_{n=1}^4 R_n} \quad (2.18)$$

Le coefficient global d'échange de chaleur  $U$  pour ce système par rapport à n'importe quelle surface, cependant la valeur numérique dépendra de la surface choisie.

Aussi l'aire généralement choisie est  $A_0 = 2\pi r_3 \ell$

$$q = UA_0(T_{chaud} - T_{froid})$$

Donc d'après 2.18,  $U$  devient

$$U = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k_1} + \frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} + \frac{1}{h_0}} \quad (2.19)$$

### EXEMPLE 2.7

Calculer les pertes thermiques par mètre de longueur d'une canalisation d'acier de diamètre nominal 76mm (3 inch) N°du nomenclature 40. [Diamètre intérieur réel 78mm (3.07 in) ; diamètre extérieur réel 89mm (3.5in)] et dont la conductivité est  $k=37.2$  kcal/h.m°C. Cette canalisation, étant recouverte d'une couche de 12.7mm d'amiante isolante ( $k=0.163$  kcal/h.m°C), transporte un fluide à 149°C avec une conductance par unité de surface intérieure de 195 kcal/h.m²°C et, est exposée à l'air ambiant à 27°C avec une conductance par unité de surface extérieure de 19.5 kcal/h.m²°C.

### SOLUTION

D'après l'équation 2.18, le flux de chaleur pour  $\ell=1$  est

$$\begin{aligned} q &= \frac{T_i - T_0}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \\ &= \frac{122}{\frac{1}{\pi(0.078)19,5} + \frac{\ln(89/78)}{2\pi(37.2)} + \frac{\ln(114.4|89)}{2\pi(0.163)} + \frac{1}{\pi(0.1144)19.5}} \\ &= \frac{122}{0.21 + 0.00056 + 0.1049 + 0.143} = 295 \text{ kcal/h.m} \end{aligned}$$

Il est à noter que la résistance thermique est concentrée dans l'isolant et à la surface extérieure dont la conductance de surface est faible, alors que la résistance à la surface métallique est

négligeable. Si la canalisation était nue, les pertes thermiques s'élèveraient à 850 kcal/h.m ou environ trois fois plus grand qu'avec le calorifuge.

### 2.2.4.3 Epaisseur critique de l'isolation

L'addition de couches isolante sur l'extérieures des pipes ne réduisent pas toujours les pertes de chaleur. En fait le débit de chaleur peut augmenter avec l'ajout d'isolant autour d'un tube ou d'un fil chaud. Le taux de perte de chaleur atteint une valeur maximum lorsque le rayon extérieur de l'isolant  $r_0 = k/h_f$  où  $k$  est la conductivité thermique de l'isolant et  $h_f$  est le coefficient de transfert de chaleur par convection sur la surface extérieure.  $R_0$  est appelé le rayon critique.

Donc si  $r_0 < k/h_f$ , alors en augmentant l'épaisseur de l'isolant jusqu'à  $r_0 = k/h_f$  aura pour effet d'augmenter les pertes de chaleur. Si l'épaisseur de l'isolant est encore augmentée, les pertes de chaleurs vont chuter graduellement.

## 2.3 Conduction en deux et trois dimensions en régime stationnaire

### 2.3.1 Développement de l'équation de la chaleur

Considérons un petit élément à l'intérieur d'un corps solide (figure 2.8).

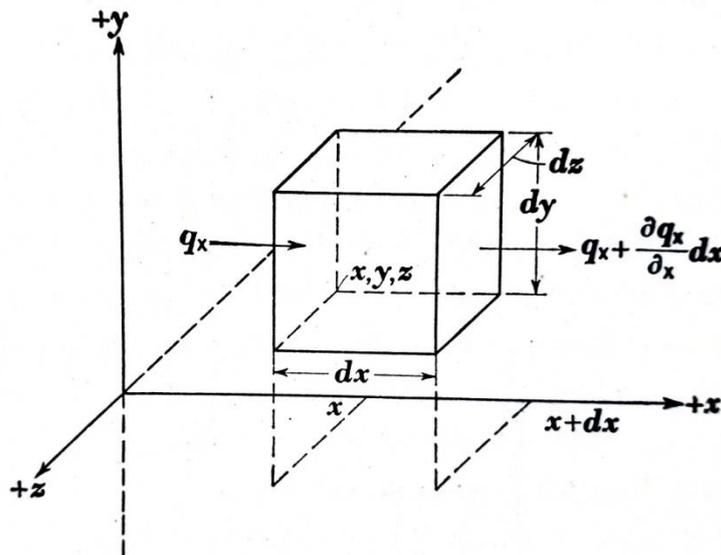


Figure 2.8- Schéma indiquant les notations pour l'établissement de l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes.

Pour obtenir une équation décrivant la distribution de température, nous devons écrire le bilan énergétique pour l'élément de la figure 2.8

$$\begin{aligned} & \text{le débit de chaleur entrée} + \text{le débit de chaleur généré par des sources internes} \\ & = \text{le débit de chaleur sorti} \\ & + \text{le taux de variation de l'énergie interne} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Algébriquement ceci peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & (q_x + q_y + q_z) + \dot{q}(dxdydz) \\ & = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + c\rho(dxdydz) \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Où le débit de chaleur généré par unité de volume  $\dot{q}$  et la température T, sont en général fonctions des trois coordonnées x,y,z et du temps  $\theta$ .

Le débit de chaleur par conduction à travers la face gauche de l'élément (entrée) dans la direction x,  $q_x$ , peut réécrit selon l'équation 1.1

$$q_x = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz$$

A travers la face droite de l'élément (sortie) le débit de chaleur par conduction devient

$$q_{x+dx} = \left[ \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dydz$$

On soustrayant le débit de chaleur sortant du débit de chaleur entrant on obtient

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} dxdydz$$

Et similairement dans la direction y et z

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} dxdydz$$

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\partial z} dxdydz$$

En substituant ces relations dans l'équation (2.20) et en divisant chaque terme par dx dy dz on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (2.21)$$

Si la chaleur spécifique  $c$  ainsi que la densité  $\rho$  sont indépendantes de la température et si  $k$  est uniforme alors (2.21) peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (2.22)$$

Où la constante  $a=k/c\rho$  est appelée la diffusivité thermique. Equation 2.22 comme étant l'équation générale de la chaleur par conduction dans un solide ayant des propriétés physiques uniformes. Si le système ne possède aucune source de chaleur  $\dot{q}$  alors 2.22 se réduit à l'équation de Fourier

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (2.23)$$

Dans le cas d'un système stationnaire avec source de chaleur l'équation 2.13 devient l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.24)$$

Dans le cas d'un système stationnaire sans sources de chaleur l'équation 2.24 devient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.25)$$

Pour un écoulement stationnaire unidimensionnel sans source de chaleur

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Après intégration  $dT/dx = \text{constante}$ , qui redéfinit l'équation 1.1 pour un écoulement stationnaire unidimensionnel.

## 2.4 Transmission de chaleur à partir des surfaces de grande étendue

Les problèmes considérés dans ce paragraphe se rencontrent dans la pratique lorsqu'un solide, ayant une section transversale relativement petite, émerge d'un grand corps et se trouve dans un fluide à température différente.

Sur des échangeurs, ces ailettes augmentent le transfert de chaleur.

### 2.4.1 Ailettes à section droite uniforme

Comme exemple simple, on considère une ailette « aiguille » ayant la forme d'une barre cylindrique dont la base est liée à un mur porté à la température  $T_s$  (fig2.9)

L'ailette est refroidie le long de sa surface par un fluide à température  $T_\infty$

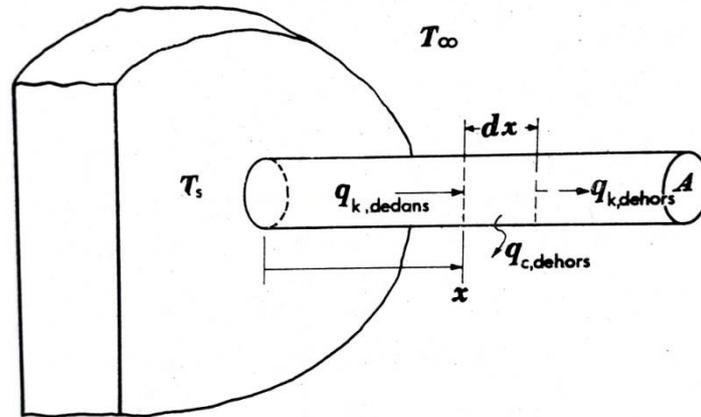


Figure 2.9- Schéma et notations pour un mur pourvu d'ailettes « aiguilles »

Le bilan thermique est le suivant :

Flux thermique qui entre par conduction dans l'ailette par la face située à la distance  $X$  = flux thermique qui sort par conduction de l'ailette par la face située à  $(X+dx)$  + flux thermique qui sort par convection de la surface entre  $X$  et  $(X + dx)$

Soit :

$$-KA \frac{dT}{dx} = \left[ -KA \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left( -KA \frac{dT}{dx} \right) dx \right] + hPdx(T - T_\infty) \quad (2.26)$$

Où  $P$  est le périmètre de la barre et  $T=T(x)$

La simplification de l'équation 2.26 donne

$$\frac{d^2T}{dx^2} = m^2(T - T_\infty) \quad (2.27)$$

Où  $m^2 = hP/KA$

L'équation 2.27 est une équation différentielle ordinaire du second ordre dont la solution générale est  $T - T_\infty = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$  (2.28)

Dans laquelle  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes d'intégration dont les valeurs doivent être déterminées par les conditions aux limites. Une de celles-ci est  $T = T_s$  pour  $X=0$ . Pour le deuxième il y a généralement 3 cas. Nous allons considérer le cas le plus courant, soit

Si la barre est d'une longueur finie  $\ell$ , mais la chaleur évacuée par l'extrémité de la barre est négligeable, ou si cette extrémité est isolée, la seconde condition aux limites exige que le gradient de température soit nul pour  $x=L$ , ou  $\frac{dT}{dx}=0$  pour  $X=L$ . l'équation 2.27 devient donc

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} = \frac{ch m(\ell - x)}{ch (m\ell)} \quad (2.29)$$

Nous savons que la chaleur transmise par l'ailette au fluide peut être obtenue, en considérant la chaleur s'écoulant par conduction à travers la base de l'ailette, soit

$$q_{ailette} = -KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \quad (2.30)$$

D'après 2.29,  $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = (T_s - T_{\infty})mth(mL)$  donc

$$q_{ailette} = -KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \sqrt{P\hbar KA} (T_s - T_{\infty})thml \quad (2.31)$$

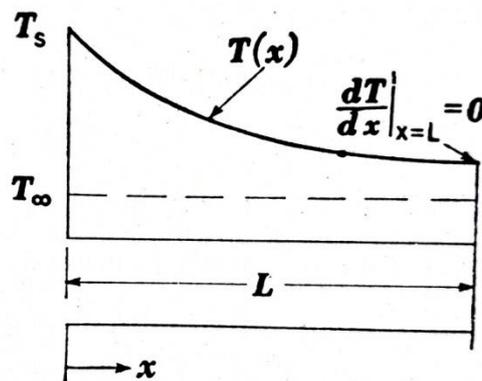


Figure 2.10- Représentation schématique d'une condition à la limite pour une ailette « aiguille »

### Exemple 2.8

Déterminer l'augmentation de la quantité de chaleur évacuée qui peut être obtenue à partir d'une paroi cylindrique pourvue de quatre ailettes par  $\text{cm}^2$ , chacune d'elles ayant 4.8mm de diamètre et 25mm de hauteur. On admettra que le coefficient d'échange de chaleur entre la surface de la paroi cylindrique ou de l'ailette et l'air environnant est  $122\text{kcal/h.m}^2\text{°C}$  ; et que les températures de la paroi cylindrique et de l'air sont respectivement égales à  $316\text{°C}$  et  $21\text{°C}$ . La paroi et les ailettes sont en aluminium.

SOLUTION – La chaleur évacuée par  $\text{cm}^2$  de surface, sans la présence des ailettes, est :

$$\frac{q}{A} = \frac{122}{10^4} (316 - 21) = 36 \text{ kcal/h.cm}^2$$

La chaleur évacuée par une seule ailette peut être évaluée d'après l'équation 2.31. La quantité de chaleur transmise par ailette  $q$  est égale à

$$\sqrt{PhAk}(T_s - T_\infty)th mL$$

Où  $P = (4.8)\pi(10^{-3}) = 15.07 \times 10^{-3} \text{ m}$

$$A = (4.8)^2(10^{-6})(\pi/4) = 18.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$K = 178 \text{ kcal/h.m}^\circ\text{C}$$

$$\sqrt{PhAk} = \sqrt{(15.07)(122)(18.1)(178)(10^{-9})} = 0.077 \text{ kcal/h.m}^\circ\text{C}$$

$$mL = 25 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{hP}{kA}} = 25 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{(122)(15.07)(10^{-3})}{(178)(18.1)(10^{-6})}} = 0.6$$

D'où  $q_{\text{aillette}} = 0.077 \times 295 \times 0.53 = 12 \text{ kcal/h}$

La chaleur évacuée par les quarts ailettes est alors 48 kcal/h. la quantité de chaleur évacuée par la surface de la paroi diminuée de la surface des ailettes approximativement à la surface non occupée par les ailettes multipliée par le coefficient d'échange de chaleur et l'écart des températures. Ainsi la quantité de chaleur transmise par la paroi pourvue d'ailettes est

$$\frac{q}{A} \simeq 48 + 36(1 - 18.1 \times 10^{-2}) = 77.3 \text{ kcal/h.cm}^2$$

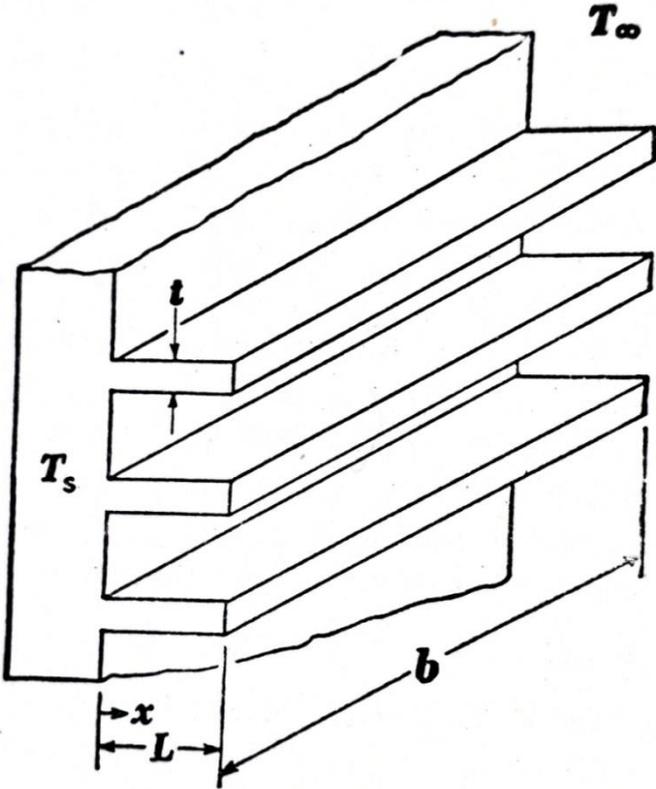
On constate que l'emploi des ailettes peut accroître la chaleur évacuée plus de 50 pour cent.

L'ailette rectangulaire (figure 2.11) peut être traitée par la même méthode que celle utilisée pour la barre. Si la largeur  $b$  de l'ailette est grande par rapport à son épaisseur  $t$ , le périmètre est alors

$$P = (b+t) \cdot 2 \simeq 2b$$

La section transversale de l'ailette est  $A = bt$  et

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \simeq \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$



Ailette rectangulaire

Figure 2.11- Notations pour ailette rectangulaire