Ecole Nationale POlytechnique d'Oran

2e Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie

ANALYSE IV

TD n° 2

Abdallah Talhaoui

Transformée de Fourier

Exercise 0.1 *Fonction porte*
Soit Π la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\Pi(x)$.
2. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

■

Exercise 0.2 *Fonction triangle*
Soit Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\Delta(x)$.
2. Vérifier que $\Delta'(x) = \Pi(x + \frac{1}{2}) - \Pi(x - \frac{1}{2})$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $\Delta'(x)$ et retrouver le résultat de la question 1.
4. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

■

Exercise 0.3 Soit $a > 0$, en utilisant le résultat de l'exercice 1, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\cos(xt)}{t} dt == \begin{cases} \pi & \text{si } |x| < a, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |x| = a, \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

En déduire que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

■

Exercise 0.4 *Fonction Gaussienne*
Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$.

(a) Vérifier que $f'(x) + xf(x) = 0$.
(b) Calculer la TF de f.
(c) Utiliser ce résultat pour calculer

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(\omega x) dx, \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

■

Exercise 0.5 (a) Calculer la TF de la fonction $f(x) = e^{-|x|}$.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx.$$

■

Exercise 0.6 On considère la fonction $f(x) = e^{-|x|}$ avec $a > 0$.

(a) Calculer la TF de f.

(b) A l'aide de la TF inverse, en déduire la TF de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

(c) Calculer $f * f$, en déduire la TF de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

(d) Déterminer la TF de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

■