CHAPITRE 2: LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

1. Les équations aux dérivées partielles

Considérons la forme générale d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) de second ordre suivant deux variables indépendantes (x et y) :

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\phi}{\partial x}+E\frac{\partial\phi}{\partial y}+F\phi+G=0 \qquad (1)$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sue la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre élevé A, B et C. On calcule le déterminant définit par :

$\Delta = B^2 - 4AC$.

L'équation est dite de type **elliptique** si **$0<\Delta$** , elle est **parabolique** si **$0=\Delta$** , et **hyperbolique** si **$0>\Delta$** .

Dans le cas d'un système d'EDP, il faut écrire l'équation caractéristique du système pour trouver sa nature. La marche à suivre est illustrée par l'exemple suivant :

$$A_1\frac{\partial U}{\partial x}+B_1\frac{\partial U}{\partial y}+C_1\frac{\partial V}{\partial x}+D_1\frac{\partial V}{\partial y}=E_1 \qquad (2)$$

$$A_2\frac{\partial U}{\partial x}+B_2\frac{\partial U}{\partial y}+C_2\frac{\partial V}{\partial x}+D_2\frac{\partial V}{\partial y}=E_2 \qquad (3)$$

on écrit les déplacement :

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy \qquad (4)$$

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy \qquad (5)$$

Les équations précédentes s'écrivent sous la forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ dU \\ dV \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Le déterminant :

$$(A_1C_2 - A_2C_1)dy^2 - (A_1D_2 - A_2D_1 + B_1C_2 - B_2C_1)dx\,dy + ($$

On divise l'équation précédente par dx^2 , et on définit $f' = \dfrac{dy}{dx}$

$$a\,f'^2 - b\,f' + c = 0 \qquad (8)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad (9)$$

L'équation est dite de type **elliptique** si $0<\Delta$, elle est **parabolique** si $0=\Delta$, et **hyperbolique** si $0>\Delta$.

Une des utilités de cette classification est de prévoir le comportement de l'équation vis à vis des conditions aux limites. Si nous imaginons un écoulement de fluide de gauche vers la droite, une perturbation en un point donné n'a pas d'influence amont si l'équation est de type parabolique. Si par contre l'équation est de type elliptique une perturbation quelconque en un point quelconque aura une influence dans toutes les directions de l'espace. Une conséquence directe de cette caractéristique est qu'un problème de type parabolique peut être résolu par une marche avant, alors qu'une équation de type elliptique nécessite la prise en considération des conditions aux limites imposées sur toutes les frontières du domaine de calcul.

Par exemple :

L'équation de Laplace	$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$	elliptique
L'équation de diffusion	$\dfrac{\partial\phi}{\partial t} - \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$	parabolique
L'équation	$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$	hyperbolique

1.1 L'EDP de nature parabolique :

C'est le cas d'un problème de propagation associé à un mécanisme de dissipation tel que la conduction thermique non stationnaire.

L'équation
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

liée aux conditions initiales $\phi = \sin(\pi x)$ et aux conditions aux limites :

$\phi(0,t) = \phi(1,t) = 0$ accepte la solution exacte suivante $\phi(x,t) = \sin(\pi x)\exp(-\pi^2 t)$

C'est une équation linéaire d'ordre 2, parabolique par rapport à la variable du temps t. La propagation en avant dans le temps et la diffusion dans l'espace, font que la solution en un point P peut influencer n'importe qu'elle point pour $t > t_i$. Cependant les points se situant dans la zone $t < t_i$ ne sont pas influencés par la solution au point P. En d'autres termes on dira que le passé influe sur le futur alors que l'inverse n'est pas vrai.

La dissipation dans l'espace, fait que même si la distribution initiale pour t= 0est discontinue, la solution devient continue pour t >0 .

1.2 L'EDP de nature elliptique :

Cette catégorie d'EDP est associée aux problèmes de nature stationnaire ou d'équilibre tels que l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux, la répartition stationnaire du champs de température ou la distribution d'un potentiel.

L'équation de Laplace du type
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

associée aux conditions aux limites suivantes

$$\phi(x,0) = \sin(\pi x),\ \phi(x,1) = \sin(\pi x)\exp(-\pi) \text{ et } \phi(0,y) = \phi(1,y) = 0$$

accepte la solution exacte suivante :

$$\phi(x,y) = \sin(\pi x)\exp(-\pi y)$$

La principale caractéristique de ce type d'équation elliptique est qu'une perturbation introduite en un point quelconque à l'intérieur du domaine de calcul influe sur la totalité du domaine. Ceci implique que pour résoudre un problème de type elliptique il est impératif de poser les conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine. Ici aussi une discontinuité dans les conditions aux limites est rapidement effacer (lisser) à l'intérieur du domaine de calcul.

1.3 L'EDP de nature hyperbolique :

Cette catégorie d'EDP peut être considérée comme extension des équations elliptiques pour lesquels certaines valeurs critiques des paramètres doivent être déterminées en même temps que la distribution d'équilibre correspondante. La résonance de circuit électrique ou d'enceintes acoustiques ainsi que la détermination des fréquences propres des structures élastiques constituent des exemples de ce type d'équations.

L'équation de propagation d'une onde suivante

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

représente un très bon exemple pour l'équation de type hyperbolique. Cette équation associée aux conditions initiales

$\phi(x,0) = \sin(\pi x)$, $\quad \partial\phi/\partial t(x,0) = 0$ et aux conditions aux limites

$\phi(0,t) = \phi(1,t) = 0$ accepte la solution suivante :

$$\phi(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

Enfin, la figure 1 représente schématiquement l'influence d'une perturbation au point P sur l'ensemble du domaine de calcul pour les trois types d'équations.

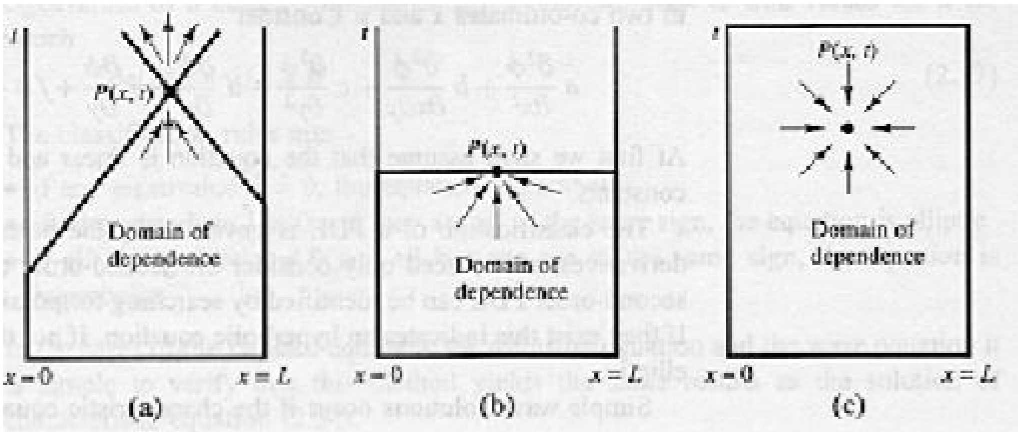

Figure 1 : Nature des équations et conditions aux limites,

(a) Hyperbolique, (b) Parabolique et (c) Elliptique.

Les conditions aux limites

Soit un problème définit dans un domaine R, limité par la frontière ∂R . Les conditions aux limites peuvent être de trois natures :

Dirichlet : Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul $\phi = f$ *sur* ∂R

Newman : La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien définit

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f \qquad ou \qquad \frac{\partial \phi}{\partial s} = q \qquad sur \qquad \partial R \qquad (11)$$

Mixte : Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k\phi = f, \quad k > 0 \quad sur \quad \partial R \qquad (12)$$

Un problème de transfert de chaleur ou d'écoulement est dit bien posé si en résolvant les équations du problème liées aux conditions aux limites et initiales

- La solution numérique existe.
- La solution numérique est unique.
- La solution numérique dépend de façon continue de la variation des conditions aux limites.