Ecole Nationale POlytechnique d'Oran

2^{e} Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie

Analyse IV

Abdallah Talhaoui

Équations aux dérivées partielles

1 5

2 7

3 **Équations aux dérivées partielles** 9

3.1 Généralités

3.2 EDP linéaires du 2^e^ordre à coefficients constants

3.3 Méthodes de résolution de certaines EDP

1.

2.

3. Équations aux dérivées partielles

3.1 Généralités

Définition 3.1.1 Soit $u(x,y,\ldots)$ une fonction de plusieurs variables. Une équation aux dérivées partielles(EDP) est une relation qui lie :

- les variables indépendantes $(x,y,\ldots)$,
- la fonction « inconnue » u,
- un nombre fini de dérivées partielles de u.

On peut écrire cette relation sous la forme

$$F\left(x,y,\ldots,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ldots\right)=0. \tag{3.1}$$

Une fonction u est solution de l'EDP si, après substitution, la relation (3.1) est satisfaite pour $(x,y,\ldots)$ appartenant à une certaine région D de l'espace $(x,y,\ldots)$.

R Pour la simplicité, on se limite dans ce cours au cas de deux variables (x,y).

■ **Exemple 3.1** $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ équation de diffusion (ou de la chaleur).
On vérifie facilement que :

$$u_1(x,y)=2x+y^2 \quad \text{est solution dans tout } \mathbb{R}^2.$$
$$u_2(x,y)=e^{-x}\sin y \quad \text{est solution dans tout } \mathbb{R}^2.$$
$$u_3(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi x}}e^{-\frac{y^2}{4x}} \quad \text{est solution dans } D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0\}.$$

■

Définition 3.1.2 (*Ordre d'une EDP*)
On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.

■ **Exemples 3.1**

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \text{EDP du 1}^{\text{er}}\text{ordre,}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{EDP du 2}^{\text{e}}\text{ordre.}$$

■

EDP linéaire du 1^er^ordre

Définition 3.1.3 La forme générale d'une EDP linéaire, du premier ordre, à deux variables, est

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=D(x,y). \tag{3.2}$$

où A,B,C,D sont des fonctions de (x,y).
Lorsque $D(x,y)=0$, on dit qu'elle est homogène.

Définition 3.1.4 (***équation caractéristique***)
L'équation différentielle ordinaire

$$Bdx-Ady=0$$

est appelée équation caractéristique de l'équation (3.2).

■ **Exemples 3.2**

$$\cos(xy^2)\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{tg}(x^2+y^2) \qquad \text{EDP du 1}^{\text{er}}\text{ordre, linéaire, non homogène}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\sin u=0 \qquad \text{EDP du 1}^{\text{er}}\text{ordre, non linéaire}$$

■

EDP linéaire du 2^e^ordre

Définition 3.1.5 La forme générale d'une EDP linéaire, du deuxième ordre, à deux variables, est

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G. \tag{3.3}$$

où A,B,C,D,E,F,G sont des fonctions de (x,y).
Lorsque $G(x,y)=0$, on dit qu'elle est homogène.

Définition 3.1.6 (***équation caractéristique***)
L'équation différentielle ordinaire

$$A(dy)^2-Bdxdy+C(dx)^2=0$$

est appelée équation caractéristique de l'équation (3.3).

■ **Exemples 3.3**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{EDP du 2}^{\text{e}}\text{ordre, linéaire, homogène.}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{EDP du 2}^{\text{e}}\text{ordre,non linéaire}$$

■

Superposition

Proposition 3.1.1 Si u_1 et u_2 sont deux solutions d'une EDP linéaire homogène et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_1 + \mu u_2$ est encore solution.

Corollary 3.1.2 Pour une EDP homogène toute combinaison de solutions est elle même une solution, en particulier si on peut définir une suite de solutions (u_n), alors toue série convergente $\sum_0^{+\infty} \alpha_n u_n$ est encore solution (les coefficients $\alpha_n \in \mathbb{R}$).

3.2 EDP linéaires du 2eordre à coefficients constants

La forme générale d'une EDP linéaire, du deuxième ordre, à deux variables, est

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u + G = 0.$$

où A,B,C,D,E,F,G sont des nombres réels.

Classification

- Si $B^2 - 4AC > 0$, l'EDP est hyperbolique.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, l'EDP est parabolique.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, l'EDP est elliptique.

■ **Exemples 3.4** 1. ***équation des ondes***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad c \in \mathbb{R},$$

hyperbolique car $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0.$.

2. ***équation de la chaleur***

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad d > 0,$$

parabolique car $B^2 - 4AC = 0.$

3. ***équation de Laplace***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad c > 0,$$

elliptique car $B^2 - 4AC = -4 < 0.$

■

3.3 Méthodes de résolution de certaines EDP

1) Changement de variables

• EDP linéaire du 1erordre à coefficients constants

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = D, \quad A,B \in \mathbb{R}^*, \; D \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

L'équation caractéristique est définie par : $Bdx - Ady = 0$.
Après intégration de l'équation caractéristique, on obtient $Bx = Ay + s$ où $s \in \mathbb{R}$.
On effectue alors le changement de variables :

$$\begin{cases} s = Bx - Ay \\ t = Bx + Ay \end{cases}$$

■ **Exemple 3.2** On veut résoudre l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = a, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

On lui associe l'équation caractéristique : $dx = dy$.
Après intégration, on obtient $x = y + s, \quad s \in \mathbb{R}$. Posons

$$\begin{cases} s = x - y \\ t = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+s}{2} \\ y = \frac{t-s}{2} \end{cases}$$

Notons $u(x,y) = u\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) = f(s,t)$
Nous allons exprimer $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial s}$.
D'après les formules de dérivation d'une fonction composée, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial s}$$

Par conséquent on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = a \Leftrightarrow 2\frac{\partial f}{\partial s} = a.$$

Nous sommes donc conduits à résoudre l'équation : $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{a}{2}$.
Par intégration, on obtient

$$f(s,t) = \frac{a}{2}s + g(t).$$

Finalement, on déduit que

$$\boxed{u(x,y) = \frac{a}{2}(x-y) + g(x+y).}$$

■

■ **Exemple 3.3** ***équation des ondes***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

On lui associe l'équation caractéristique :

$$(dx)^2 - c^2(dy)^2 = 0 \Rightarrow dx = \pm c dy$$

Après intégration, on obtient $x = cy + t, \quad x = -cy + s, \qquad t, s \in \mathbb{R}$.
On pose alors

$$t = x - cy, \quad s = x + cy, \quad u(x,y) = f(t,s).$$

En utilisant les formules de dérivation d'une fonction composée, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} = -c\dfrac{\partial f}{\partial t} + c\dfrac{\partial f}{\partial s} \end{cases}$$

De même on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}\dfrac{\partial s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -c\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\dfrac{\partial t}{\partial y} - c\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + c\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} + c\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}\dfrac{\partial s}{\partial y} \end{cases}$$

ce qui entraine que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s} + c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2} \end{cases}$$

L'équation (3.6) devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(t,s) = 0$$

Par intégration on obtient

$$f(t,s) = h(t) + k(s), \qquad h,k \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}).$$

Finalement,on déduit la solution de l'équation des ondes

$$\boxed{u(x,y) = h(x-cy) + k(x+cy).}$$

■

2) Séparation des variables

■ **Exemple 3.4** Soit à résoudre l'équation :

$$ux = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (x,y) \in D \tag{3.7}$$

On pose

$$u(x,y) = f(x)g(y), \qquad f,g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}).$$

On a alors pour tour $(x,y) \in D$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(y)f'(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = f(x)g'(y).$$

L'équation (3.7) se réécrit donc sous la forme

$$f(x)g'(y) = f'(x)g(y).$$

Si l'on suppose que f et g ne s'annulent pas sur leur domaine de définition, on obtient

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de y et le membre de droite que de x on en déduit l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$f'(x) = cf(x) \qquad \text{et} \qquad g'(y) = cg(y).$$

La résolution des ces deux équations différentielle ordinaires conduit à la solution générale de l'équation (3.7)

$$\boxed{u(x,y) = Ke^{c(x+y)}, \quad K \in \mathbb{R}.}$$

■

■ **Exemple 3.5** ***équation de Laplace***

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

La méthode de séparation de variables $u(x,y) = f(x)g(y)$, conduit à l'équation

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = c, \quad \text{constante},$$

En appliquant les formules de résolution des EDO du 2ᵉ ordre à coefficients constants, on obtient suivant que $c = 0, \quad c = \omega^2, \quad c = -\omega^2, \quad (\omega > 0)$ les solutions

$$\boxed{u(x,y) = (Ax+By)(Cx+Dy)}$$

$$\boxed{u(x,y) = (Ae^{-\omega x} + Be^{\omega x})(C\sin\omega y + D\cos\omega y)}$$

$$\boxed{u(x,y) = (A\sin\omega x + B\cos\omega x)(Ce^{-\omega y} + De^{\omega y})}$$

■

3) Méthode de la transformée de Fourier

■ **Exemple 3.6** ***équation de chaleur***

On considère l'équation de la chaleur dans une barre infinie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,o) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.8}$$

1ʳᵉ étape :

On applique à l'équation (3.8) la transformée de Fourier en x

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha,t) = \mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha,t)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-ix\alpha}dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-ix\alpha}dx\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}(u)(\alpha,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha,t) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\alpha,t) = i\alpha\hat{u}(\alpha,t)$$
$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha,t) = -\alpha^2\hat{u}(\alpha,t)$$

L'équation (3.8) devient donc

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha,t) = -\alpha^2\hat{u}(\alpha,t)}$$

Par intégration, on obtient

$$\boxed{\hat{u}(\alpha,t) = C(\alpha)e^{-\alpha^2 t}} \tag{3.9}$$

2ᵉ étape :

On utilise la condition initiale ($t=0$)

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \hat{u}(\alpha,t) \\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-ix\alpha}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} u(x,t)e^{-ix\alpha}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)e^{-ix\alpha}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ix\alpha}dx \\ &= \hat{\varphi}(\alpha) \end{aligned} \tag{3.10}$$

En substituant (3.10) dans (3.9), on obtient

$$\hat{u}(\alpha,t) = \hat{\varphi}(\alpha)e^{-\alpha^2 t}$$

En utilisant le résultat de l'exercice 4 de la série de TD nº 2, on montre que $e^{-\alpha^2 t}$ est la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$.
d'où

$$\boxed{\hat{u}(\alpha,t) = \hat{\varphi}(\alpha)\hat{g}(\alpha)}$$

3ᵉ étape :

On utilise la transformée inverse

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\left(\hat{\varphi}(\alpha)\hat{g}(\alpha)\right)(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\varphi * g(x,t).$$

Finalement, on obtient la solution de l'équation de la chaleur

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}du.}$$

■