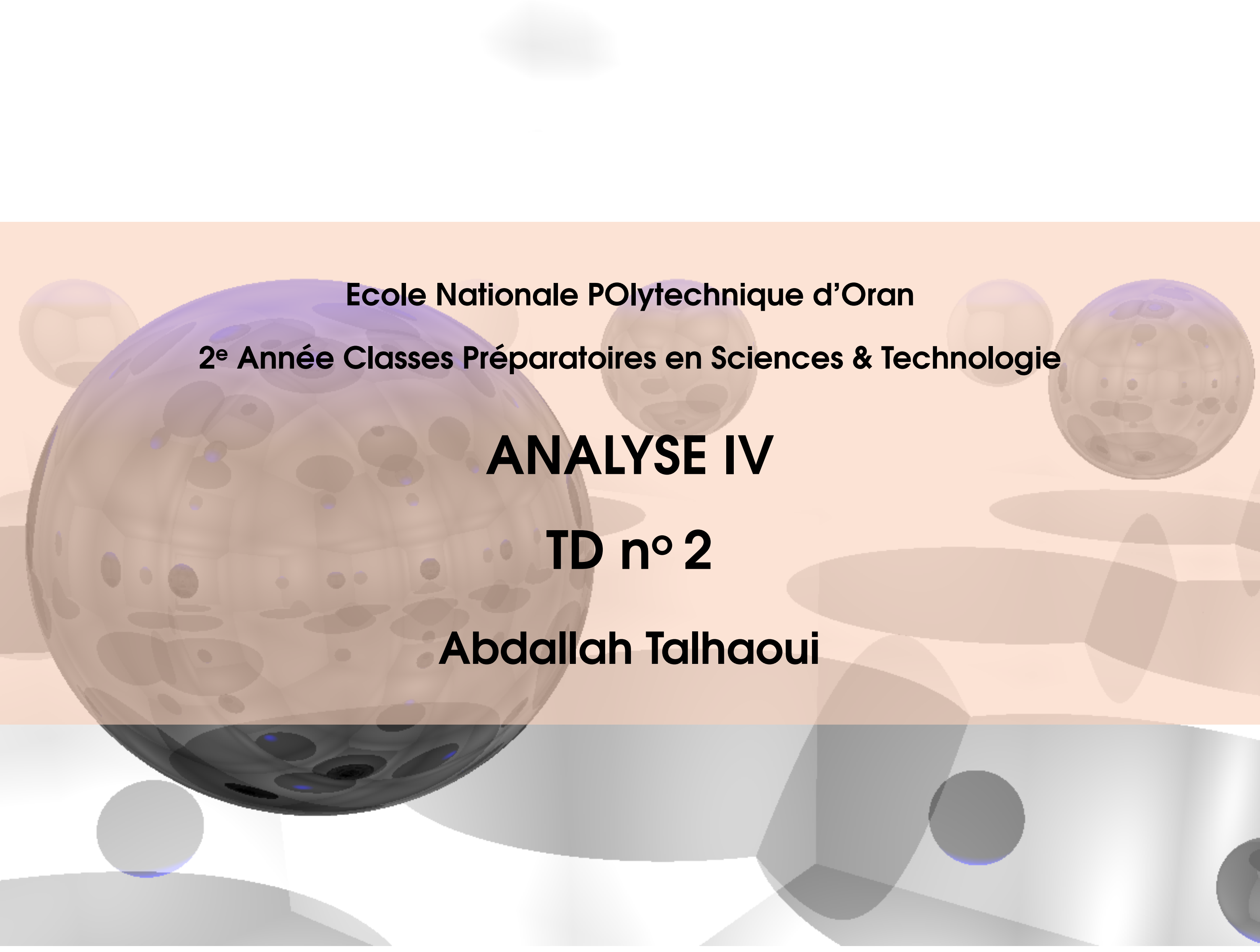

Ecole Nationale POlytechnique d'Oran

2^{e} Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie

ANALYSE IV

TD n^{o} 2

Abdallah Talhaoui

Transformée de Fourier

Exercise 0.1 *Fonction porte*

Soit Π la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\Pi(x)$.
2. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

Solution :

1. On remarque que $\Pi(x)$ est paire, alors on a

$$\widehat{\Pi}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\Pi(x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\alpha x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}.$$

2. D'après l'égalité de Parseval, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\Pi}(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Pi(x)|^2 dx,$$

ce qui implique que

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}{\alpha^2} d\alpha = 2\int_0^{\frac{1}{2}} dx = 1.$$

Le changement de variable $\frac{\alpha}{2} = x$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

Exercise 0.2 *Fonction triangle*

Soit Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\Delta(x)$.
2. Vérifier que $\Delta'(x) = \Pi(x+\frac{1}{2}) - \Pi(x-\frac{1}{2})$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $\Delta'(x)$ et retrouver le résultat de la question 1.
4. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

Solution :

1. On remarque que $\Delta(x)$ est paire, alors on a

$$\widehat{\Delta}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} \Delta(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1-x)\cos(\alpha x) dx$$

Après une intégration par parties, on obtient

$$\widehat{\Delta}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\alpha^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

2. Δ est dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$, on a

$$\Delta'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0, \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Vérifions que $\Delta'(x) = \Pi(x+\frac{1}{2}) - \Pi(x-\frac{1}{2})$.
Pour cela posons $a = x - \frac{1}{2}$ et $b = x + \frac{1}{2}$, et remarquons que $a < b$ et $b - a = 1$.
  Si -1<x<0, on a $\Pi(a) = 0$, $\Pi(b) = 1$ donc $\Delta'(x) = \Pi(b) - \Pi(a) = 1$.
  Si 0<x<1, on a $\Pi(a) = 1$, $\Pi(b) = 0$ donc $\Delta'(x) = \Pi(b) - \Pi(a) = -1$.
  Si |x|>1, on a $\Pi(a) = \Pi(b) = 0$ donc $\Delta'(x) = \Pi(b) - \Pi(a) = 0$

3. On a

$$\widehat{\Delta'}(\alpha) = \mathscr{F}(\Pi(x+\frac{1}{2}))(\alpha) - \mathscr{F}(\Pi(x+\frac{1}{2}))(\alpha)$$

Donc

$$i\alpha\widehat{\Delta}(\alpha) = e^{i\frac{\alpha}{2}}\widehat{\Pi}(\alpha) - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\widehat{\Pi}(\alpha) = 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\widehat{\Pi}(\alpha).$$

On déduit que

$$\widehat{\Delta}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\alpha^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

4. D'après l'égalité de Parseval, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\Pi}(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Pi(x)|^2 dx,$$

ce qui implique que

$$\frac{16}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha^4} d\alpha = 2\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{2}{3}.$$

En effectuant le changement de variable $x = \frac{\alpha}{2}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx = \frac{\pi}{3}.$$

Exercise 0.3 Soit $a > 0$, en utilisant le résultat de l'exercice 1, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\cos(xt)}{t} dt == \begin{cases} \pi & \text{si } |x| < a, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |x| = a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

En déduire que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Solution :
Notons

$$\Pi_a(x) = \Pi\left(\frac{x}{2a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

On a

$$\widehat{\Pi_a}(\alpha) = 2a\widehat{\Pi}(2a\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}.$$

En utilisant le théorème d'inversion, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Pi_a}(\alpha) e^{i\alpha} d\alpha = \frac{\Pi_a(x^+) + \Pi_a(x^-)}{2},$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\alpha)\cos(x\alpha)}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\alpha)\cos(x\alpha)}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi & \text{si } |x| < a, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |x| = a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

Si $a = 1$ et $x = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \pi \;\Rightarrow\; \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercise 0.4 *Fonction Gaussienne*
Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$.

(a) Vérifier que $f'(x) + xf(x) = 0$.
(b) Calculer la TF de f.
(c) Utiliser ce résultat pour calculer

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(\omega x) dx, \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Solution :

(a) On a

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x).$$

par suite l'équation $f'(x) + xf(x) = 0$ est vérifiée .

(b) Les fonctions f, f' et $xf(x)$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.
En appliquant les propriétés de la transformée de Fourier, on obtient

$$\mathscr{F}(f(x))(\alpha) = \hat{f}(\alpha),$$
$$\mathscr{F}(f'(x))(\alpha) = i\alpha\hat{f}(\alpha),$$
$$\mathscr{F}(xf(x))(\alpha) = i\left(\hat{f}\right)'(\alpha)$$

Comme $f'(x) + xf(x) = 0$, alors

$$\left(\hat{f}\right)'(\alpha) + \alpha\hat{f}(\alpha) = 0.$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient

$$\hat{f}(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

où C est déterminée par

$$C = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

(c) Comme $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(\omega x)$ est une fonction paire, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(\omega x)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(\omega x)dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-i\omega x}dx\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{2}}.\end{aligned}$$

Exercise 0.5 (a) Calculer la TF de la fonction $f(x) = e^{-|x|}$.
(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx.$$

Solution :

(a) Comme f est paire on peut utiliser la TF-cosinus

$$\hat{f}(\alpha) = \hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos(\alpha x)e^{-x}dx.$$

Après une double intégration par partie, on obtient

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème d'inversion entraine pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-|x|} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2} d\alpha. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exercise 0.6 On considère la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$.

(a) Calculer la TF de f.
(b) A l'aide de la TF inverse, en déduire la TF de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
(c) Calculer $f * f$, en déduire la TF de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
(d) Déterminer la TF de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Solution :

(a) En utilisant la propriété de changement d'échelle et le résultat de l'exercice précédent, on obtient

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{a} \mathscr{F}(e^{-|x|}) \left(\frac{1}{a} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\alpha^2}.$$

(b) Pour $a = 1$, on a $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}$.
En utilisant la continuité de $f(x) = e^{-|x|}$ et le théorème d'inversion, on obtient

$$\mathscr{F}^{-1} \left(\frac{1}{1+\alpha^2} \right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}.$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left(\frac{1}{1+x^2} \right)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+x^2} \right)(-\alpha) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-y|} e^{-a|y|} dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(|x-y|-y)} dy + \int_0^{+\infty} e^{-a(|x-y|+y)} dy. \end{aligned}$$

Si $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
f * f(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-2y)} dy + \int_{0}^{x} e^{-ax} dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-a(2y-x)} dy \\
&= \frac{e^{-ax}}{2a} + x e^{-ax} + e^{ax} + \frac{e^{-2ax}}{2a} \\
&= e^{-ax}\left(x + \frac{1}{a}\right).
\end{aligned}$$

La fonction f étant paire, $f * f(x)$ l'est aussi, et on a donc

$$f * f(x) = e^{-a|x|}\left(|x| + \frac{1}{a}\right)$$

sa transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{f * f}(\alpha) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha) \cdot \hat{f}(\alpha),$$

pour $a = 1$, on obtient

$$\widehat{f * f}(\alpha) = \sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}\right)^2 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right)^2.$$

En appliquant la TF-inverse, on a

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^2}\right)(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} f * f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}\left(|x| + 1\right).$$

Par un changement de notations, on peut écrire

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\alpha|}\left(|\alpha| + 1\right).$$

Comme $\mathscr{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\alpha) = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(-\alpha)$ on obtient

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\alpha|}\left(|\alpha| + 1\right).$$

remarquons que

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\alpha) &= -\frac{1}{2}\mathscr{F}\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)(\alpha) \\
&= -\frac{i\alpha}{2}\mathscr{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\alpha) \\
&= -\frac{i\alpha}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\alpha|}.
\end{aligned}$$