

CHAPITRE VI

LA METHODE DES VOLUMES FINIS

Problème de diffusion

Considérons un problème de transport de la variable ϕ par diffusion.

$$\text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) + S_\phi = 0 \quad (1)$$

La clé de la méthode des volumes finis réside dans l'application du **théorème de la divergence** ou **théorème d'Ostrogradski**, qui permet de changer une intégrale de volume en intégrale de surface.

$$\int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) dv + \int_{CV} S_\phi dv = \int_A n \cdot (\Gamma \text{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dv = 0 \quad (2)$$

A surface enveloppant le volume de contrôle CV.

n vecteur unitaire.

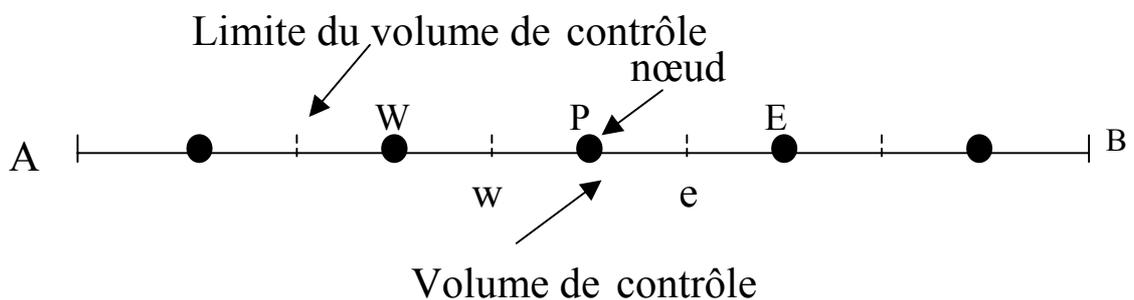
L'équation (1) en 1D prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (3)$$

Γ Coefficient de diffusion.

S Terme source.

Etape 1 : maillage

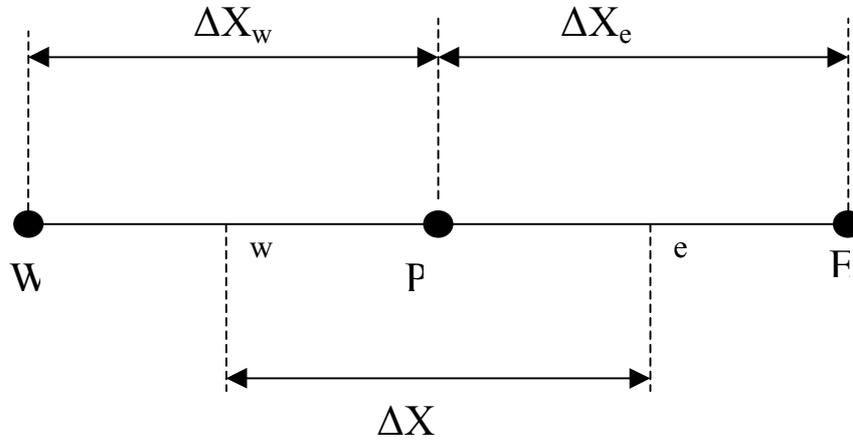


La valeur de ϕ aux frontières A et B est maintenue constante.

La première étape dans cette méthode consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre fini et discret de volume de contrôle, on dit qu'on génère un maillage. L'opération consiste à subdiviser le domaine de calcul (Ligne AB) en un certain nombre de segments (Volume de contrôle). Le centre de chaque volume est placé exactement au milieu du segment

correspondant. Il est commode de s'arranger pour que les facettes des nœuds de frontières coïncident exactement avec les frontières du domaine de calcul. Dans le cas de la figure ci-dessous le domaine de calcul est divisé en cinq volumes de contrôles.

Système de notation :



Etape 2 : discrétisation

L'intégration de l'équation (3) sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dv + \int_{\Delta V} S dv = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4)$$

Interprétation : (principe de conservation)

- Flux diffusif de ϕ sortant de la facette e
- Flux diffusif de ϕ entrant par la facette w
- = production de ϕ dans le CV

Dans le cas général où le coefficient de diffusivité n'est pas constant ses valeurs sur les facettes "w" et "e" du volume de contrôle CV seront exprimées en fonction des valeurs aux points nodaux P, W et E par :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_P}{2} ; \quad \Gamma_w = \frac{\Gamma_P + \Gamma_W}{2} \quad (5)$$

Pour simplifier l'exposé nous allons utiliser un maillage uniforme ($\Delta X_e = \Delta X_w = \Delta X$) et appliquer un schéma centré d'ordre deux pour remplacer les dérivés premières sur les facettes du volume de contrôle.

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X} \right) \quad (6)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X} \right) \quad (7)$$

Généralement le terme source S peut aussi dépendre de la fonction ϕ elle même. Dans une telle situation nous écrirons :

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_P\phi_P \quad (8)$$

En substituant les équations (5), (6), (7), (8) et (9) dans (4), nous obtenons :

$$\left(\Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X} \right) - \left(\Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X} \right) + (S_u + S_P\phi_P) = 0 \quad (9)$$

et après arrangement :

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u \quad (10)$$

avec :

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta X} A_w, \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta X} A_e, \quad a_P = a_W + a_E - S_P \quad (11)$$

Etape 3 : Solution des équations

L'équation (11) sera construite pour tous les volumes de contrôles du domaine de calcul. En vue d'incorporer les conditions aux limites, un traitement spécial sera réservé aux volumes de frontières. Le système d'équations résultant sera un système d'équations algébriques linéaires comportant autant d'inconnus que d'équations. La distribution discrète de la variable ϕ sur le domaine de calcul peut être obtenue par inversion de la matrice du système d'équations. Cependant, cette méthode n'est quasiment jamais utilisée pour la simple raison qu'elle est très coûteuse en mémoire de stockage. Les méthodes itératives (par exemple : Gauss-Seidel) sont plus efficaces dans ce cas. Dans un calcul itératif il faut aussi définir un critère de convergence pour pouvoir arrêter les calculs à un moment donné.

Critère de convergence :

A partir de l'équation (10) nous pouvons écrire une expression du résidu pour estimer la satisfaction éventuelle de l'équation :

$$R = \sum_{\text{l'ensemble des volumes}} |a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u - a_P\phi_P| \quad (12)$$

R représente le résidu des calculs et possède par conséquent l'unité de l'équation différentielle intégrée. Dans notre cas c'est le flux de chaleur (Joule par second). Pour avoir une idée précise sur la convergence des calculs, il faut contrôler la valeur normalisée du résidu $R/F \leq \varepsilon$ où F représente le flux total.

Exemples : (L'énoncé des exemples ci-dessous est inspiré du cours de H. K. VERSTEEG and W. MALALASEKERA, *An Introduction to computational fluid dynamics The finite volume method*, Longman Scientific & Technical)

Soit l'équation de Fourier régissant le transfert de chaleur par conduction en une seule dimension.

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$$

λ Conductivité thermique (remplace Γ)

T température (remplace ϕ)

Le terme source peut être remplacé par exemple par la production de chaleur engendrée par le passage d'un courant électrique.

Exemple 1 :

Considérons la conduction thermique dans un fil isolé, où les deux bouts sont maintenus à une température constante 100°C et 500°C respectivement.

Soit : $\lambda=1000$ W/m/K et $A=0.01$ m².

Les nœuds frontières nécessitent un traitement spécial pour l'implémentation des conditions aux limites. Le coefficient de la face considérée est annulé (coupant la liaison avec la frontière) et le flux à travers cette frontière est introduit sous forme de source S_u ou S_p .

Exemple 2 :

Considérons une plaque d'épaisseur $L = 2$ cm, et de conductivité thermique constante $\lambda=0.5$ W/m/K, assez haute et large pour qu'on puisse considérer que le transfert de chaleur existe seulement dans le sens de l'épaisseur. Les deux faces de la plaque sont maintenues à des températures constantes de 100°C et 200°C.

Supposons qu'il existe une génération de chaleur interne uniforme de $q = 1000$ kW/m³. Calculer la distribution de la température à travers l'épaisseur de la plaque. Comparer le résultat avec la solution analytique :

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2\lambda} (L - x) \right] x + T_A$$

Exemple 3 :

Soit une ailette de refroidissement de section droite cylindrique. La base de l'ailette est maintenue à une température constante égale à 100°C (T_B). L'autre extrémité est adiabatique. L'ailette est exposée à une température ambiante de 20°C. Le transfert de chaleur est contrôlé par l'équation suivante.

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0$$

où h représente le coefficient d'échange thermique par convection, P le périmètre de l'ailette, λ le coefficient de conductivité thermique et T_∞ la température de l'air ambiant. Calculer la distribution de la température le long de l'ailette et comparer le résultat avec la solution analytique.

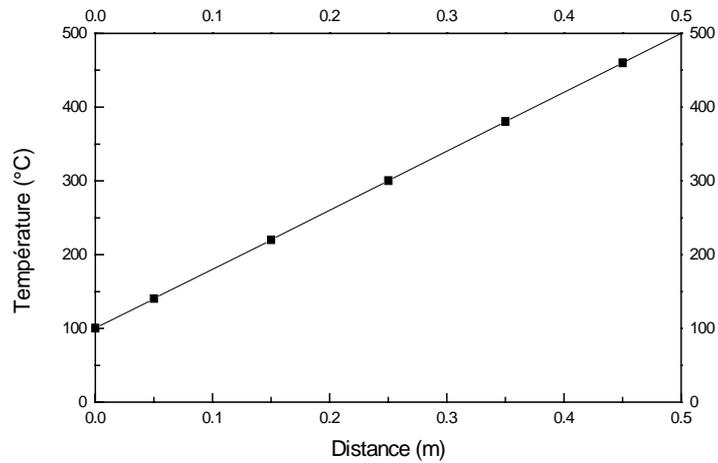
$$\frac{T - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L - x)]}{\cosh(nL)}$$

où $n^2 = hP/(\lambda A)$, L est la longueur de l'ailette.

données: $L=1m$, $hP/(\lambda A) = 25m^{-2}$.

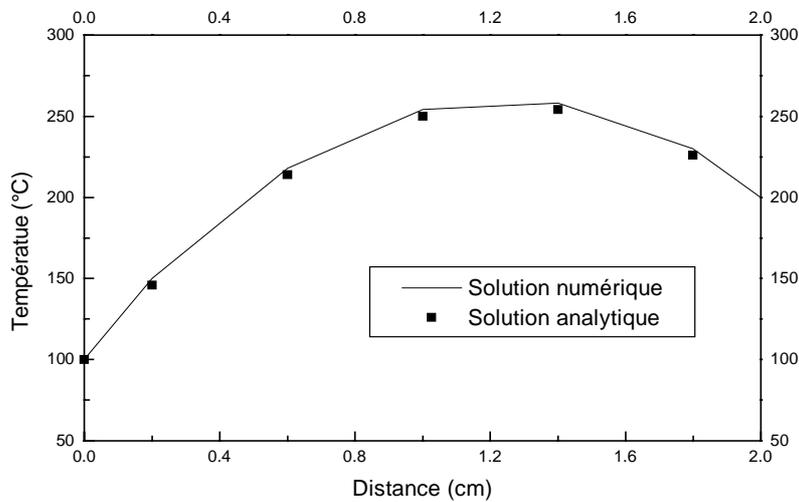
Solution de l'ex : 1

$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}$$



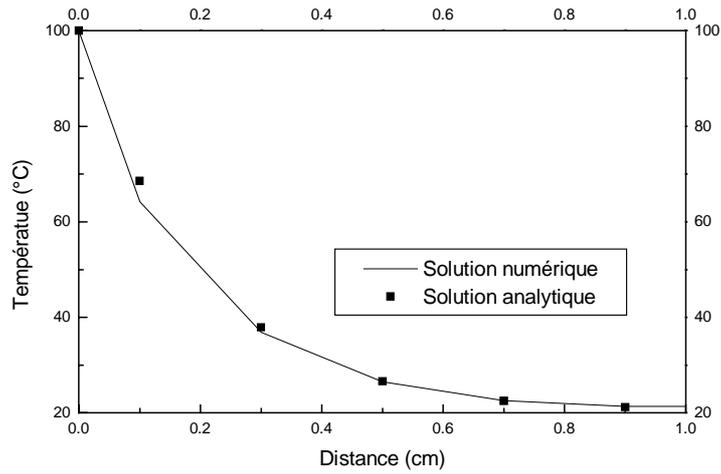
Solution de l'ex : 2

$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 54000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

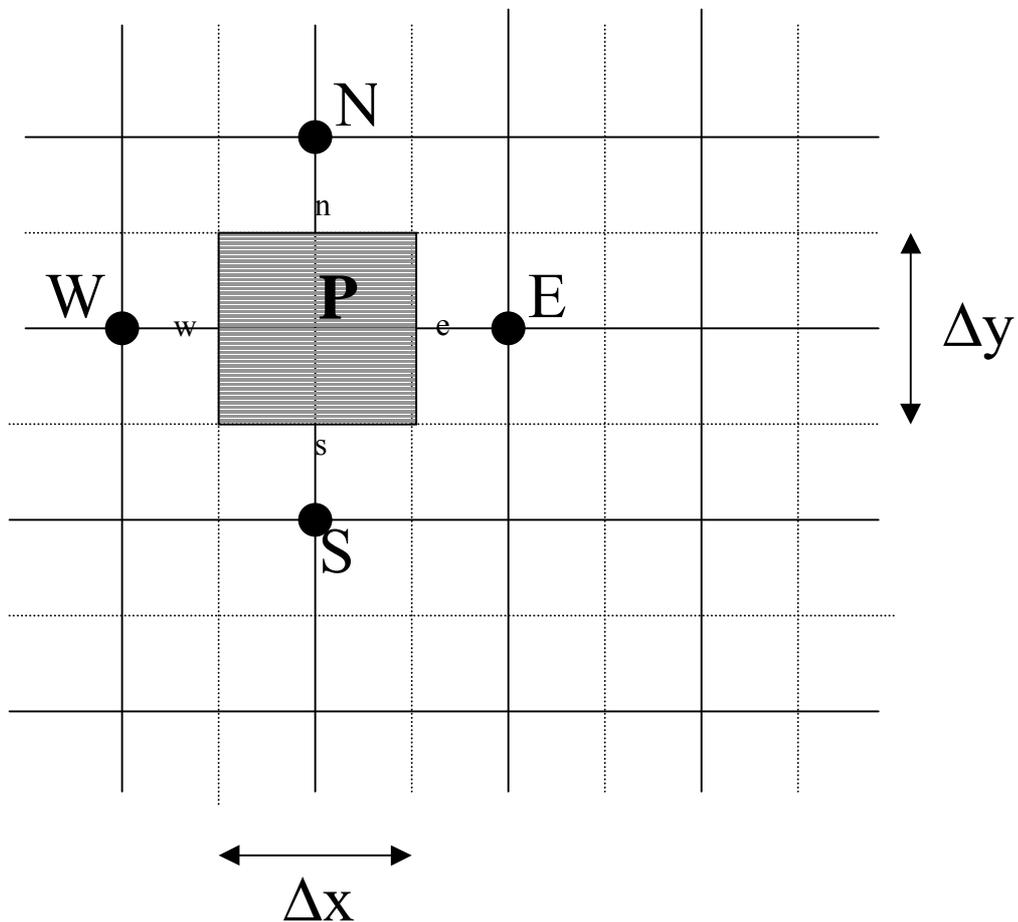


Solution de l'ex : 3

$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 21.30 \end{bmatrix}$$



Problème de diffusion à deux dimensions



La méthode utilisée précédemment peut facilement être appliquée au cas de phénomènes de transport à deux dimensions :

Soit l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (13)$$

L'intégration de l'équation précédente autour du volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Delta V} S_{\phi} dV = 0 \quad (14)$$

On utilisant les égalités suivantes : $A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$, nous obtenons:

$$\left[\Gamma_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[\Gamma_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (15)$$

Comme précédemment cette équation traduit un principe de conservation.

En utilisant les mêmes approximations centrées utilisées dans le paragraphe précédent nous posons :

$$\text{Le flux à travers la face ouest} = \Gamma_w \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w = \Gamma_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x^-} \quad (16)$$

$$\text{Le flux à travers la face est} = \Gamma_e \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e = \Gamma_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x^+} \quad (17)$$

$$\text{Le flux à travers la face nord} = \Gamma_n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n = \Gamma_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\Delta y^+} \quad (18)$$

$$\text{Le flux à travers la face sud} = \Gamma_s \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s = \Gamma_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\Delta y^-} \quad (19)$$

Et l'équation (14) devient :

$$\Gamma_e \Delta y \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x} - \Gamma_w \Delta y \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x} + \Gamma_n \Delta x \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\Delta y} - \Gamma_s \Delta x \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\Delta y} + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (20)$$

en linearisant le terme source comme précédemment et en arrangeant l'équation, nous obtenons la forme suivante:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S_u \quad (21)$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} \Delta y, \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \Delta y \quad (22)$$

$$a_S = \frac{\Gamma_s}{\Delta y} \Delta x, \quad a_N = \frac{\Gamma_n}{\Delta y} \Delta x \quad (23)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P \quad (24)$$

1- Problème de diffusion à trois dimensions

Dans le cas d'un problème 3D, chaque nœud P a six nœuds voisins notés W, E, S, N, B et T. et les six facettes du volume de contrôle sont notées w, e, s, n, b et t respectivement.

L'intégration et la discrétisation de l'équation (1) donne :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + S_u \quad (25)$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} \Delta y \Delta z, \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \Delta y \Delta z \quad (26)$$

$$a_S = \frac{\Gamma_s}{\Delta y} \Delta x \Delta z, \quad a_N = \frac{\Gamma_n}{\Delta y} \Delta x \Delta z \quad (27)$$

$$a_T = \frac{\Gamma_t}{\Delta z} \Delta x \Delta y, \quad a_B = \frac{\Gamma_b}{\Delta z} \Delta x \Delta y \quad (28)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P \quad (29)$$

2- Résumé du problème de diffusion

L'équation de diffusion prend la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_U \quad (30)$$

Où le terme de la sommation indique tout les nœuds voisins (nb), le terme source est toujours lineariser suivant la formule $S_u + S_P \phi_P$, et le coefficient du nœud P est exprimé suivant la relation:

$$a_P = \sum a_{nb} - S_P \quad (31)$$

Les conditions aux limites sont implementées par ellimination du coefficient de la face considerée et introduction du flux dans les termes sources S_u et S_P .

Relaxation :

Soit ϕ_p^* , la valeur de la variable issue de l'itération précédente, l'équation (30) s'écrit:

$$\phi_P = \phi_P^* + \left[\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^* \right] \quad (32)$$

Où l'expression entre crochets représente le changement de ϕ_P dans l'itération actuelle. Pour diminuer ce changement en vue de stabiliser les calculs, on introduit un coefficient α ayant une valeur entre 0 et 1. Cette opération est appelée sous relaxation.

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha \left[\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^* \right] \quad (33)$$

Ou encore:

$$\frac{a_P}{\alpha} \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{(1-\alpha)a_P \phi_P^*}{\alpha} \quad (34)$$

Cette équation garde la forme de l'équation (30), avec une légère modification des coefficients. On introduit ainsi la sous relaxation par le choix d'un bon coefficient α . On note aussi, qu'après convergence l'égalité $\phi_P = \phi_P^*$ est satisfaite.

Problème de Convection-Diffusion

L'équation de convection-diffusion stationnaire s'écrit :

$$\operatorname{div}(\rho U \phi) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \phi) + S_{\phi} \quad (35)$$

et en intégrant sur un volume de contrôle

$$\int_A n \cdot (\rho \phi U) dA = \int_A n \cdot (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_{\phi} dV \quad (36)$$

L'équation précédente traduit bien un principe de conservation, où la partie gauche exprime le flux par convection alors que celle de droite représente le flux par diffusion et la génération ou la destruction de ϕ

Problème à une seule dimension

L'équation stationnaire en l'absence du terme source s'écrit :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (37)$$

L'équation de continuité s'écrit ;

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (38)$$

L'intégration des deux équations précédentes sur un volume de contrôle donne :

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (39)$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (40)$$

Pour des raisons de simplicité nous représentons le flux convectif par la variable F et le flux diffusif par la variable D , qui seront définis comme suit :

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (41)$$

Les valeurs de ces variables aux deux facettes s'écrivent :

$$F_e = (\rho u)_e \quad F_w = (\rho u)_w \quad (42)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\Delta X_e} \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{\Delta X_w} \quad (43)$$

En simplifiant $A_w = A_e = A$

Les deux équations (27) et (28), s'écrivent :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (44)$$

$$F_e - F_w = 0 \quad (45)$$

Pour se concentrer sur le problème de la convection nous supposons que la distribution de la vitesse est connue. La résolution des équations précédentes passe par la détermination des variables de la convection.

Le schéma aux différences centrées (Central Differencing Scheme, CDS)

En supposant que le maillage est uniforme, la valeur de ϕ s'écrit :

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2 \quad (46)$$

$$\phi_w = (\phi_W + \phi_P)/2 \quad (47)$$

Et en remplaçant dans l'équation (10), nous obtenons :

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (48)$$

Et après arrangement :

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (49)$$

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (50)$$

Ou encore :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (51)$$

| | | |
|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| a_W | a_E | a_P |
| $D_w + \frac{F_w}{2}$ | $D_e - \frac{F_e}{2}$ | $a_W + a_E + (F_e - F_w)$ |

Cette forme nous rappelle celle des équations de pure diffusion, avec un changement dans l'expression des différents coefficients. La méthode de résolution reste la même que précédemment.

Exemple 5.1 :

Nous proposons de résoudre l'équation de convection-diffusion stationnaire unidimensionnelle avec les conditions aux limites suivantes :

$\phi_0 = 1$ à $x=0$ et $\phi_L = 0$ à $x=1$, utiliser un maillage uniforme de cinq volumes.

Cas1 : $u = 0.1$ m/s

Cas2 : $u = 2.5$ m/s

Cas3 : $u = 2.5$ m/s mais avec 20 cellules uniformes.

Comparer avec la solution analytique.

Les résultats montrent pour le cas 1, malgré un maillage très grossier, une bonne concordance entre les résultats numériques et analytiques, alors que pour le cas 2 la solution représente une oscillation autour de la solution exacte. L'adoption d'un maillage plus fin élimine cette oscillation et la solution redevient acceptable.

L'exemple montre que le rapport F/D passe de 5 à 1.25 du cas 2 au cas 3. On en déduit que le CDS donne un résultat précis pour les faibles valeurs du rapport F/D .

Les principales propriétés d'un schéma de discrétisation

Théoriquement, la solution numérique est indépendante du schéma de discrétisation utilisé quand le nombre de nœuds considérés tend vers l'infini, alors qu'en pratique ce nombre est toujours fini. Ceci nous conduit à une étude plus détaillée des schémas de convection :

Un bon schéma de convection doit vérifier les trois propriétés suivantes :

Conservativité : (conservativeness) Le flux sortant par la face e d'un volume i doit être égale au flux entrant par la face w du volume $i+1$. Cette propriété est généralement satisfaite par la méthode des volumes finis elle même.

Limitabilité : (boundedness) Par exemple la valeur calculé de ϕ sur une face du volume de contrôle ne doit pas être supérieur ou inférieur aux valeurs voisines utilisées pour son calcul. En général cette propriété est vérifiée si tout les coefficients son positifs.

Transportivité : (transportiveness) Cette propriété est liée à la nature du transport qui est généralement traduit par le nombre de Peclet (rapport entre le coefficient de convection et celui de diffusion). Les faibles valeurs du nombre de Peclet reflètent un transport dominé par la diffusion alors que l'inverse caractérise un transport dominé par la convection. Un bon schéma de convection doit refléter cette propriété.

Le CDS vérifie bien la propriété de conservativité, alors que la limitabilité n'est pas toujours vérifiée puisque le coefficient a_E peut devenir négatif dans le cas d'un écoulement fortement convectif. Pour que a_E soit toujours positif il faut que

$$Pe_e = F_e/D_e < 2 \quad (52)$$

Si le nombre de Peclet est supérieur à 2, le coefficient a_E devient alors négative et ne vérifie plus la condition de limitabilité.

(dans l'exemple précédent, cas 2, $Pe = 5$, la condition de limitabilité n'a pas été vérifiée, alors que pour les cas 1 et 3 cette condition est très bien vérifiée.

La troisième propriété n'est pas vérifiée par le CDS puisque la direction de l'écoulement n'intervient pas dans la formulation de ce schéma.

La précision du CDS d'ordre 2 (erreur de troncature) est très satisfaisante mais son instabilité pour les nombres de Peclet supérieur à deux le rend inacceptable pour les calculs pratiques.

On peut bien remarquer que pour un fluide donnée (masse volumique et coefficient de diffusion constants) le nombre de Peclet combine la vitesse de l'écoulement et la taille du maillage (ΔX). C'est à dire que pour une vitesse donnée on peut assurer la stabilité par l'adoption d'un maillage d'une finesse appropriée.

Le schéma aux différences avant d'ordre 1 (First Order Upwind Differencing Scheme, UDS)

Pour assurer la troisième propriété de transportivité le schéma avant attribue à la facette du volume de contrôle la valeur de la variable au centre du volume voisin en amont de la direction de l'écoulement. C'est à dire pour la facette e la variable aura la valeur du volume P si la direction de l'écoulement est de gauche vers la droite et la valeur du volume E si elle est de droite vers la gauche.

Pour le cas précédent, si F_e et F_w sont positifs, l'UDS s'écrit :

$$\phi_w = \phi_W \text{ et } \phi_e = \phi_P \quad (53)$$

L'équation (41) s'écrit :

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (54)$$

et après arrangement

$$(D_w + D_e + F_e) \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \quad (55)$$

ou encore

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \quad (56)$$

Pour un écoulement dans le sens contraire, c'est à dire de l'est vers l'ouest, l'UDS s'écrit :

$$\phi_w = \phi_P \text{ et } \phi_e = \phi_E \quad (57)$$

et l'équation (10) :

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (58)$$

ou

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_W + (D_e - F_e) \phi_E \quad (59)$$

En résumé :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (60)$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (61)$$

| | a_W | a_E |
|--------------------|-------------|-------------|
| $F_w > 0, F_e > 0$ | $D_w + F_w$ | D_e |
| $F_w < 0, F_e < 0$ | D_w | $D_e - F_e$ |

La forme compacte suivante exprime l'UDS en tenant compte des deux directions de l'écoulement

$$\frac{a_W}{D_w + \max(F_w, 0)} \quad \frac{a_E}{D_e + \max(0, -F_e)}$$

Exemple 2 : reprendre l'exemple 1 avec le schéma UDS.

Pour le cas 2, où le CDS a échoué, l'UDS retrouve la bonne allure de la solution analytique.

Le schéma UDS vérifie la propriété de conservativité.
 Les coefficients sont toujours positifs, d'où la propriété de limitabilité.
 La transportivité est aussi assurée par ce schéma.

L'inconvénient du schéma UDS est sa précision (erreur de troncature), qui est de l'ordre 1, ce qui n'est pas suffisant pour les situations pratiques où une économie sur le nombre des points de calcul est toujours recherchée.
 Un autre inconvénient du schéma UDS réside dans sa diffusivité numérique, appelée aussi fausse diffusion. L'influence de cette fausse diffusion est plus marquée pour les situations où la direction de l'écoulement ne coïncide pas avec les lignes du maillage utilisé, ce qui est généralement le cas.

Le schéma hybrid

L'idée de construire un schéma ayant la précision du CDS et la stabilité de l'UDS, a été matérialisée par SPALDING en 1972 par un schéma hybride composé des deux schémas et permettant de basculer automatiquement de l'un vers l'autre suivant la valeur du nombre de Pe.

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \Delta x^-} \tag{62}$$

$|Pe| > 2$ *UDS*
 $|Pe| < 2$ *CDS*

Le schéma hybride s'exprime sous la forme compacte suivante :

| | |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| a_W | a_E |
| $\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$ | $\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$ |

Une autre variante du schéma hybride permettant d'utiliser un facteur de pondération entre les deux schémas a été proposée par Raithby et Torrance en 1974. Le nouveau schéma est nommé **Upstream Weighted Differencing Scheme (UWDS)** et il prend la forme suivante :

$$\phi_e = B\phi_{UDS} + (1 - B)\phi_{CDS} \tag{63}$$

[23] .G. D. Raithby and K. E. Torrance, *Upstream-weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Comp, Fluids, Vol. 8, N°.12, pp. 191-206, 1974.*

$$B = \frac{Pe^2}{5 + Pe^2} \quad (64)$$

Il est clair que pour les écoulement faiblement convectifs caractérisés par un faible nombre de Peclet le facteur de pondération tend vers zéro et le schéma deviens purement centré alors que pour les écoulements fortement convectifs (Pe supérieur à 10) le facteur de pondération tends vers l'unité et le schéma bascule vers la forme UDS. Pour un Peclet égal à 2 le schéma 44% UDS et 56% CDS.

Expression du schéma hybride pour un problème de convection-diffusion en trois dimensions :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T \quad (65)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F \quad (66)$$

| | |
|------------|-------------------------------------------------------------------|
| a_W | $\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$ |
| a_E | $\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$ |
| a_S | $\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$ |
| a_N | $\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$ |
| a_B | $\max \left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right]$ |
| a_T | $\max \left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right), 0 \right]$ |
| ΔF | $F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$ |

Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics scheme (QUICK). (Leonard 1979)

Pour augmenter la précision du schéma avant tout en gardant sa propriété de transportivité, on construit un schéma utilisant deux nœuds avant au lieu d'un seul.

L'expression de la variable ϕ sur la facette e aura l'expression suivante :

$$\phi_e = a x^2 + b x + c \quad (67)$$

Les valeurs des coefficients a,b et c seront déterminées par la pose des conditions aux limites suivantes :

$$\phi(x=0) = \phi_W \quad \phi(x=\Delta x) = \phi_P \quad \phi(x=2\Delta x) = \phi_E \quad (68)$$

d'où :

$$\phi_e = \frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W \quad (69)$$

Le schéma **Quick** présente un très bon niveau de précision (3^{ème} ordre pour un maillage uniforme), mais sa limitabilité n'est pas toujours assurée d'où quelques problèmes de stabilité. L'utilisation de deux nœuds (upstream) complique un petit peu l'utilisation de l'algorithme tridiagonale de résolution spécialement près des frontières.

Dans le but de profiter de la grande précision de ce schéma, son faible niveau de fausse diffusion tout en le rendant plus stable (limitabilité), plusieurs variantes améliorées ont été proposées.. Il est bon de noter que pour un nombre plus faible de points ce schéma produit une précision comparable à celle assurée par le schéma UDS ou le schéma Hybrid.

On peut noter aussi que pour des cas de calculs complexes ce schéma produit des imperfections appelées *undershoots* et *overshoots*, qui peuvent avoir des conséquences néfastes surtout lors du calcul des écoulements turbulents.

A titre indicatif, on peut citer quelques autres schémas de discrétisation tel que la famille des schémas TVD (Total Variation Diminishing) qui ont la particularité d'éliminer les défauts du schéma QUICK (*undershoots* et *overshoots*). Ces schémas sont d'actualité et présentent un large domaine de recherche.

Algorithmes de couplage pression-vitesse