Ecole Nationale POlytechnique d'Oran

2e Année Classes Préparatoires en Sciences & Technologie

Analyse IV

Abdallah Talhaoui

Séries de Fourier

1. Séries de Fourier

II

Transformée de Fourier

2. Transformée de Fourier

2.1 Transformée de Fourier

2.1.1 Fonction absolument intégrable

Définition 2.1.1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On dit que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ existe.
On note $L^1(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions f absolument intégrables sur $\mathbb{R}$

■ **Exemples 2.1** .

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ appartient a $L^1(\mathbb{R})$ car :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{X \to +\infty} \arctan X = \pi.$$

2. $g(x) = x$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$ car :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|dx = \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} |x|dx = \lim_{X \to +\infty} X^2 = +\infty.$$

■

2.1.2 Transformée de Fourier

Définition 2.1.2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\alpha) = \mathscr{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t)dt$$

R En physique la fonction $\hat{f}(\alpha) = \mathscr{F}(f)$ est appelée spectre de fréquence du signal $f(t)$. On montre que $\lim_{|\alpha| \to +\infty} \hat{f}(\alpha) = 0$.

■ **Exemple 2.1** *(Fonction porte)*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

Il est clair que $f \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f est définie par

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{i\alpha} e^{-i\alpha t} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{i\alpha\sqrt{2\pi}} \left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 2.2** Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que sa partie réelle $\mathrm{Re}(a) > 0$. On considère la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $f \in L^1(\mathbb{R})$. En effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-t\mathrm{Re}(a)} dt = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{\mathrm{Re}(a)} e^{-t\mathrm{Re}(a)} \right]_0^b = \frac{1}{\mathrm{Re}(a)}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\alpha)t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-1}{i\alpha + a} e^{-(a+i\alpha)t} \right]_0^b \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\alpha)}.
\end{aligned}$$

■

2.1.3 Propriétés

Propriété 2.1.1 Linéarité

$$\mathscr{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{F}(f) + \mu \mathscr{F}(g), \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}); \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Propriété 2.1.2 Transformée d'une dérivée

Si f est continue et si $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a

$$\mathscr{F}(f')(\alpha) = i\alpha \mathscr{F}(f)(\alpha).$$

Propriété 2.1.3 Dérivation en α

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\mathscr{F}(f) \right)(\alpha) = -i\mathscr{F}\left(tf(t) \right)(\alpha).$$

Propriété 2.1.4 **Décalage temporel**

$$\mathscr{F}\left(f(t-a)\right)(\alpha) = e^{-ia\alpha}\mathscr{F}(f)(\alpha), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Propriété 2.1.5 **Décalage fréquentiel**

$$\mathscr{F}\left(e^{iat}f(t)\right)(\alpha) = \mathscr{F}(f)(\alpha - a), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Propriété 2.1.6 **Changement d'échelle**

$$\mathscr{F}\left(f(at)\right)(\alpha) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\alpha}{a}\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

2.1.4 Produit de convolution

Définition 2.1.3 Soient $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, on appelle produit de convolution de f et g la fonction notée $f \star g$ définie par :

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du.$$

On a le résultat suivant

Propriété 2.1.7 Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(f \star g) \in L^1(\mathbb{R})$, et on a

$$\mathscr{F}(f \star g) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f).\mathscr{F}(g).$$

2.2 Transformée de Fourier inverse

Définition 2.2.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier inverse de f la fonction :

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}f(t)dt.$$

On a le théoreme d'inversion suivant

Theorem 2.2.1 ***(théoreme d'inversion)***
Si f et $\mathscr{F}(f)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(f)\right)(t) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to t^+} f(x) + \lim_{x \to t^-} f(x)\right].$$

En particulier, si f est continue en t, alors $\mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(f)\right)(t) = f(t)$.
De plus on a

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t}f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\hat{f}(\alpha)(\alpha)d\alpha$$

■ **Exemple 2.3** on reprend la fonction porte définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

■

On a établit dans l'exemple 2.1 que

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

D'après le théorème2.2.1 d'inversion, il vient que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha = \begin{cases} f(t) & \text{si } |t| \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t| = 1 \end{cases}$$

donc

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Par addition, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\alpha}d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\alpha)}{\alpha}d\alpha = 1$$

Par le changement de variable $x = 2\alpha$, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$$

2.2.1 Transformée de Fourier-cosinus et Transformée de Fourier-sinus

Cas particuliers :

1. si f est paire

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(\alpha t) - i\sin(\alpha t)) f(t)dt$$

or, les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(\alpha t)$ et $t \mapsto f(t)\sin(\alpha t)$ sont respectivement paire et impaire. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t) = 0.$$

D'où la propriété suivante

Propriété 2.2.2 Si f est paire, $\hat{f}(\alpha)$ est réel et on a

$$\hat{f}(\alpha) = \hat{f}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)cos(\alpha t)dt \quad \text{(transformée de Fourier-cosinus)}$$

2. Si f est impaire, on obtient de la même façon

Propriété 2.2.3 Si f est impaire, $\hat{f}(\alpha)$ est imaginaire pur et on a

$$\hat{f}(\alpha) = \hat{f}_s(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)dt \quad \text{(transformée de Fourier-sinus)}$$

2.2.2 Formule de Parseval

Définition 2.2.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On dit que f est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ existe.
On note $L^2(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions f de carré intégrables sur $\mathbb{R}$

Theorem 2.2.4 ***(Parseval)***
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors on a la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$$

■ **Exemple 2.4** on reprend la fonction porte définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

On sait que

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

D'après l'identité de Parseval, on obtient

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha = \int_{-1}^{1} dt = 2.$$

On déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$$

■